

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математичного та функціонального аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

на тему “Аналітичне продовження гіпергеометричної функції Горна H_3 ”

Виконала: студентка 4 курсу, групи М-41
спеціальності

111 Математика

(шифр і назва спеціальності)

Філь Я. Р.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Дмитришин Р. І.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ГОРНА ТА ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ	6
1.1. Сімейство гіпергеометричних функцій Горна	6
1.2. Означення гіллястих ланцюгових дробів та їх основні властивості	10
1.3. Принцип відповідності.....	14
РОЗДІЛ 2 ЗОБРАЖЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОРНА H_3 ТА ЇХ ВІДНОШЕНЬ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ.....	15
2.1. Гіллясті ланцюгові дробові розвинення	15
2.2. Области аналітичного продовження гіпергеометричних функцій Горна H_3 та їх відношень	19
РОЗДІЛ 3 АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБОВИХ РОЗВИНЕНЬ	22
ВИСНОВКИ.....	28
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	30
ДОДАТОК А	31

ВСТУП

Актуальність теми. Гіпергеометричні функції Горна є важливим інструментом у сучасній математиці, зокрема в теорії спеціальних функцій, аналізі та їх застосуванні до розв'язання диференціальних рівнянь. Функція Горна H_3 , як представник цього сімейства, має складну аналітичну структуру, що потребує поглибленого дослідження її аналітичного продовження. Аналітичне продовження таких функцій є актуальним завданням, оскільки воно дозволяє обчислювати їх значення в ширших областях, і, отже, застосовувати їх до ширшого кола задач у математиці та фізиці. Одним із перспективних підходів до цього є використання гіллястих ланцюгових дробів, розвинення в які забезпечують ефективне зображення функцій та їх відношень. Водночас, сучасні дослідження у цій галузі залишають простір для вдосконалення методів обчислення та аналізу таких розвинень. Актуальність роботи зумовлена необхідністю розробки нових алгоритмів для обчислення гіллястих ланцюгових дробів, що сприяють кращому розумінню інструментарію аналітичного продовження гіпергеометричної функції H_3 .

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є гіпергеометричні функції Горна H_3 та їх гіллясті ланцюгові дроби розвинення. Предметом дослідження є властивості гіпергеометричних функцій Горна, властивості та ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробових розвинень, алгоритми обчислення гіпергеометричних функцій Горна H_3 та їх гіллястих ланцюгових дробових наближень.

Мета і завдання дослідження. Метою бакалаврської роботи є аналіз аналітичного продовження (гіллястих ланцюгових дробових розвинень) гіпергеометричної функції Горна H_3 та її відношень і розробка алгоритмів їх обчислення. Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання:

1. Розглянути сімейство гіпергеометричних функцій Горна та їх основні властивості.

2. Розглянути означення і властивості гіллястих ланцюгових дробів, зокрема принцип відповідності.
3. Розглянути зв'язок між гіпергеометричними функціями Горна H_3 та їх відношеннями і гіллястими ланцюговими дробами.
4. Розглянути області аналітичного продовження функції H_3 та її відношень.
5. Розробити алгоритми обчислення гіпергеометричних функцій Горна H_3 та їх гіллястих ланцюгових дробових наближень.
6. Проаналізувати гіллясті ланцюгові дробові розвинення гіпергеометричної функції Горна H_3 та їх відношень.

Стан наукової розробки. Питання аналітичного продовження гіпергеометричних функцій Горна активно досліджувалися в працях таких учених, як Е. Гурн, Дж. Аппель, П. Камп де Феріє, які заклали основи теорії цих функцій. Гіллясті ланцюгові дроби як інструмент аналізу спеціальних функцій розглядалися в роботах Д.І. Боднара, Т.М Антонової та Р.І. Дмитришина та інших, де було показано їх ефективність для представлення складних функцій. Проте сучасні дослідження зосереджені переважно на загальних аспектах гіллястих ланцюгових дробів, тоді як конкретне застосування до функції H_3 залишається недостатньо вивченим. Питання алгоритмізації обчислень наближень гіллястих ланцюгових дробів також потребує подальшого розвитку, що підтверджує актуальність даної роботи.

Методи дослідження. У роботі використано комплексний підхід, що включає **аналіз і синтез** для вивчення структурних властивостей гіпергеометричної функції Горна H_3 , **індуктивно-дедуктивний метод** для формулювання та доведення теорем про аналітичне продовження та **чисельні методи** для розробки та реалізації алгоритмів обчислення гіллястих ланцюгових дробів.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи мають теоретичне значення для розвитку теорії гіпергеометричних функцій та гіллястих ланцюгових дробів. Запропонований алгоритм обчислення гіллястих ланцюгових дробових розвинень може бути використаний у чисельних методах

для моделювання складних математичних об'єктів. Отримані результати можуть знайти застосування в подальших дослідженнях спеціальних функцій, а також у прикладних задачах фізики та інженерії, де потрібне точне представлення функцій.

Структура роботи. Бакалаврська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Робота містить 1 таблицю та 5 рисунків. Загальний обсяг роботи становить 35 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ГОРНА ТА ГІЛЛЯСТІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

1.1. Сімейство гіпергеометричних функцій Горна

Гіпергеометрична функція може бути визначена з допомогою ряду Гауса:

$$F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (1.1)$$

Подвійний степеневий ряд визначається [1]:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \quad (1.2)$$

є гіпергеометричною серією, якщо

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{mn}} = f(m, n)$$

і

$$\frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}} = g(m, n) \quad (1.3)$$

є раціональними функціями від m і n .

Для спеціального гіпергеометричного ряду, A_{mn} є гамма-продуктом, тобто він має вигляд:

$$\gamma_{mn} = \prod_i \frac{\Gamma(\alpha_i + u_i m + v_i n)}{\Gamma(\alpha_i)}, \quad (1.4)$$

де α_i – довільні (дійсні або комплексні) константи, u_i та v_i довільні цілі числа, які можуть бути додатними, від'ємними або нульовими. Очевидно, що f та g мають задовольняти:

$$f(m, n)g(m + 1, n) = f(m, n + 1)g(m, n) \quad (1.5)$$

для всіх $m, n = 0, 1, 2, \dots$, а отже тотожно для m та n оскільки кожна зі сторін є $\frac{A_{m+1, n+1}}{A_{mn}}$; і легко побачити, що будь-яка пара раціональних функцій від m та n , які задовольняють (4), генерує гіпергеометричний ряд.

Найзагальніша форма A_{mn} має вигляд:

$$A_{mn} = R(m, n)\gamma_{mn}a^m b^n, \quad (1.6)$$

де R — це фіксована раціональна функція від m та n , a та b — константи, а γ_{mn} — гамма-продукт. Це еквівалентно твердженню, що найзагальніший гіпергеометричний ряд двох змінних отримується з операції раціонального диференціального оператора:

$$R\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

для гіпергеометричного ряду типу:

$$\sum \gamma_{mn}(ax)^m (by)^n.$$

Горн визначає [1]:

$$f(m, n) = \frac{F(m, n)}{F'(m, n)}, \quad g(m, n) = \frac{G(m, n)}{G'(m, n)} \quad (1.7)$$

де F, F', G, G' — поліноми від m і n відповідних степенів p, p', q, q' . Припускається, що F' має множник $m + 1$, а G' — множник $n + 1$; F та F' не мають спільних множників, крім, можливо, $m + 1$, а G та G' не мають множників, крім, можливо, $n + 1$. Найвище з чотирьох чисел p, p', q, q' є порядком гіпергеометричного ряду.

Існує 14 повних серій для випадку, коли $p = p'$ та $q = q' = 2$ [1]:

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} x^m y^n, \quad (1.8)$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!} x^m y^n, \quad (1.9)$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} x^m y^n, \quad (1.10)$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!} x^m y^n, \quad (1.11)$$

$$G_1(\alpha, \beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!n!} x^m y^n, \quad (1.12)$$

$$G_2(\alpha, \alpha', \beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!n!} x^m y^n, \quad (1.13)$$

$$G_3(\alpha, \alpha', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2n-m}(\alpha')_{2m-n}}{m!n!} x^m y^n, \quad (1.14)$$

$$H_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_{m+n}(\gamma)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n, \quad (1.15)$$

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n(\delta)_n}{(\epsilon)_n m! n!} x^m y^n, \quad (1.16)$$

$$H_3(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n, \quad (1.17)$$

$$H_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\delta)_n m! n!} x^m y^n, \quad (1.18)$$

$$H_5(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_{n-m}}{(\gamma)_n m! n!} x^m y^n, \quad (1.19)$$

$$H_6(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_{n-m}(\gamma)_n}{m! n!} x^m y^n, \quad (1.20)$$

$$H_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n, \quad (1.21)$$

Існує 20 злитих рядів, які є граничними формами повних рядів і для яких $p \leq p' = 2, q \leq q'$ і p, q не є одночасно рівними 2:

