Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математичного та функціонального аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
на тему "**Регулярність за Аренсом**"

Виконав студент 4 курсу
спеціальності "Математика"
Шарин Юрій Сергійович

Керівник:
д.ф.-м.н., проф. Василишин Т.В.

Рецензент:
д.ф.-м.н., проф. Загороднюк А.В.

Івано-Франківськ, 2025

Зміст

Вступ

Регулярність за Аренсом — одне з нових понять сучасного функціонального аналізу, яке стосується поведінки білінійних операторів при канонічному продовженні на спряжені простори. Ідеї Аренса, викладені ще в середині XX століття, і сьогодні залишаються актуальними при дослідженні структури банахових просторів, зокрема при вивченні їх рефлексивності, слабкої компактності операторів та взаємодії з топологією спряжених просторів.

У дипломній роботі досліджується регулярність за Аренсом банахових просторів на прикладі білінійних форм, з акцентом на симетричні та антисиметричні білінійні форми. Також у роботі проаналізовано класичне поняття регулярності за Аренсом у контексті білінійних операторів, продовжень Аренса та *-слабкої топології. В окремому розділі дипломної роботи розгянуто приклад квазірефлексивного простору порядку 1, так званого простору Джеймса, і проаналізовано його властивості.

Ключовою метою роботи є побудова конкретних прикладів білінійних форм, визначених на нерегулярних банахових просторах, зокрема на просторах виду $X \times X'$, де X — квазірефлексивний простір порядку 1. У таких прикладах показано, що навіть якщо початкова білінійна форма є антисиметричною, після продовження на спряжені простори вона втрачає цю властивість.

1 Попередні відомості

У цьому розділі введемо ті поняття та опишемо їх властивості, що будуть використані у дипломній роботі. Припускаємо, що базовими поняттями з лінійної алгебри, топології та функціонального аналізу читач володіє.

1.1 Білінійні форми

Білінійні форми є одним із фундаментальних понять лінійної алгебри та мають широке застосування в багатьох галузях сучасної математики. Незважаючи на свою просту структуру, білінійні форми відіграють ключову роль у дослідженні властивостей векторних просторів, особливо коли йдеться про метрику, ортогональність, симетрію чи ермітовість.

Означення 1. ***Білінійною формою*** *на векторному просторі L над полем $\mathbb{K}$ (зазвичай $\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$) називають відображення*

$$B : L \times L \to \mathbb{K}$$

таке, що для всіх $x, y, z \in L$ і всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ виконуються наступні дві умови:

- $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$ *(лінійність за першим аргументом);*
- $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$ *(лінійність за другим аргументом).*

Означення 2. ***Симетричною білінійною формою*** *називають білінійну форму B, що задовольняє умову*

$$B(x, y) = B(y, x)$$

для всіх $x, y \in L$.

Означення 3. ***Антисиметричною білінійною формою*** *називають білінійну форму B, що задовольняє умову*

$$B(x, y) = -B(y, x)$$

для всіх $x, y \in L$.

Зауважимо, що якщо B — антисиметрична білінійна форма, то для будь-якого вектора x виконується $B(x, x) = 0$.

Розглянемо деякі приклади білінійних форм на просторі ℓ_1.

Приклад 1. *Задамо відображення $B : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K}$ формулою*

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n y_n, \tag{1}$$

де $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фіксована послідовність дійсних чисел така, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

є збіжним. Прикладом такої послідовності може бути послідовність, загальний член якої заданий формулою

$$c_n = \frac{1}{2^n}.$$

Оскільки $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_1$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ є збіжними. Тому можна стверджувати, що загальний член першого ряду буде обмежений деяким числом m, а загальний член другого ряду буде обмежений деяким числом k. Отже, послідовність $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ буде обмежена числом mk.

Таким чином ми отримали оцінку

$$|c_n x_n y_n| \le |c_n| mk.$$

Із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| mk$ випливає абсолютна та рівномірна збіжність вихідного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x_n y_n$, що є в означенні (1) *білінійної форми B. Таким чином, ця білінійна форма коректно визначена.*

Неважко перевірити, що таким чином визначена форма є, очевидно, білінійною.

Приклад 2. *Визначимо $B : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K}$ формулою*

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n^2}.$$

Доведення збіжності ряду аналогічне до попереднього прикладу. Достатньо взяти

$$c_n = \frac{1}{n^2}.$$

Оскільки доданки симетричні відносно x_n та y_n, то ця форма симетрична.

Приклад 3. *Визначимо $B : \ell_1 \times \ell_1 \to \mathbb{K}$ формулою*

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n}{n^2}.$$

Доведення збіжності ряду аналогічне до першого прикладу.

Легко переконатися, що $B(x, y) = -B(y, x)$, тому ця форма є антисиметричною.

1.2 Слабка та *-слабка топології

У всій дипломній роботі слабку топологію простору X позначатимемо $\sigma(X, X')$, де X' позначає спряжений простір.

Відомо, що коли X є скінченновимірним простором, то його слабка топологія еквівалентна топології норми. Проте якщо X — нескінченновимірний простір, то слабка топологія строго слабша за топологію норми, бо слабкий окіл нуля є завжди необмеженою множиною.

Збіжність в слабкій топології

Означення 4. *Послідовність елементів $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ банахового простору X називають **слабко збіжною** до елемента $x \in X$, якщо для кожного функціонала $f \in X'$ виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Нехай $\mathcal{L}(X, X')$ — простір, який складається з усіх лінійних неперервних відображень $A : X \to X'$. Простір усіх неперервних білінійних форм $B : X \times X \to \mathbb{C}$ позначимо $\mathcal{L}(^2X)$. Наступна теорема встановлює зв'язок між цими просторами.

Теорема 1. *Простір $\mathcal{L}(X, X')$ ізоморфний до простору $\mathcal{L}(^2X)$.*

Доведення. Нехай $B \in \mathcal{L}(^2X)$. Для кожного $x \in X$ зафіксуємо перший аргумент і розглянемо відображення

$$f_x(y) := B(x, y), \quad y \in X.$$

Оскільки B білінійне та неперервне відображення, то для кожного фіксованого $x \in X$ функціонал f_x є елементом X', тобто $f_x \in X'$.

