

І.В. Федак

Івано-Франківська обласна олімпіада з математики 2017р.

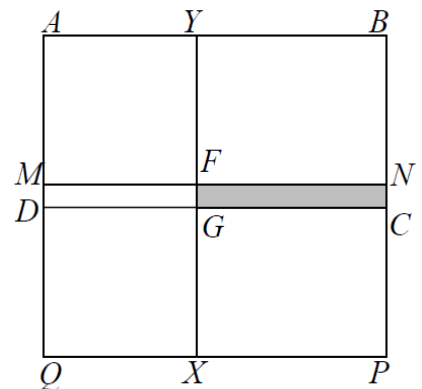
Умови задач

7 клас

1. На дошці записують послідовність цифр за таким правилом: якщо останні цифри, записані на дошці, дорівнюють a та b , то за ними записується остання цифра добутку ab . Знайдіть 2017-ту виписану цифру послідовності, якщо вона почалася з цифр 3; 4. Відповідь обґрунтуйте.

2. У компанії друзів кожному подобалася або математика, або інформатика. Відомо, що ті, кому подобалась математика, мали середній вік 15 років, а ті, кому подобалась інформатика, мали середній вік 25 років. Одного дня Андрійкові перестала подобатись інформатика, та стала подобатись математика. Внаслідок цього середній вік тих, кому подобалась інформатика, а також тих, кому подобалась математика, став більшим на 1. З'ясуйте, скільки всього було друзів у цій компанії та наведіть відповідний приклад, що така ситуація можлива.

3. Три однакових прямокутники $ABCD$, $MNPQ$ та $BPXY$ розташовані так, як це зображено на рисунку. Прямокутник $NCGF$ спільний для усіх цих трьох прямокутників і має площу 17. Визначте довжини сторін однакових прямокутників, якщо відомо, що вони є натуральними числами. Відповідь обґрунтуйте.



4. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо це був чемпіонат з

баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічий не буває? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

1. По колу розставлені 8 кружечків. Чи можна записати у цих кружечках числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 таким чином, щоб сума чисел, що записані у будь-яких двох сусідніх кружечках, не ділилася ні на 3, ні на 5, ні на 7?

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше могло виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічий не буває?

б) це був чемпіонат з гандболу, де за перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується?

3. Добуток трьох чисел $\overline{abc} \cdot \overline{ab} \cdot a = 3****7$ є шестицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 7. Цифри не обов'язково різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

4. У трапеції $ABCD$ з основами BC та AD бісектриса кута DAB перетинає бісектриси кутів ABC та CDA у точках P та S відповідно, а бісектриса кута BCD перетинає бісектриси кутів ABC та CDA у точках Q та R відповідно. Доведіть, що якщо $PS \parallel RQ$, то $AB = CD$.

5. Знайдіть усі пари (a, b) цілих чисел a та b , які задовольняють умову $a^2 + b^2 = a + b + ab$.

9 клас

1. Знайдіть найбільший спільний дільник набору з 2017 таких чисел: $2017+1$, 2017^2+1 , 2017^3+1 , ..., $2017^{2017}+1$.

2. У чемпіонаті з гандболу взяли участь 8 команд. За перемогу нараховується 2 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не

нараховується. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Команди, що на даний момент або наприкінці турніру набрали однакову кількість очок, розподіляються по місцях по додаткових показниках (особиста зустріч, різниця м'ячів тощо). В деякий момент після чергового туру виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок. Чи зможе наприкінці чемпіонату посісти перше місце команда, що у той момент була на 8-му місці?

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y = z^2 + 1, \\ (y^2 + 1)z = x^2 + 1, \\ (z^2 + 1)x = y^2 + 1. \end{cases}$$

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється п'ятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Перемагає той, у кого число, що утворилося, ділиться націло на 9. Якщо у обох число ділиться на 9, або у обох не ділиться на 9, то вважається, що гра завершилась внічию. Кожен з гравців прагне перемогти. Чи може хтось із них забезпечити собі перемогу?

