«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»

Факультет математики та інформатики

Кафедра математичного та функціонального аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

на тему «Комплексна та узагальнена проблема моментів»

Виконала: студенка IV курсу

Групи М-41

Спеціальності Е-7 «Математика»

Мандзюк Б.М.

Керівник: к.ф.-м.н., доц**. Івасюк І. Я.**

Рецензент д.ф-м.н., проф. **Осипчук М.М.**

Івано-Франківськ 2025 р.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математичного та функціонального аналізу

Освітній рівень «бакалавр»

Спеціальність Е7 Математика

Затверджено на засіданні математичного

та функціонального аналізу

Протокол №3 від 18.10.2024

Завідувач кафедри Загороднюк А.В.

ЗАВДАННЯ

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Мандзюк Богдані Михайдівні

1. Тема роботи «Комплексна на узагальнена проблема моментів»
2. Керівник роботи : к.ф.-м.н., доц. Івасюк І.Я.
3. Перелік питань, які потрібно розробити: Розкрити зміст класичної, комплексної та узагальненої проблем моментів; проаналізувати задачі Гамбургера, Стилтьєса, Хаусдорфа; дослідити умови існування та єдиності розв’язку; описати методи регуляризації, зокрема метод Тихонова; навести приклади чисельного розв’язання задач; застосувати теорію моментів у прикладних задачах: машинне навчання, обробка сигналів, фінанси, біомедицина; реалізувати приклади в Python із побудовою моделей на основі моментів
4. Дата видачі завдання 18.10.2024

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з /п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Аналіз історії розвитку проблеми моментів та формування теоретичних засад	18.10.2024-31.10.2024	Виконано
2.	Вивчення різновидів проблеми моментів та їх математичних особливостей	01.11.2024-15.11.2024	Виконано
3.	Дослідження комплексної проблеми моментів та методів її розв’язання	16.11.2024-05.12.2024	Виконано
4.	Формулювання узагальненої проблеми моментів та побудова алгоритмів її розв’язку	06.12.2024-20.12.2024	Виконано
5.	Аналіз чисельних методів розв’язку задач моментів та їх ефективність	21.12.2024-15.01.2025	Виконано
6.	Програмна реалізація алгоритмів у Python, перевірка коректності	16.01.2025-15.03.2025	Виконано
7.	Узагальнення прикладного застосування (машинне навчання, обробка сигналів, фінанси)	16.03.2025-10.04.2025	Виконано
8.	Оформлення повного тексту дипломної роботи згідно з вимогами	11.04.2025-29.05.2025	Виконано
9.	Підготовка до захисту, редагування, оформлення презентації	30.05.2025-24.06.2025	Виконано

Студент ____________ Мандзюк Б.М.

(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи. ____________ Івасюк І.Я.

(підпис) (прізвище та ініціали)

Анотація

До дипломної роботи на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Мандзюк Богдани Михайлівни

на тему:

«Комплексна та узагальнена проблема моментів»

Дипломна робота присвячена вивченню класичної, комплексної та узагальненої проблем моментів — задачі відновлення функції або розподілу за заданими моментами. У роботі розглянуто умови існування та єдиності розв’язків, класифіковано основні типи задач (Гамбургера, Стилтьєса, Хаусдорфа). Детально проаналізовано методи регуляризації, зокрема метод Тихонова, а також чисельні методи наближення.

Практична частина присвячена застосуванню теорії моментів у сучасних напрямках: машинному навчанні, обробці сигналів, економічному моделюванні та біомедичних дослідженнях. Також реалізовано програмні алгоритми для обчислення моментів і апроксимації функцій у середовищі Python.

Загальний обсяг сторінок становить 79 сторінки, з них основний текст —66.
Ключові слова: момент, проблема моментів, регуляризація, апроксимація, чисельні методи, застосування.

Abstract

to the Bachelor's Thesis
by Bohdana Mandziuk
on the topic:
"The Complex and Generalized Moment Problem"

The bachelor's thesis is devoted to the study of the classical, complex, and generalized moment problems — the task of reconstructing a function or distribution from given moments. The work examines the conditions of existence and uniqueness of solutions and provides a classification of the main types of problems (Hamburger, Stieltjes, and Hausdorff). Regularization methods are analyzed in detail, particularly Tikhonov's method, as well as numerical approximation techniques.

The practical part focuses on the application of moment theory in modern fields such as machine learning, signal processing, economic modeling, and biomedical research. Algorithmic implementations for moment calculation and function approximation are developed using the Python programming environment.