Таким чином, можемо визначити відображення $A : X \to X'$ за формулою

$$A(x) := f_x.$$

Очевидно, що A є лінійним і неперервним відображенням завдяки відповідним властивостям білінійної форми B.

Навпаки, нехай задано $A \in \mathcal{L}(X, X')$. Визначимо форму $B : X \times X \to \mathbb{C}$ за правилом

$$B(x, y) := A(x)(y), \quad x, y \in X.$$

Легко бачити, що B є білінійною формою. Крім того, B є неперервною формою, оскільки A та $A(x)$ для кожного $x \in X$ є неперервними відображеннями.

Отже, побудовано взаємно однозначну відповідність між $\mathcal{L}(X, X')$ і $\mathcal{L}(^2X)$, що зберігає структуру простору. $\square$

Означення 5. *Неперервне лінійне відображення $A : X \to Y$ називають **слабко компактним**, якщо образ одиничної кулі з X є передкомпактом в слабкій топології $\sigma(Y, Y')$ простору Y.*

2 Білінійні оператори

2.1 Означення та основні властивості

У цьому розділі розглянемо білінійні оператори, їх спряження, а також деякі властивості, що відіграють важливу роль у функціональному аналізі, зокрема в контексті рефлексивності та регулярності за Аренсом. Центральною метою є представлення результату, який сформульований у Теоремі 2, що пов'язує ці поняття між собою.

Почнемо з формального означення білінійного оператора.

Означення 6. *Оператор $m : X \times Y \to Z$ називають* ***обмеженим білінійним оператором****, якщо для нього виконуються наступні умови:*

1) $m(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha m(x_1, y) + m(x_2, y)$;

2) $m(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha m(x, y_1) + m(x, y_2)$;

3) для деякого $M < \infty$ справджується

$$\sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} \|m(x,y)\| \leq M.$$

Наступним важливим кроком є поняття спряженого оператора, що дає змогу "переносити" дію білінійного оператора на спряжені простори.

Означення 7. *Оператор $m^* : Z' \times X \to Y'$ називаємо* ***спряженим оператором*** *до оператора $m : X \times Y \to Z$, якщо для $z' \in Z'$, $x \in X$ виконується рівність*

$$m^*(z', x)(y) = z'(m(x,y)), \quad \forall y \in Y.$$

Таким чином, m^* дозволяє представити дію оператора m у термінах спряжених просторів, що є основою подальших конструкцій.

Розглянемо також наступний клас білінійних операторів.

Означення 8. *Оператор $m : X \times X \to Z$ називаємо* ***транспонованим*** *(або* ***оберненим****) оператором до оператора $m : X \times X \to Z$, якщо*

$$m(x,y) = m^t(y,x).$$

Ця властивість буде важливою при розгляді регулярних за Аренсом операторів.

Тепер перейдемо до центрального у цьому розділі означення – регулярності за Аренсом.

Означення 9. *Оператор $m^{**} : Y'' \times Z' \to X'$ є* ***спряженим оператором до оператора*** *$m^* : Z' \times X \to Y'$, якщо для $y'' \in Y''$, $z' \in Z'$ виконується рівність:*

$$m^{**}(y'', z')(x) = y''(m^*(z', x)), \quad \forall x \in X.$$

Означення 10. *Оператор $m^{***} : X'' \times Y'' \to Z''$ є* ***спряженим оператором до оператора*** *$m^{**} : Y'' \times Z' \to X'$, якщо для $x'' \in X''$, $y'' \in Y''$ виконується рівність:*

$$m^{***}(x'', y'')(z') = x''(m^{**}(y'', z')), \quad \forall z' \in Z'.$$

Означення 11. *Білінійний оператор $m : X \times Y \to Z$ називають* ***регулярним за Аренсом****, якщо*

$$m^{***} = m^{t***t}.$$

Окремим випадком білінійного оператора є білінійна форма. Всі наведені вище означення легко переписати на випадок білінійних форм.

Означення 12. *Білінійну форму $m : X \times Y \to \mathbb{R}$ називають* ***рефлексивною****, якщо існує рефлексивний гільбертовий простір R і два лінійні неперервні оператори $\varphi : X \to R$ і $\psi : Y \to R'$ такі, що*

$$m(x, y) = \big\langle \varphi(x), \psi(y) \big\rangle,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток у гільбертовому просторі R.

Зараз ми готові сформулювати основну теорему цього розділу. Вона буде використана у роботі для еквівалентного означення регулярності банахового простору, що у свою чергу є суттєвим для результатів головного у бакалаврській роботі Розділу 5.

Теорема 2. *Нехай $m : X \times Y \to \mathbb{R}$ — білінійна форма. Тоді наступні твердження для білінійної форми m є еквівалентними:*

1) m є регулярною за Аренсом білінійною формою;

2) m є слабко компактною білінійною формою;

3) m є рефлексивною білінійною формою.

Доведення цієї теореми можна знайти у статтях [1, 5].

2.2 Приклади спряжених білінійних операторів

Розглянемо окремі приклади білінійних операторів та їх продовжень на спряжені простори.

Приклад 4. *Визначимо білінійний оператор $m_1 : c_0 \times c_0 \to c_0$ наступним чином*

$$m_1(x, y) = (x_1y_1, x_2y_2, \dots).$$

Тоді, відповідно до Означення 7, спряжений до m_1 оператор $m_1^* : \ell_1 \times c_0 \to \ell_1$ матиме вигляд

$$m_1^*(f, x)(y) = f(m_1(x, y)) = f(x_1y_1, x_2y_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i y_i, \qquad \forall\ y \in \ell_\infty.$$

Звідси отримуємо

$$m_1^*(f, x) = (f_1x_1, f_2x_2, \dots),$$

де, очевидно, $(f_1x_1, f_2x_2, \dots) \in \ell_1$.