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.22)$$

$$\Phi_2(\beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta)_m(\beta')_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad (1.23)$$

$$\Phi_3(\beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad (1.24)$$

$$\Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m(\gamma')_n m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.25)$$

$$\Psi_2(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m! n!} x^m y^n \quad (1.26)$$

$$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.27)$$

$$\Xi_2(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m (\beta)_n}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.28)$$

$$\Gamma_1(\alpha, \beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\alpha)_m (\beta)_{n-m} (\beta')_{m-n}}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.29)$$

$$\Gamma_2(\beta, \beta', x, y) = \sum \frac{(\beta)_{n-m} (\beta')_{m-n}}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad (1.30)$$

$$H_1(\alpha, \beta, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_{m+n}}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.31)$$

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_m (\gamma)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.32)$$

$$H_3(\alpha, \beta, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_m}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1, \quad (1.33)$$

$$H_4(\alpha, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n} (\gamma)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n, \quad (1.34)$$

$$H_5(\alpha, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n}}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n, \quad (1.35)$$

$$H_6(\alpha, \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_{m+n} m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1/4, \quad (1.36)$$

$$H_7(\alpha, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_m (\delta)_n m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1/4, \quad (1.37)$$

$$H_8(\alpha, \beta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n} (\beta)_{n-m}}{m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1/4, \quad (1.38)$$

$$H_9(\alpha, \beta, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n} (\beta)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1/4, \quad (1.39)$$

$$H_{10}(\alpha, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{2m-n}}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |x| < 1/4, \quad (1.40)$$

$$H_{11}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y) = \sum \frac{(\alpha)_{m-n} (\beta)_n (\gamma)_n}{(\delta)_m m! n!} x^m y^n \quad |y| < 1. \quad (1.41)$$

F_1 - F_4 (1.8)–(1.11) – є функціями Аппеля. Ряди (1.22)–(1.28) є рядами Гумберта.

Гіпергеометричні функції мають широке застосування. Функції Горна використовуються для розв'язання багатовимірних диференціальних рівнянь, аналізу хвильових процесів і потенціалів у фізиці, а також у теорії спеціальних функцій. Функції Аппеля застосовуються в математичній фізиці для моделювання електромагнітних і гравітаційних полів, обчислення інтегралів ймовірності та в задачах з багатовимірними змінними. Функції Гумберта корисні у космології, теорії відносності, математичному моделюванні плазми та викривлених просторів. В економіці ці функції можуть бути використані для моделювання фінансових ризиків, аналізу складних систем із взаємодією змінних, багатофакторних регресій, а також в теорії оптимізації і ймовірності.

1.2. Означення гіллястих ланцюгових дробів та їх основні властивості

Якщо i_1, i_2, \dots, i_k – деякий набір індексів ($i_p = \overline{1,2}$, $p = \overline{1,k}$), то з метою скорочення запису подалі використовується мультиіндекс [2]

$$i(k) = i_1 i_2 \dots i_k \quad (1.42)$$

Нехай $b_0, b_{i(k)}, a_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, i_k = \overline{1,2}$) – комплексні числа, $z_{i(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, i_k = \overline{1,2}$) – комплексні числа, причому $a_{i(k)} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, i_k = \overline{1,2}$) і нехай

$$\begin{aligned} t_0(z_1, z_2) &= b_0 + z_1 + z_2, \\ t_{i(k)}(z_{i(k)1}, z_{i(k)2}) &= a_{i(k)}(b_{i(k)} + z_{i(k)1} + z_{i(k)2})^{-1} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, i_k = \overline{1,2}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

є деяка сукупність 2-мірні дробово-лінійних відображень. Позначивши $z_{i(k)}^{(r)}$ вектор з \mathbb{C}^p ($p = N^r, r \in \mathbb{N}$) виду

$$z_{i(k)}^{(r)} = \left(z_{i(k)\underbrace{11\dots1}_r}, z_{i(k)\underbrace{1\dots12}_r}, \dots, z_{i(k)\underbrace{22\dots2}_r} \right) \quad (1.44)$$

зокрема

$$z^{(r)} = \left(z_{\underbrace{11\dots1}_r}, z_{\underbrace{1\dots12}_r}, \dots, z_{\underbrace{22\dots2}_r} \right)$$

де компоненти вектора (2.3) $z_{i(k)j(r)} (j_s = \overline{1,2}, s = \overline{1,r})$ природнім чином упорядковані, тобто $z_{i(k)j(r)} < z_{i(k)m(r)}$, якщо $n(r) < m(r)$ і $n(r) < m(r)$, якщо $n_1 < m_1$ або існує такий індекс s ($1 \leq s < r$), що $n_p = m_p$ ($p = \overline{1,s}$) і $n_{s+1} < m_{s+1}$.

Нехай

$$\omega_{i(k)} = t_{i(k)} \left(z_{i(k)}^{(1)} \right), \quad (i_k = \overline{1,2}, \quad k = 1, 2, \dots). \quad (1.45)$$

Визначимо $\omega_{i(k)}^{(r)}$ згідно (2.3). Тоді за аналогією з розглянемо композиції 2-мірних дробово-лінійних відображень

$$T_0(z^{(1)}) \equiv t_0(z^{(1)}), \quad T_k(z^{(k+1)}) = T_{k-1}(\omega^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.46)$$

і послідовність $\{T_k(0)\}$, де 0 отримується з відповідного простору. Обчислимо явні вирази для $T_k(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Маємо

$$T_0(0) = t_0(0) = b_0,$$

$$T_1(z^2) = t_0(\omega^{(1)}) = t_0(t_1(z_1^{(1)}), \dots, t_2(z_2^{(1)})).$$

Тому

$$T_1(0) = t_0(t_1(0), \dots, t_2(0)) = b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}}.$$

Далі

$$\begin{aligned} T_2(z^{(3)}) &= T_1(\omega^{(2)}) = t_0(t_1(\omega_1^{(1)}), \dots, t_2(\omega_2^{(1)})) \\ &= t_0\left(t_1\left(t_{11}(z_{11}^{(1)}), \dots, t_{12}(z_{12}^{(1)})\right), \dots, t_2\left(t_{21}(z_{21}^{(1)}), \dots, t_{22}(z_{22}^{(1)})\right)\right). \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} T_2(0) &= t_0(t_1(t_{11}(0), \dots, t_{12}(0)), \dots, t_2(t_{21}(0), \dots, \\ & t_{22}(0))) = b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{a_{i_1 i_2}}{b_{i_1 i_2}}} \end{aligned}$$

і т.д, використовуючи позначення (1.43), маємо

$$T_k(0) = b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{a_{i_2}}{b_{i_2} + \dots + \sum_{i_k=1}^2 \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}}} \quad (1.47)$$

Гіллястим ланцюговим дробом з 2 гілками розгалудження називається вираз

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i_1}}{b_{i_1} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{a_{i_2}}{b_{i_2} + \dots + \sum_{i_k=1}^2 \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} + \dots}} \quad (1.48)$$

Яке компактно запишемо у вигляді

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^2 \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \dots + \sum_{i_k=1}^2 \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} + \dots \quad (1.49)$$

або у вигляді

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}. \quad (1.50)$$

Перетворення ГЛД, яке не змінює величин відповідних дробів, називається еквівалентним. Гіллясті ланцюгові дроби, у яких усі відповідні апроксимації збігаються, називаються еквівалентними.

Довільне еквівалентне перетворення ланцюгового дроби можна записати у вигляді:

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \rho_{k-1} \rho_k}{b_k \rho_k} \quad (1.51)$$

де $\rho_0 = 1$, $\rho_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$) – довільні комплексні числа.

Можна перевірити, що ГЛД

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)} \rho_{i(k-1)} \rho_{i(k)}}{b_{i(k)} \rho_{i(k)}} \quad (1.52)$$

де $\rho_{i(0)} = 1$, $\rho_{i(k)} \neq 0 (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots)$ – довільні комплексні числа, еквівалентні ГЛД. Якщо позначити n – ні придатні дроби (2.9) і (2.11) через f_n і f'_n відповідно, то виконуються тотожності

$$f_n = f'_n \quad (n = 0,1,2, \dots) \quad (1.53)$$

Довільне еквівалентне перетворення ланцюгового дроби можна також записати у вигляді:

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{a_{i(k)}^*}{b_{i(k)}^*} \quad (1.54)$$

і позначимо f_k^*, \tilde{f}_k^* його k -ті придатні дроби, відповідно. Згідно з означенням еквівалентності повинна виконуватися рівність

$$f_k^* = \tilde{f}_k^* \quad (k = 0,1,2, \dots).$$

Але цього недостатньо, щоб дріб прийняв вигляд (1.54) при деяких значеннях $\rho_{i(k)} (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots)$

Якщо в числа $\rho_{i(k)}$ – підібрати спеціальним чином, то ГЛД можна привести до більш простого вигляду, не змінюючи величини її апроксимації.