5. У трикутнику ABC проведені медіани BB_1 та CC_1 , які перетинаються у точці M . Доведіть, що у чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

10 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:

а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічийї не буває.

б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC , а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM . Доведіть, що $AB = AH$.

4. Знайдіть двоцифрове натуральне число $N = \overline{ab}$, $b \neq 0$, для якого у послідовності чисел $m_n = \overline{a0\dots0b}$ n

а) усі члени кратні N ; б) жодний член не кратний N ; в) є нескінченна кількість членів, які кратні N , а також, нескінченна кількість членів, які не кратні N .

5. Для невід'ємних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$3(x^2 + y + z)(x + y^2 + z)(x + y + z^2) \geq (x + y + z)^4.$$

11 клас

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, яке задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. Добуток $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab} = 3*****1$ є восьмицифровим числом з першою цифрою 3 та останньою цифрою 1. Цифри попарно різні. Чому може дорівнювати цей добуток? Наведіть усі можливі відповіді.

3. Доведіть, що при будь-якому значенні параметра a рівняння

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1 = 0$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

4. У футбольному чемпіонаті грали команд n в одне коло, тобто кожна команда з кожною зіграла рівно 1 раз. За перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується. За підсумками чемпіонату виявилось, що усі команди набрали різну кількість очок, при цьому у команд, що посіли сусідні місця, набрані очки відрізняються рівно на 1. Скільки мінімум очок могла набрати команда, яка посіла останнє місце, і при якому найменшому n це могло відбутися.

5. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD . Коло k проходить через вершину A та дотикається до сторони BC у точці D . Доведіть, що описане коло трикутника ABC дотикається до кола k у точці A .

Розв'язання задач

7 клас

1. Випишемо кілька перших елементів послідовності, поки деяка пара цифр не повториться: 3; [4; 2; 8; 6; 8; 8;]4;2; Таким чином, періодично буде повторюватися група із шести цифр, записаних у квадратних дужках, причому цифра 3 знаходиться поза періодом. Оскільки 2017 при діленні на 6 дає остачу 1, то на 2017-му місці виявиться цифра 8, яка була записана на 7-му місці цієї послідовності.

2. Нехай тих, хто любляв математику, було m , а тих, хто любляв інформатику, було n . Тоді, порахувавши сумарний вік усіх друзів двома способами, отримаємо рівність

$$15m + 25n = 16(m + 1) + 26(n - 1),$$

з якої випливає, що кількість друзів у цій компанії $m + n = 10$.

Покажемо, що така ситуація можлива. Дійсно, нехай спочатку було 4 любителі математики віком по 15 років, 5 любителів інформатики віком 26 років, а вік Андрійка становив x років. Умови задачі будуть виконані, якщо одночасно справджуються рівності $\frac{4 \cdot 15 + x}{5} = 16$ та $\frac{5 \cdot 26 + x}{6} = 25$. Легко бачити, що при цьому $x = 20$.

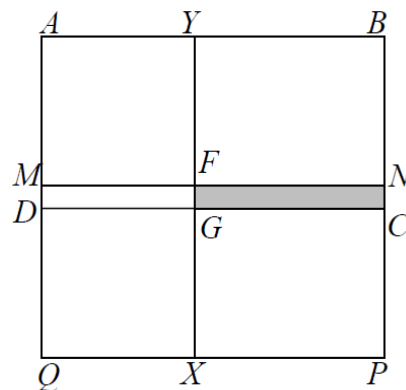
3. Нехай $AB = BP = a$, $BC = NP = PX = b$. Тоді $FN = b$, $NC = 2b - a$.
Тому $(2b - a)b = 17$. 17 – просте число,

отже, можливі лише два випадки:

1). $2b - a = 1$, $b = 17$, звідки маємо $a = 33$;

2). $2b - a = 17$, $b = 1 \Rightarrow a = -15$, що, звісно, умову задачі не задовольняє.