Приклад 5. *Визначимо білінійний оператор $m_2 : \ell_2 \times \ell_2 \to \ell_2$ наступним чином*

$$m_2(x, y) = (x_1y_1, x_3y_3, \dots, x_{2n-1}y_{2n-1}, \dots).$$

Тоді, відповідно до Означення 7, спряжений до m_2 оператор $m_2^* : \ell_2 \times \ell_2 \to \ell_2$ матиме вигляд

$$m_2^*(f, x)(y) = f(m_2(x, y)) = f(x_1y_1, x_3y_3, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_{2i-1} y_{2i-1}, \qquad \forall\ y \in \ell_2.$$

Звідси отримуємо

$$m_2^*(f, x) = (f_1x_1, 0, f_2x_3, 0, f_3x_5, 0, \dots),$$

де, очевидно, $(f_1x_1, 0, f_2x_3, 0, f_3x_5, 0, \dots) \in \ell_2$.

У наступному прикладі побудуємо продовження визначеного нижче білінійного оператора $m_3 : c_0 \times \ell_2 \to \ell_3$ до третього спряженого $m_3^{***} : \ell_\infty \times \ell_2 \to \ell_3$, використовуючи послідовно Означення 7, 9, 10.

Приклад 6. *Визначимо білінійний оператор $m_3 : c_0 \times \ell_2 \to \ell_3$ наступним чином*

$$m_3(x, y) = (x_1y_1, x_2y_2, \dots).$$

Тоді для спряженого до m_3 оператора $m_3^* : \ell_{\frac{3}{2}} \times c_0 \to \ell_2$ буде виконуватись наступна рівність

$$m_3^*(z', x)(y) = z'(m_3(x, y)) = z'(x_1y_1, x_2y_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i' x_i y_i, \qquad \forall\ y \in \ell_2.$$

Звідси отримуємо

$$m_3^*(z', x) = (z_1' x_1, z_2' x_2, \dots), \qquad (2)$$

де, використовуючи відому нерівність Гельдера

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

неважко показати, що $(z_1' x_1, z_2' x_2, \dots) \in \ell_2$.

Тепер продовжимо оператор m_3^* *до другого спряженого* $m_3^{**} : \ell_2 \times \ell_{\frac{3}{2}} \to \ell_1$. *Дія цього оператора визначається рівністю*

$$m_3^{**}(y'', z')(x) = y''(m_3^*(z', x)), \qquad \forall\, x \in c_0.$$

З рівності (2) *випливає*

$$m_3^{**}(y'', z')(x) = y''(z_1' x_1, z_2' x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i'' z_i' x_i, \qquad \forall\, x \in \ell_\infty.$$

Тому

$$m_3^{**}(y'', z') = (y_1'' z_1', y_2'' z_2', \dots), \qquad (3)$$

де $(y_1'' z_1', y_2'' z_2', \dots) \in \ell_1$, *що легко випливає з нерівності Гельдера.*

Нарешті продовжимо оператор m_3^{**} *до третього спряженого* $m_3^{***} : \ell_\infty \times \ell_2 \to \ell_3$. *Цей оператор буде визначатись рівністю*

$$m_3^{***}(x'', y'')(z') = x''(m_3^{**}(y'', z')), \qquad \forall\, z' \in \ell_{\frac{3}{2}}.$$

З доведеної рівності (3) *випливає*

$$m_3^{***}(x'', y'')(z') = x''(y_1'' z_1', y_2'' z_2', \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'' y_i'' z_i'.$$

Отже,

$$m_3^{***}(x'', y'') = (x_1'' y_1'', x_2'' y_2'', \dots),$$

де аналогічно з нерівності Гельдера випливає, що $(x_1'' y_1'', x_2'' y_2'', \dots) \in \ell_3$.

3 Квазірефлексивні простори

Відомо, що канонічне вкладення

$$\pi : X \ni x \longmapsto \hat{x} \in X''$$

простору X у другий спряжений X'' визначається формулою

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

для всіх функціоналів $\varphi \in X'$.

Образ простору X у другому спряженому X'' при канонічному вкладенні будемо позначати $\pi(X)$.

Означення 13. *Банаховий простір X називають* ***рефлексивним****, якщо виконується рівність*

$$X'' = \pi(X).$$

Означення 14. *Банаховий простір X називають* ***квазірефлексивним порядку*** *n, якщо факторпростір*

$$X''/\pi(X)$$

є n-вимірним простором.

Якщо простір X є квазірефлексивним порядку n, то його другий спряжений X'' з точністю до ізоморфізму можна подати у вигляді

$$X'' = \pi(X) \oplus F,$$

де F – деякий n-вимірний простір.

Наступний результат використовується у дипломній роботі, його доведення можна знайти у статті [2].

Теорема 3 ([2])**.** *Банахів простір X є квазірефлексивним порядку n тоді і тільки тоді, коли X' є квазірефлексивним порядку n.*

У якості прикладу квазірефлексивного простору розглянемо простір Джеймса (позначимо його J), який є квазірефлексивним банаховим простором порядку 1.

Означення 15. *Банаховий простір J (**простір Джеймса**) складається з усіх послідовностей $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і скінченною нормою, яка визначена наступним чином*

$$\|x\| = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(x_{p_{2k-1}} - x_{p_{2k}}\right)^2\right\}^{1/2},$$

де супремум береться по всіх натуральних числах n і всіх строго зростаючих послідовностях $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ натуральних чисел.

Простір Джеймса J має унікальний передспряжений простір в тому сенсі, що якщо X — банаховий простір, для якого X^* ізоморфний до J, то X ізоморфний до J^* (див. [4] та [2, Theorem 3.6, p. 908]).

Щоб визначити простір I, для якого I^* є ізометричним до J, буде використано наступні спеціальні поняття.

Бамп — це послідовність дійсних чисел $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для якої існують обмежений інтервал та дійсне число a такі, що $x_n = a$, якщо n належить згаданому інтервалу, інакше $x_n = 0$. ***Висотою*** бампу називають число a, а його ***знак*** визначається знаком a.