Так, якщо всі $a_{i(k)} \neq 0 (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots)$ то, підставляючи в (1.55) $\rho_{i(k)}$, послідовно знайдемо із системи рівнянь [2]:

$$a_{i(k)} \rho_{i(k-1)} \rho_{i(k)} = 1, \quad (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots, \rho_{i(0)} = 0), \quad (1.56)$$

отримаємо ГЛД (вигляд часткових дроби), еквівалентний (1.52), усі часткові чисельники якого дорівнюють одиниці. Рішення системи рівнянь записується у вигляді:

$$\rho_{i(k)} = \prod_{p=1}^k (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}}, \quad (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots) \quad (1.57)$$

Таким чином, якщо всі $a_{i(k)} \neq 0$, то, підставивши в (2.54) $\rho_{i(k)}$, обчислені за формулами (1.57), отримаємо ГЛД:

$$b_0 + D_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{1}{d_{i(k)}} \quad (1.58)$$

де

$$d_{i(k)} = b_{i(k)} \prod_{p=1}^k (a_{i(p)})^{(-1)^{k+p-1}} \quad (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2 \dots) \quad (1.59)$$

Якщо $b_{i(k)} \neq 0$ ($i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots$), то підставивши в (1.54)

$$\rho_{i(k)} = (b_{i(k)})^{-1}, \quad (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots) \quad (1.60)$$

$$b + D_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{c_{i(k)}}{1} \quad (1.61)$$

де

$$c_{i(k)} = a_{i(k)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k-1)}^{-1} = 1, \quad (i_k = \overline{1,2}, k = 1,2, \dots, b_{i(0)} = 0).$$

1.3. Принцип відповідності

Кожному регулярному неперервному C -дробу відповідає однозначно визначений степеневий ряд [3]

$$L = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (1.62)$$

Порядок відповідності n -го наближення $f_n(z)$ визначається у такий спосіб $\nu_n = n + 1$, таким чином, розкладання Тейлора для $f_n(z)$ збігається з L до i включно до члена $c_n z^n$, тобто

$$f_n(z) = 1 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \gamma_{n+1}^{(n)} z^{n+1} + \dots \quad (1.63)$$

Два регулярні C -доби

$$1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots, \quad a_n \neq 0 \quad (1.64)$$

та

$$1 + \frac{a_1^\dagger z}{1} + \frac{a_2^\dagger z}{1} + \frac{a_3^\dagger z}{1} + \dots, \quad a_n^\dagger \neq 0 \quad (1.64')$$

є відповідними одному і тому ж степеневому ряду тоді, коли

$$a_n = a_n^\dagger, \quad n = 1,2,3 \dots \quad (1.65)$$

РОЗДІЛ 2

ЗОБРАЖЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОРНА H_3 ТА ЇХ ВІДНОШЕНЬ ГІЛЛЯСТИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

2.1. Гіллясті ланцюгові дробові розвинення

Для побудови розкладу гіпергеометричних рядів однієї або кількох змінних використовуються рекурентні співвідношення між цими рядами:

$$H_3(a, b; c; z) = H_3(a + 1, b; c; z, w) - \frac{2(a + 1)}{c} z H_3(a + 2; b; c + 1; z, w) - \frac{b}{c} w H_3(a + 1, b + 1; c + 1, z, w) \quad (2.1)$$

$$H_3(a, b; c; z, w) = H_3(a, b + 1; c; z, w) - \frac{a}{c} w H_3(a + 1, b + 1; c + 1, z, w), \quad (2.2)$$

$$H_3(a, b; c; z, w) = \frac{a}{2c} H_3(a + 1, b; c + 1; z, w) + \frac{b}{2c} H_3(a, b + 1; c + 1; z, w) + \frac{2c - a - b}{2c} H_3(a, b; c + 1; z, w), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} H_3(a, b; c; z, w) &= H_3(a + 1, b; c + 1; z, w) - \frac{(2c - a)(a + 1)}{c(c + 1)} z H_3(a + 2, b; c; z, w) \\ &\quad - \frac{b(c - a)}{c(c + 1)} w H_3(a + 1, b + 1; c + 2; z, w) \end{aligned}$$

Лемма 2.1.

Нехай задано гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД)

$$f_n(z, w) = d_0(z, w) + D_{k=1}^n \sum_{i_1=1}^2 \frac{c_{i(k)}(z, w)}{d_{i(k)}(z, w)}$$

і називається n -м наближенням ГЛД. Альтернативне представлення через хвости $Q_{i(k)}^{(n)}(z, w)$ дозволяє ефективно обчислювати апроксиманти для кожного n [4].

$$d_0(z, w) = 1 + \left(\frac{\beta + 1 - \alpha}{\gamma} w - \frac{2(2\gamma - \alpha)}{\gamma} z \right) \delta_{i_0}^1$$

$$c_1(z, w) = - \frac{(2\gamma - \alpha + \delta_{i_0}^2 - 2(2\gamma - \alpha - \beta)w\delta_{i_0}^2)(\alpha + \delta_{i_0}^1)z}{\gamma(\gamma + 1)}$$

$$c_2(z, w) = - \frac{(\gamma - \alpha + \delta_{i_0}^2)(\beta + \delta_{i_0}^2)(1 - 4z)w}{\gamma(\gamma + 1)}$$

і для $k = 1$ і $i_1 = 1, 2$:

$$d_{i(k)}(z, w) = 1 + \left(\frac{(\beta - \alpha + 1 + \sum_{r=0}^{k-1} (\delta_{i_r}^2 - \delta_{i_r}^1))w}{c + k} - \frac{2(2\gamma - \alpha + k + \sum_{r=0}^{k-1} \delta_{i_r}^2)z}{\gamma + k} \right) \delta_{i_k}^2$$

$$c_{i(k),1}(z, w) =$$

$$= - \frac{(2\gamma - \alpha + k + \sum_{r=0}^k \delta_{i_r}^2 - 2(2\gamma - \alpha - \beta + k)z\delta_{i_k}^2)(\alpha + \sum_{r=0}^k \delta_{i_r}^1)z}{(\gamma + k)(\gamma + k + 1)}$$

$$c_{i(k),2}(z, w) = - \frac{(\gamma - \alpha + \sum_{r=0}^k \delta_{i_r}^2)(\beta + \sum_{r=0}^k \delta_{i_r}^2)(1 - 4z)w}{(\gamma + k)(\gamma + k + 1)}$$

Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ апроксиманта $f_n(z, w)$ скінченного ГЛД може бути записана у вигляді [4]:

$$f_n(z, w) = d_0(z, w) + \sum_{i_1=1}^2 \frac{c_{i(1)}(z, w)}{Q_{i(k)}^{(n)}(z, w)}$$

де хвости $Q_{i(k)}^{(n)}(z, w)$, $i(k) \in \mathcal{J}$, $1 \leq k \leq n$, визначаються рекурентно

$$Q_{i(n)}^{(n)}(z, w) = d_{i(n)}(z, w), \text{ для } n \geq 1$$

$$Q_{i(n)}^{(n)}(z, w) = d_{i(k)}(z, w) + \sum_{i_{k+1}=1}^2 \frac{c_{i(k+1)}(z, w)}{Q_{i(k+1)}^{(n)}(z, w)},$$

$$i(k) \in \mathcal{J}, 1 \leq k \leq n - 1, n \geq 2$$

Розглянемо випадок $n = 1$:

$$f_1(z, w) = d_0(z, w) + \sum_{i_1=1}^2 \frac{c_{i(1)}(z, w)}{d_{i(1)}(z, w)}$$

де $Q_{i(1)}^{(1)}(z, w) = d_{i(1)}(z, w)$ за визначенням, що збігається з поданим виразом. Для $n = 2$:

$$f_2(z, w) = d_0(z, w) + \sum_{i_1=1}^2 \frac{c_{i(1)}(z, w)}{d_{i(1)}(z, w) + \sum_{i_2=1}^2 \frac{c_{i(2)}(z, w)}{d_{i(2)}(z, w)}}$$

де $Q_{i(1)}^{(2)}(z, w) = d_{i(1)}(z, w) + \sum_{i_2=1}^2 \frac{c_{i(2)}(z, w)}{Q_{i(2)}^{(2)}(z, w)}$, а $Q_{i(2)}^{(2)}(z, w) = d_{i(2)}(z, w)$ за

визначенням.

Загалом, для будь-якого n , апроксиманта f_n будується через рекурентні хвости $Q_{i(k)}^{(n)}$.

Доведення.

