

ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

**ЗАДАЧА ТИПУ ЗАДАЧІ ДІРХЛЕ ДЛЯ БЕЗТИПНИХ РІВНЯНЬ ІЗ
ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ.**

*Любов Царевич,
Укурс, фізико-математичний
факультет.
Науковий керівник – Пташник Б.Й.,
доктор фізико-математичних наук,
професор.*

1. В області $D = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, де Ω – обмежена однозв'язна область із гладкою границею Γ , розглянемо задачу

$$M(U) \equiv \sum_{s=0}^n A_s \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)^{n-s} L^s U = f(t, x), \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^{2(r-1)} U}{\partial t^{2(r-1)}} \right|_{t=0} = \varphi_r(x), \quad \left. \frac{\partial^{2(r-1)} U}{\partial t^{2(r-1)}} \right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \quad r = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$L^s U|_{\Gamma} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

де $A_s \in \mathbb{R}$, $L \equiv \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - c(x)$ – еліптичний в

області Ω оператор з досить гладкими коефіцієнтами, $a_{i,j}(x) > 0$ та $c(x) \geq 0$.

Позначимо $\{X_k(x)\}$ і $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k \in N$, відповідно множини власних функцій та власних значень задачі:

$$LX = -\lambda X, \quad X|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

2. Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (5)$$

де кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in N$, є відповідно розв'язком такої задачі:

$$\sum_{s=0}^n A_s (-\lambda_s)^s \frac{\partial^{2(n-s)} u_k(t)}{\partial t^{2(n-s)}} = f_k(t), \quad (6)$$

$$u_k^{2(r-1)}(0) = \varphi_{k,r}, \quad u_k^{2(r-1)}(T) = \varphi_{k,n+r}, \quad r = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ всі корені $\eta_j(\lambda_k)$, $j = 1, \dots, 2n$, рівняння

$$\sum_{s=0}^n A_s (-\lambda_s)^s \eta^{2(n-s)} = 0 \quad (2)$$

є попарно різні та відмінні від нуля.

Характеристичний визначник задачі (6), (7) обчислюється за такою формулою:

$$\Delta(\lambda_k) = \prod_{j=1}^n (\exp(-\eta_j(\lambda_k)\Gamma) - \exp(\eta_j(\lambda_k)\Gamma)) \prod_{n \geq p > q \geq 1} (\eta_p^2(\lambda_k) - \eta_q^2(\lambda_k))^2.$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1)-(3) у просторі $C^{2n}(\overline{D})$ необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta(\lambda_k) \neq 0 \quad (3)$$

для всіх $\lambda_k \in \Lambda$.

3. Розглянемо питання про існування розв'язку.

Нехай виконуються умови (9). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує розв'язок задачі (6), (7), який зображується у вигляді суми

$$U_k(t) = V_k(t) + U_k(t), \quad (10)$$

$$\text{де} \quad V_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$U_k(t) = \sum_{j=1}^n (C_{k,j} \exp(\eta_j(\lambda_k)t) + C_{k,n+j} \exp(-\eta_j(\lambda_k)t)), \quad (12)$$

де $G_k(t, \tau)$ – функція Гріна відповідної однорідної задачі (6), (7).

Розв'язок задачі (1)-(3) формально зображається рядом

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (V_k(t) + U_k(t)) X_k(x). \quad (13)$$

В роботі отримано явну формулу для розв'язку задачі. Питання про збіжність ряду (13), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази $(\exp(2\eta_j(\lambda_k)\Gamma) - 1)$, $j = 1, \dots, n$, що входять знаменниками у формули (11), (12), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 2. Нехай існують додатні сталі m_1, γ_1 такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності

$$|\exp(2\eta_j(\lambda_k)\Gamma) - 1| \geq m_1 \lambda_k^{-\gamma_1} \exp(2\eta_j(\lambda_k)\Gamma), \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

і нехай $f(t, x) \in C([0, T], B_{\beta_2}^{1/2})$, $\varphi_r(x) \in B_{\beta_1}^{1/2}$, $r = 1, \dots, 2n$,

де $\beta_1 > 5\alpha T$, $\beta_2 > 6\alpha T$.

Тоді існує розв'язок задачі (1)-(3) з простору $C^{2n}(\bar{D})$, який неперервно залежить від функції $f(t, x)$ та $\varphi_r(x)$, $r = 1, \dots, 2n$.

Доведення впливає з оцінки

$$\|U(t, x)\|_{C^{2n}(\bar{D})} \leq C_1 \|f(t, x)\|_{C([0, T], B_{\beta_2}^{1/2})} + C_2 \sum_{j=1}^{2n} \|\varphi_j(x)\|_{B_{\beta_1}^{1/2}}.$$

Означення простору B_q^α див. в роботі [1].

4. В роботі проаналізовано можливість виконання оцінок (14).

Теорема 3. Для майже всіх (відносно міри Лебега в \mathcal{R}) чисел $T > 0$ нерівності (14) виконуються при $\gamma_1 \geq p/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.

1. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49. – №11. – С.1478-1487.