Два бампи є ***неперетинними***, якщо перетин їхніх відповідних інтервалів порожній. Якщо ці інтервали розділені хоча б одним цілим числом, то бампи називаються ***строго неперетинними***. Кажуть, що один бамп ***містить*** інший, якщо його інтервал містить інтервал іншого.

Означення 16. *Простір I — це поповнення нормованого лінійного простору послідовностей зі скінченним носієм, для яких*

$$\|x\| = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} [\![x_k]\!] : x = \sum_{k=1}^{n} x_k\right\}, \tag{4}$$

де функція $[\![\cdot]\!]$ визначаєтьcя за формулою

$$[\![x]\!] = \left(\sum a_i^2\right)^{1/2},$$

якщо x є сумою строго неперетинних бампів з висотами $\{a_i\}$.

Відомо (див. [4]), що якщо $x \in I$ і є сумою строго неперетинних бампів, то

$$[\![x]\!] = \|x\|.$$

У наступних розділах бакалаврської роботи будуть використані результати статті [4], які ми представимо у вигляді таких теорем.

Теорема 4 ([4])**.** *Спряженим до простору I є простір Джеймса J.*

Теорема 5 ([4])**.** *Простір Джеймса J є квазірефлексивним простором порядку 1.*

4 Другий спряжений до $c_0(\mathbb{N}^2)$ простір

Позначимо $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Нехай $c_0(\mathbb{N}^2)$ (відповідно $\ell_\infty(\mathbb{N}^2)$) — простір матриць нескінченного розміру над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), у кожному рядку та стовпці яких стоять послідовності з класичного простору c_0 збіжних до нуля послідовностей (відповідно з класичного простору ℓ_∞ обмежених послідовностей). Завданням цього розділу є побудувати другий спряжений $c_0^{**}(\mathbb{N}^2)$ до простору $c_0(\mathbb{N}^2)$.

Твердження 1. *З точністю до ізоморфізму виконується наступна рівність*

$$c_0^{**}(\mathbb{N}^2) = \ell_\infty(\mathbb{N}^2).$$

Доведення. На першому етапі побудуємо перший спряжений, а саме, покажемо, що з точністю до ізоморфізму виконується $c_0^*(\mathbb{N}^2) = \ell_1(\mathbb{N}^2)$.

Виберемо довільні $x \in c_0(\mathbb{N}^2)$ і $y \in \ell_1(\mathbb{N}^2)$. Ми стверджуємо, що відображення

$$\phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk} \tag{5}$$

є обмеженим лінійним функціоналом на $c_0(\mathbb{N}^2)$. Справді, з нерівності Гельдера для ℓ_p, де $1 \le p < \infty$, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}y_{nk}| \le \|y\|_1 \|x\|_\infty , \tag{6}$$

тобто ряд в (5) абсолютно збіжний. Тому для $x, z \in c_0(\mathbb{N}^2)$ і $\alpha \in \mathbb{K}$ отримаємо

$$\phi_y(x+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(x_{nk}+z_{nk})y_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{nk}y_{nk} = \phi_y(x)+\phi_y(z)$$

та

$$\phi_y(\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(x_{nk}y_{nk}) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk} = \alpha\phi_y(x).$$

Отже, відображення $\phi_y : c_0(\mathbb{N}^2) \to \mathbb{K}$ є лінійним. З нерівності (6) отримуємо

$$|\phi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}y_{nk}| \le \|y\|_1 \|x\|_\infty .$$

Отже,

$$\|\phi_y\| = \sup\left\{|\phi_y(x)| : x \in c_0(\mathbb{N}^2), \|x\|_\infty = 1\right\} \le \|y\| < \infty,$$

тобто, ϕ_y — обмежений лінійний функціонал.

Тепер покажемо, що всі лінійні обмежені функціонали мають вигляд (5), тобто є функціоналами ϕ_y для деякого $y \in \ell_1(\mathbb{N}^2)$.

Нехай ϕ — довільний лінійний обмежений функціонал на $c_0^*(\mathbb{N}^2)$. Визначимо матрицю $e_{nk} \in c_0(\mathbb{N}^2)$, в якій стоїть 1 на перетині n-того рядка та k-того стовпця і 0 на всіх інших місцях. Для кожних $n, k \in \mathbb{N}$, визначимо

$$y_{nk} = \phi(e_{nk}) \tag{7}$$

та $h_{nk} = \operatorname{sgn} y_{nk}$. Для фіксованих натуральних N і K, нехай

$$h_{NK} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} h_{nk} e_{nk}.$$

Тоді $h_{NK} \in c_0(\mathbb{N}^2)$ і $\|h_{NK}\|_\infty = 1$. Легко бачити, що

$$\begin{aligned}\phi(h_{NK}) = \phi\left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} h_{nk} e_{nk}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \phi(h_{nk} e_{nk}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} h_{nk} \phi(e_{nk}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} h_{nk} y_{nk} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} |y_{nk}|.\end{aligned}$$

Відомо, що $|\phi(h_{NK})| \le \|h_{NK}\|_\infty \|\phi\|_*$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} |y_{nk}| = |\phi(h_{NK})| \le \|\phi\|_*,$$

бо $\|h_{NK}\|_\infty = 1$.

Оскільки це виконується для довільних $N, K \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |y_{nk}| = |\phi(e_{nk})| \le \|\phi\|_*, \tag{8}$$

тобто $y = \big(y_{nk}\big)_{k,n\in\mathbb{N}} \in \ell_1(\mathbb{N}^2)$.

Покажемо, що функціонал ϕ заданий як елемент з $c_0^*(\mathbb{N}^2)$ — це елемент ϕ_y вигляду (5), де y визначений формулою (7). За означенням, для будь-якого $x \in c_{00}(\mathbb{N}^2)$ виконується $\phi(x) = \phi_y(x)$, де $c_{00}(\mathbb{N}^2)$ — щільна підмножина в $c_0(\mathbb{N}^2)$ нескінченних матриць, у кожному рядку і стовпці яких стоять фінітні послідовності. Оскільки ϕ, ϕ_y є неперервними функціоналами, то з рівності $\phi = \phi_y$ на щільній підмножині $c_{00}(\mathbb{N}^2)$ випливає ця ж рівність $\phi = \phi_y$ на всьому просторі $c_0(\mathbb{N}^2)$.