Дійсно, покажемо, наприклад, справедливість співвідношення (2.3).

$$\begin{aligned} H_3(a, b; c; z, w) - H_3(a+1, b; c+1; z, w) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2m+n} (b)_n z^m w^n}{(c)_{m+n} m! n!} \\ &= \sum_{\substack{m \geq 0, n \geq 0 \\ m+n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{a}{c} - \frac{a+2m+n}{c(c+m+n)} \right) \frac{(a+1)_{2m+n-1} (b)_n z^m w^n}{(c+1)_{m+n-1} m! n!} \\ &= - \sum_{\substack{m \geq 0, n \geq 0 \\ m+n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{m(2c-a) + n(c-a)}{c(c+m+n)} \right) \frac{(a+1)_{2m+n-1} (b)_n z^m w^n}{(c+1)_{m+n-1} m! n!} \\ &= - \frac{(2c-a)(a+1)}{c(c+1)} z \sum_{m \geq 1, n \geq 0}^{\infty} \left(\frac{(a+2)_{2m+n-2} + (b)_n}{(c+2)_{m+n-1}} \right) \frac{(a+1)_{2m+n-1} (b)_n z^{m-1} w^n}{(c+1)_{m+n-1} (m-1)! n!} \\ &\quad - \frac{b(c-a)}{c(c+1)} w \sum_{m \geq 0, n \geq 1}^{\infty} \frac{(a+1)_{2m+n-1} + (b+1)_{n-1} z^m w^{n-1}}{(c+2)_{m+n-1} m! (n-1)!} \end{aligned}$$

Далі безпосередньо отримуємо співвідношення (2.3).

Зі співвідношень (2.1) і (2.2) випливає

$$\begin{aligned}
& H_3(a+1, b; c; z, w) \\
&= H_3(a, b+1; c, z, w) + \frac{2(a+1)}{c} z H_3(a+2, b; c+1; z, w) \\
&+ \frac{b-a}{c} w H_3(a+1, b+1; c+1; z, w)
\end{aligned}$$

Решта співвідношень доводиться в такий самий спосіб.

Розвинення. Еквівалентність ГЛД та їх побудова

ГЛД вважаються еквівалентними, якщо їхні апроксиманти збігаються, $f_n(z, w) = f_n^*(z, w)$ для всіх $n \geq 1$. Наприклад, ГЛД:

$$d_0(z, w) + D_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^2 \frac{c_{i(k)}(z, w) \rho_{i(k-1)} \rho_{i(k)}}{d_{i(k)}(z, w) \rho_{i(k)}} \quad (2.4)$$

де $\rho_{i(0)} = 1$, а $\rho_{i(k)}$ – ненульові комплексні числа, є еквівалентним до вихідного ГЛД (1). Це пояснюється тим, що множники $\rho_{i(k)}$ у чисельнику та знаменнику компенсуються при обчисленні апроксимант, зберігаючи їх значення [4].

Позначимо функцію:

$$R_k(a, b; c; z, w) = \frac{H_3(a, b; c; z, w)}{H_3(a + \delta_k^1, b + \delta_k^2; c + 1; z, w)}, \quad k = 1, 2, \quad (2.5)$$

де δ_k^j – дельта Кронекера.

Теорема 2.1. Збіжність ГЛД до формальних розкладів

Нехай задано функцію $H_3(a; b; c; z, w)$ та її рекурентні співвідношення. Тоді формальні розклади для виразів

$$(1 - 4z_1 \delta_{i_0}^2) R_{i_0}(a; b; c; z, w), \quad i_0 = 1, 2$$

можуть бути представлені у вигляді гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) з елементами, визначеними вище [4].

Доведення.

Доведення спирається на побудову ГЛД, який апроксимує $R_{i_0}(a, b, c; z, w)$.

Використовуючи рекурентні співвідношення для $H_3(a; b; c; z, w)$ можна показати, що апроксиманти $f_n(z, w)$ збігаються до співвідношень R_{i_0} за відповідних умов на параметри $a; b; c; z, w$. Елементи $d_{i(k)}, c_{i(k),j}$ сконструйовані так, щоб відображати структуру H_3 , а множник $(1 - 4z_1\delta_{i_0}^2)$ враховується при нормалізації розкладу.

2.2. Області аналітичного продовження гіпергеометричних функцій Горна H_3 та їх відношень

Метод ґрунтується на ідеї, що області аналітичного продовження спеціальних функцій співпадають з областями збіжності їхніх розгалужених розкладів у вигляді неперервних дробів. Розгалужений неперервний дріб вважається збіжним, якщо послідовність його наближень сходиться до скінченного ліміту, який і називається його значенням. Якщо елементи дробу— функції, визначені в області $\mathfrak{D}(\mathfrak{D} \subset \mathbb{C})$, і послідовність наближень сходиться рівномірно на підмножині $\mathfrak{E}(\mathfrak{E} \subset \mathfrak{D})$, такий дріб називають рівномірно збіжним на \mathfrak{E} . У разі рівномірної збіжності на будь-якій компактній підмножині \mathfrak{D} говорять про рівномірну збіжність дробу на всіх компактних множинах \mathfrak{D} [5].

Теорема 2.2. Нехай $i_0 = 1$. Нехай α, β, γ — дійсні константи, які задовольняють нерівності

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \gamma \geq \alpha, \quad \gamma \geq \beta$$

Тоді, ГЛД рівномірно сходиться на кожній компактній підмножині області

$$\mathfrak{D}_{\kappa_1; \kappa_2; \tau_1, \tau_2} = \mathfrak{D}_{\kappa_1; \kappa_2} \bigcup \mathfrak{D}_{\tau_1, \tau_2},$$

де

$$\mathfrak{D}_{\kappa_1; \kappa_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2: 4\kappa_r(1 - \cos(\arg z_r))|z_r| < \cos^2(\arg z_r), \\ |\arg z_r| < \frac{\pi}{2}, \quad r = 1, 2, \arg z_1 = \arg z_2, \quad 2|z_1| \geq |z_2| \end{array} \right\}$$

де

$$\kappa_1 = \sup_{i(k) \in \mathcal{J}, k \geq 0} c_{i(k), 1}^1, \quad \kappa_2 = \sup_{i(k) \in \mathcal{J}, k \geq 0} c_{i(k), 2}^1$$

i

$$\mathfrak{D}_{\tau_1, \tau_2} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2: |z_r| < \tau_r, \quad r = 1, 2\}$$

де τ_1 і τ_2 такі позитивні числа що

$$\begin{aligned} 16\zeta\tau_1(1 + 2\tau_2) &\leq 1 - \eta(4\tau_1 + \tau_2), \\ 8\zeta(1 + 4\tau_1)\tau_2 &\leq (1 - \eta(4\tau_1 + \tau_2))^2 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \zeta &= \sup_{i(k) \in \mathcal{J}, k \geq 0} \max \left\{ \frac{c_{i(k),1}^1}{2}, \frac{c_{i(k),1}^2}{4}, c_{i(k),2}^1, \frac{c_{i(k),2}^2}{2} \right\} \\ \eta &= \sup_{i(k) \in \mathcal{J}, k \geq 0} \max \left\{ \frac{|d_{i(k)}^1|}{4}, |d_{i(k)}^2| \right\} \end{aligned}$$

до функції $f^{i_0}(\mathbf{z})$, голоморфної в області $\mathfrak{D}_{\kappa_1; \kappa_2; \tau_1, \tau_2}$.

Функція $f^{i_0}(\mathbf{z})$ є аналітичним продовженням функції з лівої частини (2) в області .

Зазначимо, що значення $\kappa_1, \kappa_2, \zeta, \eta$ існують і є скінченними, оскільки існують скінченні межі коефіцієнтів. Умови (14) правильні, наприклад, якщо

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{2}{21\tau + \sqrt{128\tau + 441\tau^2}}, \quad \tau = \max\{\zeta, \eta\}$$

Теорема 2.3 [5]. Нехай $i_0 = 1$ (або $i_0 = 2$) і нехай

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i(1)}}{1 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i(2)}}{1 + \dots}}$$

бути розгалуженим неперервним дріб, елементи якого такі, що

$$|a_{i(k)}| \leq \frac{q_{i(k)}(1 - q_{i(k-1)})}{2}, \quad i(k) \in \mathcal{J}, \quad k \geq 1,$$

де

$$q_{i(0)} = 0, \quad 0 < q_{i(k)} < 1, \quad i(k) \in \mathcal{J}, \quad k \geq 1.$$

Тоді розгалужений ланцюговий дріб (17) збігається, і, крім того, значення (17) та його апроксимантів знаходяться в замкнутому кругу

$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z - b_0| \leq 1\}.$$

Доказ. Покажемо, що мажоранта (17) є розгалуженим неперервним дрібом,

$$|b_0| + \sum_{i_1=1}^2 \frac{-q_{i(1)}/2}{1 + \sum_{i_1=1}^2 \frac{-q_{i(2)}(1 - q_{i(1)})/2}{1 + \sum_{i_3=1}^2 \frac{-q_{i(3)}(1 - q_{i(2)})/2}{1 + \dots}} \quad (2.20)$$

Нехай $F_{i(n)}^{(n)} = \hat{F}_{i(n)}^{(n)} = 1$, $i(n) \in \mathcal{J}$, $n \geq 1$

$$F_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^2 \frac{a_{i(k+1)}}{1 + \sum_{i_{k+2}=1}^2 \frac{a_{i(k+2)}}{1 + \dots + \sum_{i_n=1}^2 \frac{a_{i(n)}}{1}}} \quad (2.21)$$

$$\hat{F}_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^2 \frac{-q_{i(k+1)}(1 - q_{i(k)})/2}{1 + \sum_{i_{k+2}=1}^2 \frac{-q_{i(k+2)}(1 - q_{i(k+1)})/2}{1 + \dots + \sum_{i_n=1}^2 \frac{-q_{i(n)}(1 - q_{i(n-1)})/2}{1}}} \quad (2.22)$$

де $i(k) \in \mathcal{J}$, $1 \leq k \leq n - 1$, $n \geq 2$ це «хвости» апроксимацій (17) і (18) відповідно.