The total length of the thesis is 79 pages, including 66 pages of the main text.
Keywords: moment, moment problem, regularization, approximation, numerical methods, application.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія моментів є одним із фундаментальних розділів математичного аналізу, що має широке застосування в різних галузях науки й техніки. Вона використовується для вирішення задач апроксимації, обробки сигналів, машинного навчання, квантової механіки, економічного моделювання та інших напрямів. Проблема моментів виникла у зв'язку з потребою відновлення функцій за їхніми моментами, що має велике значення для статистики, ймовірнісного аналізу та оптимізаційних методів. Розвиток математичних методів привів до розширення класичних уявлень про проблему моментів, що зумовило необхідність вивчення нових підходів та методів розв'язку. На сьогодні активно досліджуються узагальнені варіанти проблеми моментів, які застосовуються у функціональному аналізі, чисельних методах та алгоритмах машинного навчання. Усе це свідчить про актуальність дослідження, спрямованого на аналіз розвитку теорії моментів, класифікацію її основних задач і методів розв'язку.

У сучасних математичних дослідженнях значна увага приділяється комплексній проблемі моментів, що охоплює випадки, коли задані моменти не є однозначно визначеними. Такі задачі мають складну структуру й вимагають використання методів лінійної алгебри, функціонального аналізу, чисельних алгоритмів і теорії ймовірностей. Розгляд узагальненої проблеми моментів відкриває нові перспективи для математичного моделювання та оптимізаційних задач, що використовуються в різних наукових дослідженнях.

Теоретичним підґрунтям дослідження є праці вітчизняних і зарубіжних науковців, які вивчають різні підходи до розв'язку проблеми моментів. Бедратюк Л.П. та Бедратюк Г.І. досліджували моменти Ерміта зображень та їхні інваріанти, що дає змогу аналізувати структуру функціональних просторів. Спекторський І.Я. та Галганов О.А. запропонували метод трикутника для побудови поліномів Жегалкіна, що знаходить застосування в комбінаторних імовірнісних задачах. Роботи Curto R. та Yoo S. присвячені вивченню бінарних моментів та їхніх розширених формулювань. Дослідження Annals of Functional Analysis містять аналіз розв’язків несингулярних моментних задач та їх використання в оптимізаційних моделях. Водночас праці Betlei A., Diemert E., Amini M.R. зосереджені на застосуванні моментних рівнянь у машинному навчанні, що доводить значний потенціал цієї теорії у цифровій обробці даних.

Об’єктом дослідження є теоретичні та чисельні методи розв’язку проблеми моментів у різних математичних підходах.

Предметом дослідження є формулювання класичних і узагальнених проблем моментів, їхні основні властивості та методи розв’язку, а також можливості застосування у математичному моделюванні та оптимізаційних задачах.

Мета дослідження – проаналізувати сучасні підходи до вирішення проблеми моментів, дослідити її узагальнені формулювання та розглянути практичні застосування в різних сферах науки і техніки.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі завдання:

- розглянути історію розвитку проблеми моментів та її основні математичні концепції;
- проаналізувати різні види проблеми моментів та їхні особливості;
- вивчити застосування теорії моментів у математичному аналізі;
- дослідити комплексну проблему моментів, її математичні властивості та методи розв’язку;
- сформулювати узагальнену проблему моментів та визначити алгоритми її розв’язку;
- проаналізувати чисельні методи розв’язку проблеми моментів та їхню ефективність;
- розглянути програмну реалізацію алгоритмів розв’язку та оцінити їхню застосовність у конкретних задачах.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети використовувалися теоретичні та чисельні методи аналізу. Аналіз наукових джерел та математичних моделей дозволив визначити основні напрямки розвитку теорії моментів. Методи математичного моделювання застосовувалися для формулювання та розв'язання задач моментів. Методи лінійної алгебри використовувалися для дослідження властивостей моментних матриць, а функціональний аналіз допоміг у визначенні умов існування розв'язків узагальненої проблеми моментів. Чисельні методи, такі як методи апроксимації, регуляризації та інтерполяції, застосовувалися для побудови алгоритмів розв'язку моментних задач.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості використання методів теорії моментів у математичному моделюванні, машинному навчанні, фінансовій аналітиці та інженерних задачах. Розроблені алгоритми розв'язку можуть бути застосовані у чисельних методах оптимізації, аналізі стохастичних процесів та прогнозуванні.