Відображення $y \longmapsto \phi_y$ є ізометрією, оскільки $\|\phi_y\|_* \le \|y\|_1$ (це випливає з нерівності Гельдера) і $\|y\|_1 \le \|\phi_y\|_*$ (це випливає з нерівності (8)).

Таким чином ми показали, що $c_0^*(\mathbb{N}^2) = \ell_1(\mathbb{N}^2)$.

Перейдемо до другого етапу доведення, а саме, покажемо, що $\ell_1^*(\mathbb{N}^2) = \ell_\infty(\mathbb{N}^2)$.

Нехай $x \in \ell_1(\mathbb{N}^2)$ і $y \in \ell_\infty(\mathbb{N}^2)$ — довільні елементи відповідних просторів. Ми стверджуємо, що відображення

$$\phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk}$$

є обмеженим лінійним функціоналом на $\ell_1(\mathbb{N}^2)$. З нерівності Гельдера маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}y_{nk}| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 .$$

Лінійність цього функціоналу очевидна.

Нехай ϕ — довільний обмежений лінійний функціонал на $\ell_1(\mathbb{N}^2)$, тобто $\phi \in \ell_1^*(\mathbb{N}^2)$. Аналогічно як вище, визначимо $y_{nk} = \phi(e_{nk})$. Тоді

$$|y_{nk}| = |\phi(e_{nk})| \leq \|\phi\|_* .$$

А це означає, що $y \in \ell_\infty$. Крім того, ми отримали нерівність $\|y\|_\infty \leq \|\phi\|_*$.

Тепер покажемо, що $\phi(x) = \phi_y(x)$ для всіх $x \in \ell_1(\mathbb{N}^2)$. З означення простору $\ell_1(\mathbb{N}^2)$ випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}e_{nk}|$$

збіжний, тому

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}e_{nk}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\phi(e_{nk}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}y_{nk} = \phi_y(x).$$

З нерівності $|\phi(x)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$ випливає $\|\phi\|_* \leq \|y\|_\infty$. Враховуючи доведену вище нерівність $\|y\|_\infty \leq \|\phi\|_*$, отимуємо

$$\|\phi\|_* = \|y\|_\infty .$$

Отже, $\ell_1(\mathbb{N}^2)^* = \ell_\infty(\mathbb{N}^2)$.

Враховуючи результати обох етапів доведення, можна стверджувати, що з точністю до ізоморфізму виконується рівність

$$c_0^{**}(\mathbb{N}^2) = \ell_\infty(\mathbb{N}^2).$$

$\square$

5 Продовження Аренса та регулярність

У цьому розділі розглядається, як на основі ідей Аренса, можна канонічно продовжити m-лінійне відображення на спряжені простори, використовуючи *-слабкі границі.

Означення 17. *Банахів простір X називають* ***регулярним за Аренсом****, якщо кожне неперервне лінійне відображення $A \in \mathcal{L}(X, X')$ є слабко компактним.*

Зокрема, X називають ***симетрично*** *(відповідно* ***антисиметрично****)* ***регулярним****, якщо це справджується для кожного симетричного (відповідно антисиметричного) відображення, тобто якщо*

$$A(x_1)(x_2) = A(x_2)(x_1) \qquad \big(\textit{відповідно } \ A(x_1)(x_2) = -A(x_2)(x_1)\big).$$

Розглянемо два банахових простори X і Y.

Твердження 2. *Простір $X \times Y$ є регулярним тоді й лише тоді, коли кожне відображення з будь-якого з чотирьох просторів*

$$\mathcal{L}(X, X'), \quad \mathcal{L}(X, Y'), \quad \mathcal{L}(Y, X'), \quad \mathcal{L}(Y, Y')$$

є слабо компактним.

Доведення. Припустимо, що всі чотири простори відображень мають цю властивість. Нехай $T = (T_1, T_2) : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$ — деяке неперервне лінійне відображення. Тоді для кожної пари $(x, y) \in X \times Y$ маємо

$$T(x, y) = (T_1(x, 0), 0) + (T_1(0, y), 0) + (0, T_2(x, 0)) + (0, T_2(0, y)).$$

Визначимо наступні оператори:

$$\begin{aligned}
R_1 &: X \longrightarrow X', \quad R_1(x) := T_1(x, 0), \quad x \in X,\\
R_2 &: Y \longrightarrow X', \quad R_2(y) := T_1(0, y), \quad y \in Y,\\
R_3 &: X \longrightarrow Y', \quad R_3(x) := T_2(x, 0), \quad x \in X,\\
R_4 &: Y \longrightarrow Y', \quad R_4(y) := T_2(0, y), \quad y \in Y.
\end{aligned}$$

Оскільки оператори R_j, $j = 1, 2, 3, 4$, є слабо компактними, і справджується рівність

$$T(x, y) = (R_1(x), 0) + (R_2(y), 0) + (0, R_3(x)) + (0, R_4(y))$$

для кожної пари $(x, y) \in X \times Y$, то отримуємо потрібне.

Зворотне твердження очевидне. $\square$

Наслідок 1. *Для банахового простору X справджуються наступні властивості:*

1) якщо X є регулярним, то $X \times X$ також є регулярним;

2) якщо X є регулярним, то $X \times \mathbb{C}$ також є регулярним;

3) якщо X не є рефлексивним, то $X \times X'$ не є регулярним.

Доведення останньої властивості випливає з того, що канонічне вкладення X в X'' не може бути слабко компактним.

Наведемо ще одне еквівалентне означення регулярності банахового простору, яке випливає з Теореми 2.