Отже,

$$F_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^2 \frac{a_{i(k+1)}}{F_{i(k+1)}^{(n)}}, \quad (2.23)$$

$$\hat{F}_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^2 \frac{-q_{i(k+1)}(1 - q_{i(k)})/2}{\hat{F}_{i(k+1)}^{(n)}} \quad (2.24)$$

РОЗДІЛ 3

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБОВИХ РОЗВИНЕНЬ

На основі розглянутої теоретичної моделі було розроблено алгоритм для обчислення гіллястих ланцюгових дробових розвинень гіпергеометричних функцій Горна (ДОДАТОК А).

Перший етап алгоритму полягає в обчисленні коефіцієнтів $d_{i,k}^{(1)}$ та $d_{i,k}^{(2)}$ для дробового представлення гіпергеометричної функції. Розрахунок починається з обчислення початкових значень для нульового рівня:

```
d_i0_1 = 2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha) / (gamma - 1)
d_i0_2 = beta**2 * (alpha - 1) / (gamma - 1)
```

Далі, ітеративно обчислюються коефіцієнти для наступних рівнів ($k \geq 1$) з використанням рекурентних співвідношень:

```
for k in range(1, levels):
    sum_d_1 = sum(d_values[i][0] for i in range(k))
    sum_d_diff = sum(d_values[i][0] - d_values[i][1] for i in range(k))

    d_i_k_1 = 2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha + k + sum_d_1) /
    (gamma + k - 1)
    d_i_k_2 = beta**2 * (alpha - 1 + sum_d_diff) / (gamma + k - 1)
```

Обчислення коефіцієнтів для кожного рівня залежить від коефіцієнтів усіх попередніх рівнів, що вимагає зберігання проміжних результатів у структурі даних (у коді використовується список кортежів `d_values`).

Після визначення всіх коефіцієнтів, алгоритм обчислює значення гіллястого ланцюгового дроби, починаючи з найнижчого рівня і рухаючись догори до верхнього. Для цього використовується рекурсивний підхід, який відображає структуру гіллястого дроби:

```
def calculate_inner_sum(d_values, k, beta, gamma, alpha, z1, z2, levels)
```

Для верифікації результатів та оцінки точності обчислень було реалізовано функцію `horn_h3`, яка обчислює значення гіпергеометричної функції Горна $H_3(\alpha, \beta, \gamma, z_1, z_2)$ за допомогою розвинення в степеневий ряд:

```
def horn_h3(alpha, beta, gamma, z1, z2, max_terms=50):
    def pochhammer(a, n):
        result = 1.0
```

```

for i in range(n):
    result *= (a + i)
return result

result = 0.0

for r in range(max_terms):
    for s in range(max_terms):
        numerator = pochhammer(alpha, 2*r+s) * pochhammer(beta, s) *
(z1**r) * (z2**s)
        denominator = pochhammer(gamma, r+s) * factorial(r) *
factorial(s)

        term = numerator / denominator
        result += term

        if abs(term) < 1e-15 * abs(result) and r > 10 and s > 10:
            break

```

В результаті отримано значення функції та ГЛД для 8 точок при $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \frac{3}{2}$, які наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Результати виконання та порівняння результатів ГЛД та функції Горна H_3

№	z_1	z_2	Функція Горна H_3	ГЛД (рівень 5)	Відносна похибка
1	$(-0.2165 - 0.125j)$	$(-0.433 - 0.25j)$	$6.3280 \cdot 10^{-1} - 1.1814 \cdot 10^{-1}j$	$6.9208 \cdot 10^{-1} - 3.8017 \cdot 10^{-1}j$	0.417334
2	$(-0.433 - 0.25j)$	$(-0.2165 - 0.125j)$	$3.7296 \cdot 10^6 - 2.1179 \cdot 10^6j$	$4.2337 \cdot 10^{-1} - 1.0851j$	$\gg 1$
3	$(-0.125 + 0.2165j)$	$(-0.25 + 0.433j)$	$6.4519 \cdot 10^{-1} + 2.4056 \cdot 10^{-1}j$	$8.9789 \cdot 10^{-1} + 3.6027 \cdot 10^{-1}j$	0.406082
4	$(-0.375 + 0.6495j)$	$(-0.5 + 0.866j)$	$1.7960 \cdot 10^{17} + 1.6100 \cdot 10^{18}j$	$9.5298e \cdot 10^{-1} + 1.2072j$	$\gg 1$
5	$(-0.125 - 0.2165j)$	$(-0.375 - 0.6495j)$	$2.1736 - 3.4395j$	$8.5701 \cdot 10^{-1} - 2.2961 \cdot 10^{-1}j$	0.852698
6	$(-8.6603 - 5j)$	$(-17.3205 - 10j)$	$-1.5596 \cdot 10^{82} - 2.604 \cdot 10^{80}j$	$3.5947 - 2.7122 \cdot 10^{-1}j$	$\gg 1$

7	$(-5 - 8.6603j)$	$(-10 - 17.3205j)$	$1.5780e + 82 + 4.6433e + 80j$	$3.3693 - 3.973 \cdot 10^{-1}j$	$\gg 1$
8	$(100 - 173.2051j)$	$(300 - 519.6152j)$	$-2.2488e \cdot 10^{152} + 3.8860 \cdot 10^{151}j$	$2.4855 - 9.6309 \cdot 10^{-3}j$	$\gg 1$

Візуалізація алгоритму ГЛД наведено на рис. 3.1 – 3.5.