4. Найменші кількості очок, що могли набрати команди, такі: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Таке могло трапитись не раніше як після 7 турів у разі, коли кожна команда, що посіла в підсумковій таблиці вище місце, виграла у команди, що посіла місце нижче.



8 клас

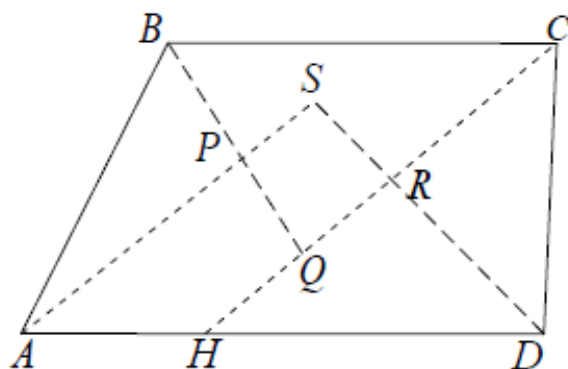
1. Не можна. Дотримуючись умов задачі, поряд з числом 2 вдасться записати лише одне число 6.

2. а) Після семи турів. Див. розв'язання задачі 7.4;

б). Найменші кількості очок, що могли набрати команди, є такими: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Оскільки за 3 тури щонайбільше можна набрати 6 очок, то необхідно не менше чотирьох турів. Що цього достатньо, впливає з можливої турнірної таблиці після четвертого туру (див. нижче розв'язання задачі 9.2).

3. Оскільки добуток закінчується на 7, то усі цифри непарні і не дорівнюють 5. Враховуючи нерівності $911 \cdot 91 \cdot 9 = 746109 > 399997$ та $399 \cdot 39 \cdot 3 = 46683 < 300007$, отримуємо, що $a = 7$. Отже, добуток bc повинен закінчуватися цифрою 1. Отже, можливі лише такі чотири випадки множення вказаних трьох чисел: $799 \cdot 79 \cdot 7 = 441847$, $773 \cdot 77 \cdot 7 = 416647$, $737 \cdot 73 \cdot 7 = 376607$ та $711 \cdot 71 \cdot 7 = 353367$. Умову задачі задовольняють тільки два останні добутки.

4. Оскільки за умовою задачі $BC \parallel AD$, то половини сум кутів при сторонах AB та CD дорівнюють 90° (див. малюнок).



Звідси випливає, що кути APB та CRD , а з ними і кути SPQ та SRQ є прямими. Оскільки, крім того, $PS \parallel RQ$, то чотирикутник $SRQP$ є прямокутником. Тому $\angle ASD = 90^\circ$, і сума кутів при основі AD трапеції дорівнює 180° . Отже, також $AB \parallel CD$, тобто $ABCD$ є паралелограмом, і в ньому $AB = CD$.

5. Помноживши обидві частини рівності на 2, запишемо її як

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2.$$

Розглянувши тепер три можливі випадки

- 1). $a-b=0, |a-1|=1, |b-1|=1$;
- 2). $|a-b|=1, a-1=0, |b-1|=1$;
- 3). $|a-b|=1, |a-1|=1, b-1=0$,

отримаємо в кожному з них по дві пари (a,b) розв'язків: $(2,2)$, $(0,0)$; $(1,2)$, $(1,0)$ та $(2,1)$, $(0,1)$ відповідно.

Зауважимо, що можна було би також розглядати задану рівність як квадратне рівняння відносно a . Оскільки його дискримінант $D = 4 - 3(b-1)^2$ невід'ємний лише при цілих значеннях $b=0$, $b=1$ та $b=2$, то достатньо буде розв'язати три квадратні рівняння.