Означення 18. *Банаховий простір X є* ***регулярним за Аренсом****, якщо для всіх білінійних форм $m : X \times X \to \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$m^{***} = m^{t***t},$$

тобто всі білінійні форми $m : X \times X \to \mathbb{R}$ регулярні за Аренсом.

Спираючись на ідеї Аренса [1], можна стверджувати, що існує канонічний спосіб продовжити елемент $A \in \mathcal{L}(^m X, E)$ до елемента $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(^m X'', E'')$, використовуючи *-слабкі границі.

Справді, нехай задано $x_1'', \ldots, x_n'' \in X''$. Визначимо

$$\widetilde{A}(x_1'', \ldots, x_n'') = w^*\text{-}\lim_{\alpha_1} \cdots w^*\text{-}\lim_{\alpha_m} A(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_m}), \tag{9}$$

де $(x_{\alpha_i}) \subseteq X$ — довільна напрямленість, яка *-слабко збігається до x_i''. Іншими словами, продовження будується поступово по одній змінній за раз, справа наліво, використовуючи *-слабкі границі.

Якщо результат не залежить від порядку взяття *-слабких границь, то кажуть, що відображення A ***має регулярне продовження***.

Еквівалентне означення регулярності банахового простору можна задати використовуючи продовження Аренса.

Означення 19. *Банаховий простір X називають* ***регулярним за Аренсом****, якщо продовження Аренса кожного елемента простору $\mathcal{L}(^2 X)$ інваріантне щодо перестановки границь у формулі (9).*

Зокрема, X ***симетрично (антисиметрично) регулярний****, якщо продовження кожного симетричного (антисиметричного) елементу простору $\mathcal{L}(X)$ інваріанте щодо перестановки границь в (9).*

Нехай X та Y — лінійні простори над полем $\mathbb{K}$. Їх декартовий добуток $X \times Y$ також є лінійним простором над $\mathbb{K}$ зі стандартними операціями

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Розглянемо лінійний функціонал $f \in (X \times Y)'$. Для будь-якого $(x, y) \in X \times Y$ маємо очевидні рівності

$$f(x, y) = f((x, 0) + (0, y)) = f(x, 0) + f(0, y).$$

Позначимо

$$f_X(x) := f(x, 0), \qquad f_Y(y) := f(0, y).$$

Очевидно, що $f_X \in X'$ і $f_Y \in Y'$. Отже, маємо природне відображення

$$\Phi : (X \times Y)' \to X' \times Y', \quad \Phi(f) = (f_X, f_Y).$$

Це відображення є лінійним і бієктивним. Його обернене задається наступним чином

$$(\phi, \psi) \mapsto \big((x, y) \mapsto \phi(x) + \psi(y)\big).$$

Отже, маємо ізоморфізм векторних просторів

$$(X \times Y)' \cong X' \times Y'.$$

Теорема 6. *Банаховий простір X є регулярним тоді і тільки тоді, коли він є одночасно симетрично та антисиметрично регулярним.*

Доведення. Необхідність. Якщо банаховий простір X є регулярним, то всі елементи $A \in \mathcal{L}(X, X')$ є слабко компактними, а, отже, і всі симетричні та антисиметричні елементи $\mathcal{L}(X, X')$ є слабко компактними, з чого випливає симетрична та антисиметрична регулярність X.

Достатність. Нехай X є одночасно симетрично та антисиметрично регулярним. Це означає, що кожне симетричне або антисиметричне відображення $A \in \mathcal{L}(X, X')$ є слабко компактним. Відомо, що кожне відображення $A \in \mathcal{L}(X, X')$ можна представити у вигляді суми

$$A = A_s + A_a,$$

де A_s — симетрична частина A, а A_a — антисиметрична. Оскільки обидві ці частини є слабко компактними за припущенням, то і A є слабко компактним. Тобто простір X — регулярний за Аренсом. □

6 Приклади продовжень білінійних операторів на нерегулярному просторі

6.1 Продовження симетричного білінійного оператора

Нехай X – квазірефлексивний простір порядку 1. Розглянемо білінійний оператор (насправді функціонал) $m : (X \times X') \times (X \times X') \to \mathbb{R}$, який визначений формулою

$$m((x, f), (y, g)) = g(x) + f(y).$$

Метою є поступово продовжити цей оператор до оператора

$$m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R}.$$

Розіб'ємо процес продовження на окремі кроки.

Продовження до m^*. Перший спряжений оператор

$$m^* : \mathbb{R} \times (X \times X') \to X' \times X''$$

діє за правилом

$$m^*\big(c, (x, f)\big)(y, g) = c \cdot m\big((x, f), (y, g)\big) = cf(y) + cg(x).$$

Іншими словами, дія $m^*\big(c, (x, f)\big)$ на елементі $(y, g) \in X \times X'$ задається парою лінійних функціоналів $(c\varphi_f, c\varphi_x) \in X' \times X''$, де

$$\varphi_f(y) := f(y), \qquad \varphi_x(g) := g(x).$$

Бачимо, що $\varphi_f = f$ і $\varphi_x = \pi_1(x)$, де π_1 — канонічне вкладення X в X''.

Продовження до m^{**}. Далі продовжимо m^* до оператора

$$m^{**} : (X'' \times X''') \times \mathbb{R} \to X' \times X'',$$

який визначається так

$$m^{**}\big((y'', g''), c\big)(x, f) = \big(y'', g''\big)\big(m^*\big(c, (x, f)\big)\big) = y''(cf) + g''(c\pi_1).$$

Оскільки простір X є квазірефлексивним порядку 1, то за Теоремою 3 простори X' та X'' також є квазірефлексивними порядку 1. Тому кожен елемент $y'' \in X''$ можна записати у вигляді

$$y'' = \pi_1(y) + h(y'') \cdot \phi,$$

а кожен елемент $g'' \in X'''$ можна подати у вигляді

$$g'' = \pi_2(g) + k(g'') \cdot \tilde{\phi},$$

де π_1 – канонічне вкладення X в X'', π_2 – канонічне вкладення X' в X''' $h \in X'''$ — деякий фіксований функціонал над X'', $k \in X''''$ — деякий фіксований функціонал над X''', $\phi \in X'' \setminus \pi_1(X)$ такий елемент X'', що не належить $\pi_1(X)$ і $X'' = \pi_1(X) \bigoplus span(\phi)$, $\tilde{\phi} \in X''' \setminus \pi_2(X')$ такий елемент X''', що не належить $\pi_2(X')$ і $X''' = \pi_2(X') \bigoplus span(\tilde{\phi})$.