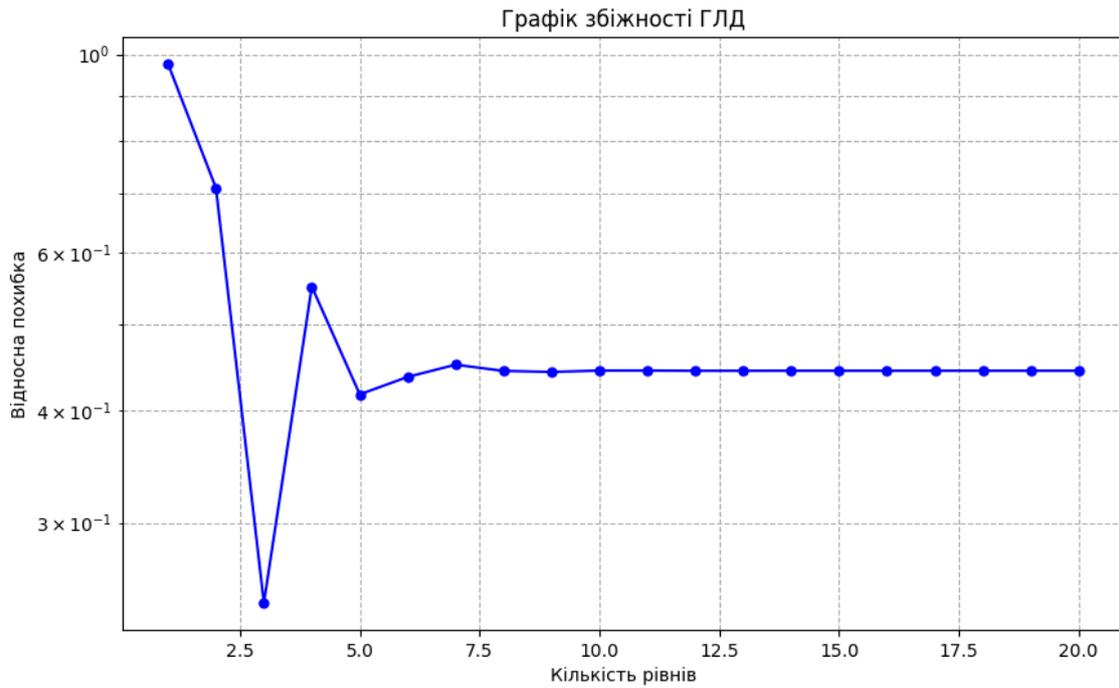


Рисунок 3.1. Графік збіжності розгалуженого неперервного дробу

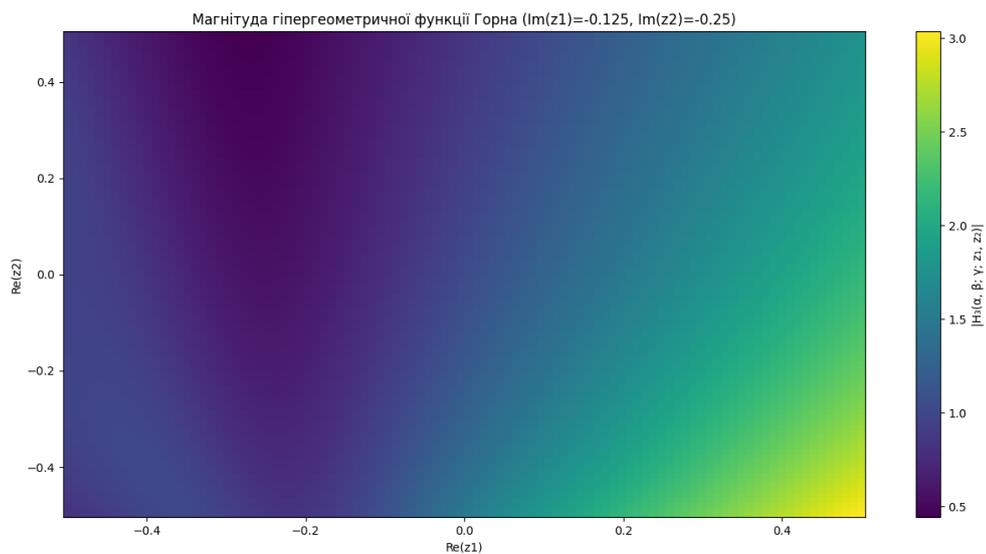


Рисунок 3.2. Магнітуда гіпергеометричної функції Горна

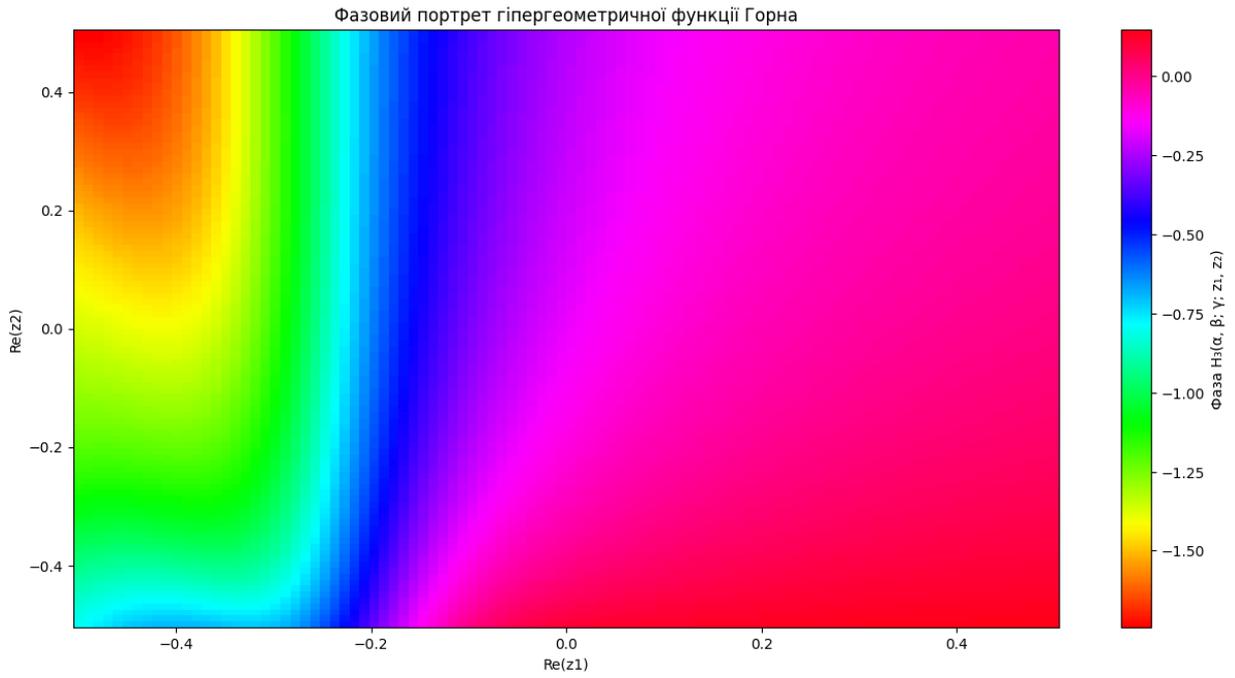


Рисунок 3.3. Фазовий портрет гіпергеометричної функції

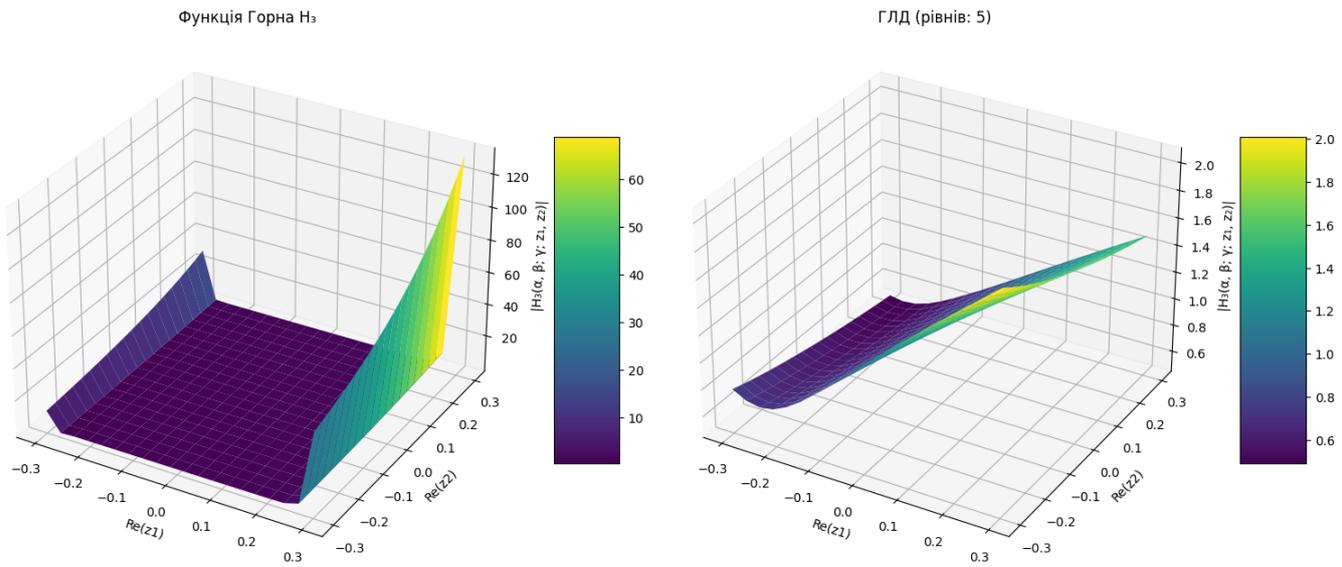


Рисунок 3.4. Порівняння 3D-вигляду функції горна на ГЛД

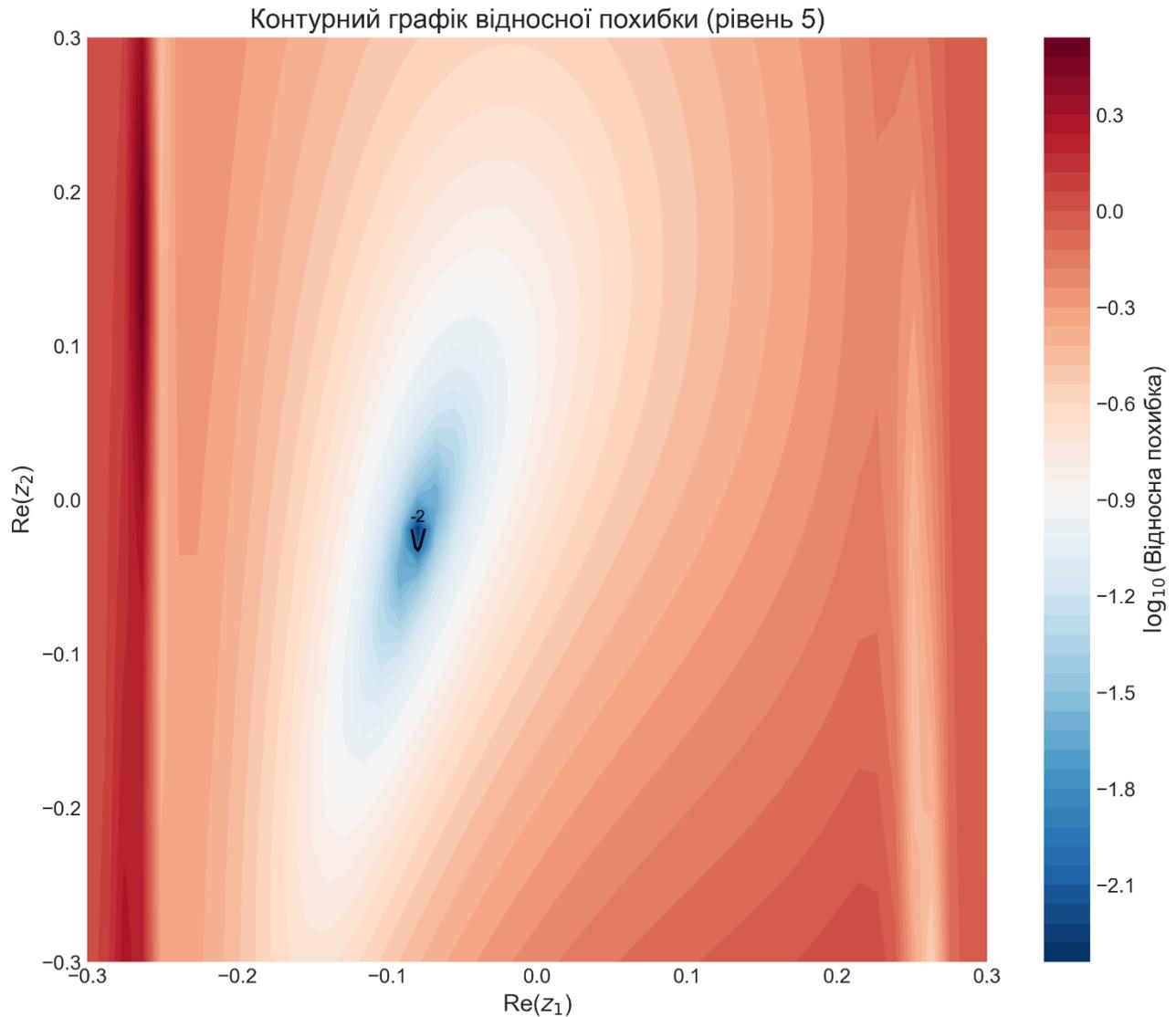


Рисунок 3.5. Контурний графік відносної похибки на рівні 5

На основі аналізу отриманих результатів можна стверджувати, що розроблений алгоритм для обчислення гіллястих ланцюгових дробових розвинень гіпергеометричних функцій Горна демонструє потенціал для ефективного апроксимування значень функції H_3 у певних областях параметричного простору. Проведене порівняння точних значень функції Горна з наближеними значеннями, отриманими за допомогою розгалуженого неперервного дроби, показало, що при малих значеннях змінних z_1 та z_2 обидва методи дають схожі результати, що відображає задовільну точність апроксимації на початкових рівнях розкладу. Однак із зростанням величин аргументів та збільшенням складності їх комплексних компонент,

спостерігається різке зростання відносної похибки, що свідчить про існування меж застосовності обраного алгоритму.

Аналіз графічних зображень дозволив виявити, що поверхневі моделі абсолютного значення функції H_3 та відповідного наближення за допомогою розгалуженого дроби мають подібний характер для малих значень z_1 та z_2 , але розбіжності між ними стають більш вираженими при збільшенні аргументів. Ці спостереження підкріплюються графіком збіжності, на якому зауважено, що початкова похибка є великою, проте вона різко зменшується при переході до 3–4 рівнів розкладу та стабілізується при використанні 8 і більше рівнів. Проте, отримане значення стабілізованої похибки, що наближається до 0.42, свідчить про те, що подальше збільшення кількості рівнів не приводить до значного покращення точності обчислень, що вказує на існування асимптотичного обмеження точності даного підходу.

Загалом, отримані результати демонструють, що запропонований метод може бути успішно застосований для апроксимації гіпергеометричних функцій Горна у випадках, коли значення змінних знаходяться в межах відносно малих величин.

ВИСНОВКИ

У результаті дослідження, отримано низку теоретичних і практичних результатів, які відповідають поставленим завданням і меті роботи:

1. Розглянути сімейства гіпергеометричних функцій Горна, зокрема функції H_3 , визначено їх ключові властивості та значення в теорії спеціальних функцій.

2. Розглянуто означення, властивості та принцип відповідності гіллястих ланцюгових дробів. Встановлено, що вони є ефективним інструментом для представлення складних функцій, таких як H_3 та її відношення, завдяки їх здатності відображати аналітичну структуру.

3. Розглянуто зв'язок між гіпергеометричною функцією Горна H_3 , її відношеннями та їхніми гіллястими ланцюговими дробовими розвиненнями.

4. Розроблено алгоритм обчислення гіллястих ланцюгових дробових розвинень для функції H_3 , який демонструє потенціал для ефективного наближення значень функції в певних областях.

5. Порівняння точних значень функції H_3 із наближеними, отриманими за допомогою гіллястих ланцюгових дробів, показало задовільну точність апроксимації для малих значень змінних де результати обох методів є близькими. Основною проблемою є зростання відносної похибки при збільшенні величин аргументів та складності їх комплексних компонент, що обмежує застосовність алгоритму для великих значень. Для усунення проблеми алгоритму рекомендується розробити модифікації алгоритму для підвищення точності в умовах великих аргументів, можливо, шляхом комбінації з іншими методами апроксимації.