9 клас

1. Усі задані числа парні, то їх найбільший спільний дільник – парне число, яке є дільником числа 2018. Враховуючи рівність

$$2017^2 + 1 = (2018-1)^2 + 1 = 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 2,$$

отримуємо, що він є також дільником числа 2, отже, дорівнює 2.

2. Як ми вже встановили при розв'язуванні задачі 8.2 б) ситуація з різною кількістю очок могла вперше виникнути після четвертого туру. При цьому за 4 тури команди разом наберуть 32 очки.

Команда, яка на цей момент була 8-ою, не могла мати й одного очка, інакше загальна сума очок виявилась би не меншою за $1 + 2 + \dots + 8 = 36 > 32$. З аналогічних міркувань 5-та команда не могла мати більше трьох очок.

Оскільки, крім того, у 1-ої команди на цей момент не більше 8 очок, то 4-та команда не може мати менше 5 очок. Таким чином, очки команд від 1-ої до 8-ої можуть бути лише такими: 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0.

За три тури, які залишилися до закінчення турніру, 8-ма після четвертого туру команда може набрати не більше 6 очок, отже, не підніметься вище третього місця. Можливість отримати його принаймні за додатковими показниками ілюструє наступна турнірна таблиця:

Команди	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки після 4-го туру	Очки після 7-го туру	Місце після 7-го туру
1		2	2	2	2	2	2	2	8	14	1
2	0		2	1	2	2	2	2	7	11	2
3	0	0		1	1	0	2	2	6	6	3-4
4	0	1	1		0	1	0	2	5	5	5-7
5	0	0	1	2		1	1	0	3	5	5-7
6	0	0	2	1	1		0	0	2	4	8
7	0	0	0	2	1	2		0	1	5	5-7
8	0	0	0	0	2	2	2		0	6	3-4

Жирним шрифтом виділені очки команд, отримані ними в трьох останніх турах.

3. З умов задачі випливає, що x, y, z додатні. Перемноживши ці рівняння, приходимо до висновку, що $x y z = 1$. Вважаючи для конкретності $x \geq \max\{y, z\}$, звідси маємо, що $x \geq 1$.

Якщо $x = 1$, то отримуємо очевидний розв'язок $x = y = z = 1$.

Якщо ж $x > 1$, то з другого рівняння системи випливає, що $z \geq 1$, і внаслідок рівності $x y z = 1$ маємо $y < 1$. Але такі три нерівності суперечать третьому рівнянню заданої системи.

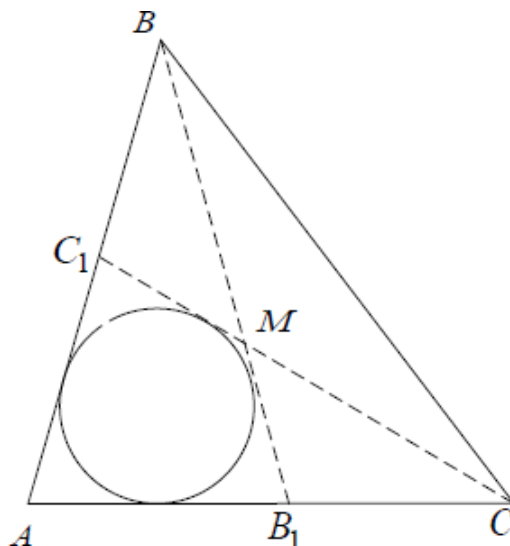
4. Гра завжди закінчуватиметься внічию. Справді, сума всіх цифр, записаних на картках, дорівнює 45 і ділиться на 9. Тому сума довільних п'яти з них може ділитися на 9 лише тоді, коли сума решти п'яти цифр ділиться на 9. Отже, або обидва утворені гравцями числа кратні 9, або кожне з них на 9 не ділиться.

5. Якщо $AB = AC$, то чотирикутник AC_1MB_1 симетричний відносно прямої AM . Отже, суми його протилежних рівні, тому в нього можна вписати коло.