Тоді отримаємо

$$m^{**}\big((y'', g''), c\big)(x, f) = cf(y) + ch(y'') \cdot \phi(f) + cg(x) + ck(g'') \cdot \tilde{\phi}(\pi_1).$$

Цю дію знову можна описати парою операторів $(c\psi_{g''}, c\psi_{y''})$, де

$$\psi_{g''}(x) = g(x) + k(g'') \cdot \tilde{\phi}(\pi_1), \qquad \psi_{y''}(f) = f(y) + h(y'') \cdot \phi(f).$$

Продовження до m^{***}. Нарешті, побудуємо оператор

$$m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R},$$

що визначений формулою

$$m^{***}\big((x'', f''), (y'', g'')\big)(c) = \big(x'', f''\big)\big(m^{**}\big((y'', g''), c\big)\big). \tag{10}$$

Оскільки простори X та X' є квазірефлексивними порядку 1, то елементи $x'' \in X''$ та $f'' \in X'''$ можемо записати наступним чином:

$$x'' = \pi_1(x) + h(x'') \cdot \phi, \qquad f'' = \pi_2(f) + k(f'') \cdot \tilde{\phi},$$

де $h \in X''', k \in X'''', \phi \in X''$, $\tilde{\phi} \in X'''$ — визначені вище функціонали.

Розпишемо детальніше праву сторону рівності (10), використовуючи результати попереднього продовження. Отримаємо

$$\begin{aligned}\big(x'', f''\big)\big(m^{**}\big((y'', g''), c\big)\big) &= (x'', f'')(c\psi_{g''}, c\psi_{y''}) = x''(c\psi_{g''}) + f''(c\psi_{y''}) \\ &= \pi_1(x)(c\psi_{g''}) + h(x'')\phi(c\psi_{g''}) + \pi_2(f)(c\psi_{y''}) + k(f'')\tilde{\phi}(c\psi_{y''}) \\ &= c\big(g(x) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_1) + h(x'')\phi(g) + k(g'')h(x'')\phi(\tilde{\phi} \circ \pi_1) \\ &\quad + f(y) + h(y'')\phi(f) + k(f'')\tilde{\phi}(\pi_1) + k(f'')h(y'')\tilde{\phi}(\phi)\big).\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали

$$\begin{aligned}m^{***}\big((x'', f''), (y'', g'')\big)(c) =& c\big(g(x) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_1) + h(x'')\phi(g) + k(g'')h(x'')\phi(\tilde{\phi} \circ \pi_1) \\ &+ f(y) + h(y'')\phi(f) + k(f'')\tilde{\phi}(\pi_1) + k(f'')h(y'')\tilde{\phi}(\phi)\big).\end{aligned}$$

Останній вираз повністю описує продовження білінійного оператора m до третього спряженого оператора $m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R}$.

Тепер перевіримо, чи даний оператор зберіг властивість симетричності при продовженні.

$$\begin{aligned}m^{***}\big((y'', g''), (x'', f'')\big)(c) =& c\big(f(y) + k(f'')\tilde{\phi}(\pi_1) + h(y'')\phi(f) + k(f'')h(y'')\phi(\tilde{\phi} \circ \pi_1) \\ &+ g(x) + h(x'')\phi(g) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_1) + k(g'')h(x'')\tilde{\phi}(\phi)\big).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m^{***}\big((x'',f''),(y'',g'')\big)(c) - m^{***}\big((y'',g''),(x'',f'')\big)(c) =& c\big(k(g'')h(x'')\big(\phi(\tilde{\phi}\circ\pi_1) - \tilde{\phi}(\phi)\big) \\
&+ k(f'')h(y'')\big(\tilde{\phi}(\phi) - \phi(\phi\,\tilde{\circ}\,\pi_1)\big)
\end{aligned}
$$

З цього випливає, що оператор m при продовженні до m^{***} втратив властивість симетричності.

6.2 Продовження антисиметричного білінійного оператора

Нехай X – знову квазірефлексивний простір порядку 1. Розглянемо антисиметричний білінійний оператор (насправді функціонал) $m : (X \times X') \times (X \times X') \to \mathbb{R}$, що визначений формулою

$$m((x, f), (y, g)) = g(x) - f(y).$$

Метою є поступово продовжити цей оператор до третього спряженого оператора

$$m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R}$$

та переконатися, що антисиметричність у цьому випадку буде порушена.

Аналогічно як і вище, будемо будувати продовження поступово.

Продовження до m^*. Перший спряжений оператор

$$m^* : \mathbb{R} \times (X \times X') \to X' \times X''$$

відповідно до означення діє за правилом

$$m^*\big(c, (x, f)\big)(y, g) = c \cdot m\big((x, f), (y, g)\big) = cg(x) - cf(y).$$

Іншими словами, дія $m^*\big(c, (x, f)\big)$ на елементі $(y, g) \in X \times X'$ задається парою лінійних функціоналів $(c\varphi_f, c\varphi_x) \in X' \times X''$, де

$$\varphi_f(y) := -f(y), \qquad \varphi_x(g) := g(x).$$

Таким чином, бачимо, що $\varphi_f = -f$ і $\varphi_x = \pi(x)$, де π — канонічне вкладення X в X''.