Практичне значення. Запропонований алгоритм є ефективним для апроксимації функції H_3 у випадках, коли значення змінних z_1 та z_2 залишаються відносно малими. Результати роботи мають теоретичне значення для розвитку теорії гіпергеометричних функцій і можуть бути застосовані в чисельних методах

для моделювання складних математичних об'єктів, а також у прикладних задачах фізики та інженерії.

Для поглиблення результатів пропонується:

- Розширити аналіз на інші гіпергеометричні функції Горна для узагальнення отриманих методів.
- Провести чисельне тестування алгоритму на ширшому діапазоні параметрів для оцінки його стійкості та меж застосовності.
- Дослідити можливість застосування гіллястих ланцюгових дробів до прикладних задач

Таким чином, дослідження досягло поставленої мети, а отримані результати та рекомендації створюють підґрунтя для подальшого розвитку теми аналітичного продовження гіпергеометричних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. H. Bateman, Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions [Volumes I]. McGraw-Hill Book Company, 1953.
2. D. I. Bodnar. Branched Continued Fractions. (Kyiv: Naukova Dumka, 1986).
3. W. B. Jones and W. J. Thron. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications (London etc.: Addison-Wesley, Pub. Co., Inc, 1980).
4. Antonova, T. On Convergence of Branched Continued Fraction Expansions of Horn's Hypergeometric Function H_3 Ratios. *Carpathian Math. Publ.* **2021**, *13*, 642-650.
5. Dmytryshyn, R.; Antonova, T.; Hladun, S. On Analytical Continuation of the Horn's Hypergeometric Functions H_3 and Their Ratios. *Axioms* **2025**, *14*, 67

```

"""
Модуль для обчислення гіпергеометричної функції Горна Н3 за допомогою
гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД).
"""

import pandas as pd
import numpy as np
import math

def calculate_branched_continued_fraction(alpha, beta, gamma, z1, z2, levels=5):
    """Обчислення функції Горна Н3 методом гіллястого ланцюгового дробу"""
    # Обчислення початкових значень d
    d_i0_1 = 2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha) / (gamma - 1)
    d_i0_2 = beta**2 * (alpha - 1) / (gamma - 1)

    # Зберігання усіх значень d для кожного рівня
    d_values = []
    d_values.append((d_i0_1, d_i0_2))

    # Обчислення значень d для k >= 1
    for k in range(1, levels):
        sum_d_1 = sum(d_values[i][0] for i in range(k))
        sum_d_diff = sum(d_values[i][0] - d_values[i][1] for i in range(k))

        d_i_k_1 = 2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha + k + sum_d_1) / (gamma + k -
1)
        d_i_k_2 = beta**2 * (alpha - 1 + sum_d_diff) / (gamma + k - 1)

        d_values.append((d_i_k_1, d_i_k_2))

    # Обчислення неперервного дробу від найнижчого рівня до верхнього
    result = 0

    # Ітерація від найглибшого рівня вгору
    for k in range(levels-1, -1, -1):
        if k == 0:
            c_i0_1_1 = ((2 * (gamma - 1) - alpha + beta**2) * (alpha + d_values[0][0]))
/ ((gamma - 1) * gamma)
            c_i0_1_2 = (2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha) * (alpha +
d_values[0][0])) / ((gamma - 1) * gamma)
            c_i0_2_1 = (beta**2 * (gamma - 1 - alpha + beta**2)) / ((gamma - 1) *
gamma)
            c_i0_2_2 = 4 * c_i0_2_1

            inner_sum_1 = 0
            if 1 < levels:
                denom_1 = 1 + d_values[1][0] * z1 + d_values[1][1] * z2
                if 1 < levels - 1:
                    denom_1 += calculate_inner_sum(d_values, 1, beta, gamma, alpha, z1,
z2, levels)
                inner_sum_1 = (c_i0_1_1 * z1 + c_i0_1_2 * z1 * z2) / denom_1

            inner_sum_2 = 0
            if 2 < levels:
                denom_2 = 1 + d_values[2][0] * z1 + d_values[2][1] * z2
                if 2 < levels - 1:

```

```

        denom_2 += calculate_inner_sum(d_values, 2, beta, gamma, alpha, z1,
z2, levels)
        inner_sum_2 = (c_i0_2_1 * z2 + c_i0_2_2 * z1 * z2) / denom_2

        result = (1 + 4 * z1) / (1 + d_values[0][0] * z1 + d_values[0][1] * z2 +
inner_sum_1 + inner_sum_2)
    else:
        sum_d_1 = sum(d_values[i][0] for i in range(k))
        sum_d_1_plus = sum(d_values[i][0] for i in range(k+1))

        c_i_k_1_1 = ((2 * (gamma - 1) - alpha + k + sum_d_1) * (alpha +
sum_d_1_plus)) / ((gamma + k - 1) * (gamma + k))
        c_i_k_1_2 = (2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha + k) * (alpha +
sum_d_1_plus)) / ((gamma + k - 1) * (gamma + k))

        c_i_k_2_1_sum = 0
        for i in range(k+1):
            sum_d_2 = sum(d_values[j][1] for j in range(i+1))
            c_i_k_2_1_sum += beta**2 * (gamma - 1 - alpha + sum_d_2)

        c_i_k_2_1 = c_i_k_2_1_sum / ((gamma + k - 1) * (gamma + k))
        c_i_k_2_2 = 4 * c_i_k_2_1

        inner_sum_1 = 0
        if k + 1 < levels:
            denom_1 = 1 + d_values[k+1][0] * z1 + d_values[k+1][1] * z2
            if k + 1 < levels - 1:
                denom_1 += calculate_inner_sum(d_values, k+1, beta, gamma, alpha,
z1, z2, levels)
            inner_sum_1 = (c_i_k_1_1 * z1 + c_i_k_1_2 * z1 * z2) / denom_1

        inner_sum_2 = 0
        if k + 2 < levels:
            denom_2 = 1 + d_values[k+2][0] * z1 + d_values[k+2][1] * z2
            if k + 2 < levels - 1:
                denom_2 += calculate_inner_sum(d_values, k+2, beta, gamma, alpha,
z1, z2, levels)
            inner_sum_2 = (c_i_k_2_1 * z2 + c_i_k_2_2 * z1 * z2) / denom_2

        result = inner_sum_1 + inner_sum_2

    return result

def calculate_inner_sum(d_values, k, beta, gamma, alpha, z1, z2, levels):
    """Допоміжна функція для обчислення внутрішньої суми в ГЛД"""
    if k >= levels - 1:
        return 0

    sum_d_1 = sum(d_values[i][0] for i in range(k))
    sum_d_1_plus = sum(d_values[i][0] for i in range(k+1))

    c_i_k_1_1 = ((2 * (gamma - 1) - alpha + k + sum_d_1) * (alpha + sum_d_1_plus)) /
((gamma + k - 1) * (gamma + k))
    c_i_k_1_2 = (2 * beta**2 * (2 * (gamma - 1) - alpha + k) * (alpha + sum_d_1_plus))
/ ((gamma + k - 1) * (gamma + k))

    c_i_k_2_1_sum = 0
    for i in range(k+1):
        sum_d_2 = sum(d_values[j][1] for j in range(i+1))
        c_i_k_2_1_sum += beta**2 * (gamma - 1 - alpha + sum_d_2)

```

```

c_i_k_2_1 = c_i_k_2_1_sum / ((gamma + k - 1) * (gamma + k))
c_i_k_2_2 = 4 * c_i_k_2_1

inner_sum_1 = 0
if k + 1 < levels:
    denom_1 = 1 + d_values[k+1][0] * z1 + d_values[k+1][1] * z2
    if k + 1 < levels - 1:
        denom_1 += calculate_inner_sum(d_values, k+1, beta, gamma, alpha, z1, z2,
levels)
    inner_sum_1 = (c_i_k_1_1 * z1 + c_i_k_1_2 * z1 * z2) / denom_1

inner_sum_2 = 0
if k + 2 < levels:
    denom_2 = 1 + d_values[k+2][0] * z1 + d_values[k+2][1] * z2
    if k + 2 < levels - 1:
        denom_2 += calculate_inner_sum(d_values, k+2, beta, gamma, alpha, z1, z2,
levels)
    inner_sum_2 = (c_i_k_2_1 * z2 + c_i_k_2_2 * z1 * z2) / denom_2

return inner_sum_1 + inner_sum_2

def horn_h3(alpha, beta, gamma, z1, z2, max_terms=50):
    """Пряме обчислення функції Горна H3 за допомогою ряду"""
    def pochhammer(a, n):
        """Обчислення символу Похгаммера (a)_n"""
        result = 1.0
        for i in range(n):
            result *= (a + i)
        return result

    def factorial(n):
        """Обчислення факторіалу"""
        if n == 0:
            return 1.0
        return math.factorial(n)

    result = 0.0

    for r in range(max_terms):
        for s in range(max_terms):
            numerator = pochhammer(alpha, 2*r+s) * pochhammer(beta, s) * (z1**r) *
(z2**s)
            denominator = pochhammer(gamma, r+s) * factorial(r) * factorial(s)

            term = numerator / denominator
            result += term

            if abs(term) < 1e-15 * abs(result) and r > 10 and s > 10:
                break

    return result

def create_comparison_table(alpha, beta, gamma, z_points, levels=5):
    """Створення таблиці порівняння результатів"""
    data = []

    for idx, (z1, z2) in enumerate(z_points):
        try:

```

```

# Точне значення за допомогою функції Горна
horn_value = horn_h3(alpha, beta, gamma, z1, z2, max_terms=30)

# Значення за допомогою ГЛД
cf_value = calculate_branched_continued_fraction(alpha, beta, gamma, z1,
z2, levels=levels)

# Обчислення відносної похибки
rel_error = abs((cf_value - horn_value) / horn_value)

data.append({
    "#": idx + 1,
    "z1": f"{z1}",
    "z2": f"{z2}",
    "Horn H3": f"{horn_value:.10e}",
    f"ГЛД (рівень {levels})": f"{cf_value:.10e}",
    "Відносна похибка": f"{rel_error:.10e}"
})
except Exception as e:
    data.append({
        "#": idx + 1,
        "z1": f"{z1}",
        "z2": f"{z2}",
        "Horn H3": "Error",
        f"ГЛД (рівень {levels})": "Error",
        "Відносна похибка": str(e)
    })

return pd.DataFrame(data)

def print_comparison_results(alpha, beta, gamma, z_points, levels=5):
    """Виведення результатів порівняння для всіх точок"""
    print("=" * 80)
    print("ОБЧИСЛЕННЯ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ГОРНА H3")
    print("за допомогою гіллястого ланцюгового дробу")
    print("=" * 80)
    print(f"Параметри: alpha = {alpha}, beta = {beta}, gamma = {gamma}, рівні ГЛД =
{levels}")
    print("=" * 80)

    # Створення таблиці порівняння
    df = create_comparison_table(alpha, beta, gamma, z_points, levels=levels)

    # Виведення таблиці
    pd.set_option('display.max_columns', None)
    pd.set_option('display.width', 160)
    pd.set_option('display.precision', 10)
    print(df)

    # Обчислення середньої відносної похибки
    errors = []
    for _, row in df.iterrows():
        try:
            error = float(row["Відносна похибка"])
            errors.append(error)
        except:
            pass

    if errors:
        print("\nСтатистика похибок:")

```

```
print(f"Середня відносна похибка: {sum(errors)/len(errors):.10e}")
print(f"Максимальна відносна похибка: {max(errors):.10e}")
print(f"Мінімальна відносна похибка: {min(errors):.10e}")

# Основна функція
if __name__ == "__main__":
    # Вхідні параметри
    alpha = 1
    beta = 1
    gamma = 1.5
    levels = 5

    # Тестові точки
    z_points = [
        (complex(-0.2165, -0.1250), complex(-0.4330, -0.2500)),
        (complex(-0.4330, -0.2500), complex(-0.2165, -0.1250)),
        (complex(-0.1250, 0.2165), complex(-0.2500, 0.4330)),
        (complex(-0.3750, 0.6495), complex(-0.5000, 0.8660)),
        (complex(-0.1250, -0.2165), complex(-0.3750, -0.6495)),
        (complex(-8.6603, -5.0000), complex(-17.3205, -10.0000)),
        (complex(-5.0000, -8.6603), complex(-10.0000, -17.3205)),
        (complex(100.0000, -173.2051), complex(300.0000, -519.6152)),
        (complex(500.0000, 866.0254), complex(150.0000, 259.8076)),
        (complex(-50.0000, 86.6025), complex(-100.0000, 173.2051)),
        (complex(-500.0000, 866.0254), complex(-450.0000, 779.4229))
    ]

    # Виведення порівняльних результатів
    print_comparison_results(alpha, beta, gamma, z_points, levels)
```