Навпаки, нехай у цей чотирикутник можна вписати коло. Тоді суми його протилежних сторін рівні, що запишемо у вигляді

$$\frac{c}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_c}{3} \Leftrightarrow \frac{3c}{2} + m_b = \frac{3b}{2} + m_c.$$

Далі зауважимо, що таке коло є одночасно вписаним у трикутники ABB_1 та ACC_1 (див. малюнок).



Оскільки площі кожного з них дорівнюють половині площі трикутника ABC , то їхні периметри також рівні, тобто

$$\frac{b}{2} + c + m_b = \frac{c}{2} + b + m_c.$$

Віднявши цю рівність від попередньої, отримаємо $\frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{c}{2}$, тобто $c = b$, що й треба було довести.

10 клас

1. З умови подільності на 3 випливає, що незадіяною повинна бути цифра, кратна 3. Зрозуміло, що при цьому доцільно, щоб нею був 0, або принаймні 3. Будемо виписувати цифри числа, використовуючи на кожному кроці найбільшу з них, допустиму умовами задачі. Тоді перші 5 цифр числа матимуть вигляд 97586. На перший погляд може здатися, що наступною слід записати цифру 4. Але у кожному з трьох наступних варіантів – 97586420., 97586413., 97586402. – завершити запис шуканого дев'ятицифрового числа без суперечностей з умовами задачі не вдасться. Тому шостою запишемо цифру 3. Оскільки при цьому цифра 0 не буде задіяна, то однозначно отримуємо число 975863142.

2. а). Після семи турів. Див. розв'язання задачі 7.4;

б). Найменші кількості очок, що могли набрати команди, є такими: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 7. Оскільки за 2 тури щонайбільше можна набрати 6 очок, то треба не менше трьох турів. Що цього достатньо, впливає з можливої турнірної таблиці після третього туру:

Команди	1	2	3	4	5	6	7	8	Очки
1		-	-	3	-	-	3	3	9
2	-		-	1	-	-	3	3	7
3	-	-		-	1	1	-	3	5
4	0	1	-		-	3	-	-	4
5	-	-	1	-		1	1	-	3
6	-	-	1	0	1		-	-	2
7	0	0	-	-	1	-		-	1
8	0	0	0	-	-	-	-		0

3. Побудуємо коло радіуса AB з центром в A . Нехай воно перетинає відрізок MD у точці K . При цьому $AK = AB$. Позначимо $AB = a$, $\angle MDC = \varphi$. Тоді $\angle MDA = \frac{\pi}{2} - \varphi$, і з рівності $AK = AD$ випливає, що $KD = 2a \sin \varphi$. Оскільки також

$$HD = a \cos \varphi = 2a \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi = KD \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CD}{MC} = KD,$$

то точки K та H збігаються. Отже, $AH = AK = AB$.

4. Шуканими будуть, наприклад, такі числа:

а) 15. Справді, усі числа вигляду $10\dots05$ діляться на 3 і на 5;

б) 12. Кожне число вигляду $10\dots02$ не ділиться на 4;

в) 11. За ознакою подільності на 11 усі числа вигляду $10\dots01$ з парною кількістю нулів діляться на 11, а з непарною – ні.

5. Використавши двічі нерівність Коші-Буняковського (нерівність Шварца), маємо такі оцінки для добутків множників:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y + z) &= (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2) \geq (x + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \\ (x + y^2 + z)(x + y + z^2) &= ((\sqrt{x})^2 + y^2 + (\sqrt{z})^2)((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + z^2) \geq \\ &\geq (x + y\sqrt{y} + z\sqrt{z})^2. \end{aligned}$$

І, на завершення, ще раз за цією ж нерівністю отримуємо

$$\begin{aligned} &(x + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 (x + y\sqrt{y} + z\sqrt{z})^2 = \\ &= \left(((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{\sqrt{y}})^2 + (\sqrt{\sqrt{z}})^2) ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y\sqrt{y}})^2 + (\sqrt{z\sqrt{z}})^2) \right)^2 \geq \\ &\geq (x + y + z)^4. \end{aligned}$$

11 клас

1. 975863142. Див. розв'язання задачі 10.1.