Продовження до m^{**}. Далі продовжимо m^* до оператора

$$m^{**} : (X'' \times X''') \times \mathbb{R} \to X' \times X'',$$

який згідно з означенням визначається за формулою

$$m^{**}\big((y'', g''), c\big)(x, f) = \big(y'', g''\big)\big(m^*\big(c, (x, f)\big)\big) = y''(-cf) + g''(c\pi(x)).$$

За припущенням простір X є квазірефлексивним порядку 1, тому з Теореми 3 випливає, що простори X' та X'' також є квазірефлексивними порядку 1. Тому кожен елемент $y'' \in X''$ можна записати у вигляді

$$y'' = \pi_1(y) + h(y'') \cdot \phi,$$

аналогічно, кожен елемент $g'' \in X'''$ можна подати у вигляді

$$g'' = \pi_2(g) + k(g'') \cdot \tilde{\phi},$$

де $h \in X''', k \in X'''', \phi \in X''$, $\tilde{\phi} \in X'''$ — функціонали, що означені у попередньому підрозділі.

Враховуючи ці представлення, отримаємо

$$m^{**}\big((y'', g''), c\big)(x, f) = -cf(y) - ch(y'') \cdot \phi(f) + cg(x) + ck(g'') \cdot \tilde{\phi}(\pi_1).$$

Цю дію знову можна описати парою операторів $(c\psi_{g''}, c\psi_{y''})$, де

$$\psi_{g''}(x) = g(x) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_2), \qquad \psi_{y''}(f) = -f(y) - h(y'')\phi(f).$$

Продовження до m^{***}. Нарешті, побудуємо оператор

$$m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R},$$

що визначений формулою

$$m^{***}\big((x'', f''), (y'', g'')\big)(c) = \big(x'', f''\big)\big(m^{**}\big((y'', g''), c\big)\big). \tag{11}$$

З того, що простори X та X' є квазірефлексивними порядку 1 випливає, що елементи $x'' \in X''$ та $f'' \in X'''$ можемо подати у вигляді

$$x'' = \pi_1(x) + h(x'')\phi, \qquad f'' = \pi_2(f) + k(f'')\tilde{\phi},$$

.

Розпишемо детальніше праву сторону рівності (11), отримаємо

$$\begin{aligned}
\big(x'', f''\big)\big(m^{**}\big((y'', g''), c\big)\big) &= (x'', f'')(c\psi_{g''}, c\psi_{y''}) = x''(c\psi_{g''}) + f''(c\psi_{y''}) \\
&= \pi_1(x)(c\psi_{g''}) + h(x'')\phi(c\psi_{g''}) + \pi_2(f)(c\psi_{y''}) + k(f'')\tilde{\phi}(c\psi_{y''}) \\
&\quad = c\big(g(x) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_1) + h(x'')\phi(g) + k(g'')h(x'')\phi(\tilde{\phi} \circ \pi_1) \\
&\qquad - f(y) - h(y'')\phi(f) - k(f'')\tilde{\phi}(\pi_1) - k(f'')h(y'')\tilde{\phi}(\phi)\big).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
m^{***}\big((x'', f''), (y'', g'')\big)(c) = &c\big(g(x) + k(g'')\tilde{\phi}(\pi_1) + h(x'')\phi(g) + k(g'')h(x'')\phi(\tilde{\phi} \circ \pi_1) \\
&- f(y) - h(y'')\phi(f) - k(f'')\tilde{\phi}(\pi_1) - k(f'')h(y'')\tilde{\phi}(\phi)\big).
\end{aligned}$$

Останній вираз повністю описує продовження білінійного оператора m до третього спряженого оператора $m^{***} : (X'' \times X''') \times (X'' \times X''') \to \mathbb{R}$. Легко перевірити (аналогічно до попереднього прикладу), що цей оператор при продовженні втратив властивість антисиметричності.

З цього випливає, що якщо X — квазірефлексивний банахів простір порядку 1, то $X \times X'$ не є антисиметрично регулярним.

Висновки

У дипломній роботі досліджено регулярність банахових просторів за Аренсом у контексті білінійних форм. Особливу увагу приділено симетричним та антисиметричним білінійним формам та вивченню питання збереження їхніх властивостей при продовженні на другі спряжені простори.

Було введено нове поняття — антисиметричної регулярності за Аренсом, що дозволяє розширити існуючу класифікацію білінійних форм і точніше описувати ситуації, коли антисиметричність зберігається або втрачається після продовження. Це поняття є природним аналогом симетричної регулярності, однак має самостійну математичну цінність, зокрема в контексті нерегулярних та квазірефлексивних просторів.

У рамках роботи побудовано конкретний приклад, що демонструє втрату антисиметрії при продовженні білінійних форм на спряжені простори. Такий приклад було реалізовано на просторі $X \times X'$, де X — квазірефлексивний простір порядку 1. Отримані результати свідчать про те, що регулярність за Аренсом має застосування при вивченні збереження структурних властивостей операторів.

Дипломна робота не лише узагальнює класичні підходи до аналізу регулярності, а й відкриває нові перспективи дослідження білінійних форм у контексті спряжених просторів, пропонуючи нові поняття та приклади для подальших досліджень.

Список використаної літератури

[1] Arens R. *The Adjoint of a Bilinear Operation.* Proc. Amer. Math. Soc. 1951, **2** (6), 839–848. doi:10.1090/S0002-9939-1951-0045941-1

[2] Civin P., Yood B. *Quasi-reflexive spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 1957, **8** (5), 906–911. doi:10.1090/S0002-9939-1957-0090020-6

[3] James R.C. *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1951, **37** (3), 174–177.

[4] James R.C. *Banach spaces quasi-reflexive of order one*. Studia Math. 1977, **60** (2), 157–177.

[5] Botelho G., Garcia L.A. *Order continuity of Arens extensions of regular multilinear operators.* arXiv:2201.09116 [math.FA]. doi:10.48550/arXiv.2201.09116

[6] Dineen S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. New York, Springer, 1999.

[7] Conway J.B. A Course in Functional Analysis. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 96. New York: Springer-Verlag, 1990.

[8] Iosida K. Functional analysis. New York: Springer-Verlag, 1965.

[9] Rudin W. Real and complex analysis. New York, McGraw-Hill Book Co., 1987.

[10] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Mineola, New York, Dover Publ., 1999.