2. Оскільки шуканий добуток закінчується цифрою 1, то усі цифри його множників непарні і не дорівнюють 5. Серед них немає і цифри 9, бо $913 \cdot 139 \cdot 391 = 49620637 > 30000007$. Тому залишається переглянути лише такі два варіанти: $713 \cdot 137 \cdot 371 = 36239651$ та $731 \cdot 317 \cdot 173 = 40088771$. Умову задачі задовольняє тільки 36239651.

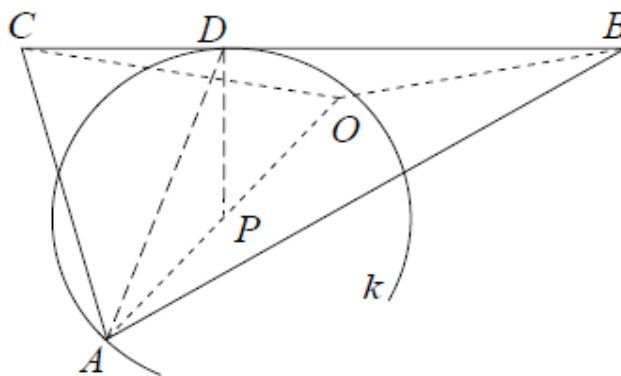
3. Позначимо через $f(x)$ вираз у лівій частині рівняння. Оскільки $f(0) = a - 1$, $f(-1) = -4a^2 + 3a$, то

$$f(0) + f(-1) = -4a^2 + 4a - 1 = -(2a - 1)^2 \leq 0.$$

Звідси, внаслідок неперервності функції $f(x)$, і впливає твердження задачі.

4. Зрозуміло, що $n \geq 2$. Нескладно переконатися, що для $n = 2$ та $n = 3$ описана в умові задачі ситуація неможлива. Якщо ж $n = 4$, то загальна кількість набраних командами очок знаходиться у межах від 12 (усі зустрічі завершилися внічию) до 18 (нічиїх не було взагалі). Оскільки $1 + 2 + 3 + 4 < 10$, а $12 < 2 + 3 + 4 + 5 < 18$, то в останньої команди не може бути менше двох очок. Для $n = 4$ цей мінімум досягається якщо, наприклад, перша команда переможе другу, друга – четверту, а решта ігор завершаться унічию.

5. Твердження задачі очевидне, якщо $\angle ACB = \angle ABC$. Далі для конкретності будемо вважати, що $\angle ACB > \angle ABC$ (див. малюнок).



Використаємо для кутів трикутника ABC стандартні позначення α, β, γ . Крім того, позначимо $\angle PAD = \varphi$. Тут P – центр кола k , також O – центр описаного кола трикутника ABD .

Тоді $\angle CAP = \frac{\alpha}{2} + \varphi$, бо AD – бісектриса кута A ; $\angle CAO = \frac{\pi}{2} - \beta$,

бо $OA = OC$, $\angle COA = 2\beta$. Оскільки також $\angle PDA = \varphi$ та $\angle CDA = \frac{\pi}{2}$,

то за властивістю зовнішнього кута при вершині D трикутника ABD отримуємо рівність $\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\alpha}{2} + \beta$, з якої маємо $\angle CAP = \angle CAO$. Тому точки A, P, O лежать на одній прямій.

Оскільки дотична до кола k у точці A перпендикулярна до радіуса AP , то вона також перпендикулярна до AO , отже збігається з дотичною у точці A до описаного кола трикутника ABD . Таким чином, вказані два кола дотикаються у точці A .