Структура та обсяг роботи. Робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі розглядаються історичні передумови розвитку проблеми моментів, класифікація основних типів моментних задач та їхні математичні формулювання. У другому розділі досліджується комплексна проблема моментів, її властивості та методи розв'язку. Третій розділ присвячено узагальненій проблемі моментів та її алгоритмам розв'язку. У четвертому розділі аналізуються чисельні методи розв'язку проблеми моментів, програмні реалізації та результати тестування алгоритмів. Загальний обсяг роботи – 65 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОБЛЕМИ МОМЕНТІВ

1.1. Історія розвитку проблеми моментів

Зародження теорії моментів бере свій початок із глибоких досліджень у сфері аналізу та теорії ймовірностей, які поступово формувалися упродовж XIX століття. Проблематика моментів тісно пов’язана з поняттями, що виникали в механіці та фізиці, зокрема у зв’язку з вивченням моментів маси, моментів сили та моментів інерції. Ці поняття з’являлися у працях фізиків та математиків, які намагалися знайти аналітичні методи для опису механічних систем. Однак у суто математичному контексті перші формулювання проблеми моментів були здійснені російським математиком Пафнутієм Чебишевим у 1873 році, коли він поставив питання про можливість відновлення функції розподілу на основі її моментів. Ця ідея полягала у знаходженні зв’язку між сукупністю чисел, що виражають моменти функції, та самою функцією, яка є мірою розподілу. Важливість такого підходу була очевидною не тільки в теоретичному плані, а й для прикладних задач, оскільки багато фізичних і статистичних систем можна було описати через моменти.

Подальші дослідження цієї проблематики здійснив Андрій Марков, який продовжив роботу Чебишева і сформулював її у вигляді задачі пошуку міри dp(x), що відповідає заданій послідовності моментів. Він також встановив основні умови існування та єдиності такої міри. Марковські нерівності та ланцюги стали одним із напрямків досліджень, що безпосередньо випливали з теорії моментів і знайшли застосування у ймовірнісному аналізі та статистиці. Внесок Маркова у розвиток проблеми моментів полягав у розробці методів апроксимації, що дозволяли встановлювати обмеження на можливі функції розподілу відповідно до заданих моментів. Його підхід заклав основу для подальших досліджень, які стосувалися питань існування, єдиності та стабільності розв’язків моментної проблеми [40, с. 42].

Наприкінці XIX століття голландський математик Томас Стілтьєс зробив значний внесок у формування сучасного формулювання проблеми моментів, запропонувавши відповідну постановку задачі на півосі (0, ∞). У його роботах з'явилося поняття міри Стілтьєса, яка дозволила більш строго визначити умови розв’язності задачі моментів у класичній інтерпретації. Його методи стали основою для подальшого розвитку математичного апарату у цій галузі, зокрема для дослідження ортогональних поліномів та операторного аналізу. Роботи Стілтьєса мали важливий вплив на розвиток інтегральних перетворень та спектральної теорії, оскільки саме через моменти стало можливим розглядати певні класи функцій та міру їхніх змін у межах визначених інтервалів.

У подальшому розвитку теорії моментів суттєву роль відігравали європейські математики початку XX століття. Серед них слід виділити Ерхарда Шмудґена, який розвинув методи побудови моментних послідовностей та встановив нові умови їхньої представимості. Важливі результати були отримані у роботах Марселя Ріса, який досліджував узагальнені моментні проблеми та їхній зв’язок із теорією функцій. Паралельно у Швеції Торстен Карлеман розробив методи, що дозволяли розглядати задачу моментів у контексті інтегральних рівнянь, зокрема, застосував теорію функцій комплексної змінної для аналізу розв’язності відповідних моментних послідовностей [47].

Подальший розвиток цієї тематики привів до появи спектрального аналізу моментних задач, що згодом стали центральним об'єктом вивчення у функціональному аналізі та теорії лінійних операторів. У цьому контексті варто відзначити внесок радянських математиків, зокрема Наума Ахієзера та Марка Крейна, які запропонували застосування методів операторної теорії для розв’язку класичної задачі моментів. Вони показали, що проблема моментів може бути зведена до вивчення спектральних властивостей самоспряжених операторів у гільбертовому просторі. Це стало основою для нового напряму досліджень, який включав спектральну теорію та її застосування в аналізі ортогональних поліномів.

Подальші дослідження привели до розширення класичних постановок задачі моментів, зокрема до появи багатовимірної проблеми моментів, яка розглядала розподіл міри у вищих розмірностях. Це відкривало нові можливості для застосування теорії моментів у фізиці, економіці та математичному моделюванні. Пізніше були введені поняття матричних та операторних моментних проблем, які дали можливість узагальнити результати на нескінченновимірні простори. У цьому контексті особливо виділяються роботи Юрія Березанського, який розширив методи спектрального аналізу на операторні моменти та довів низку фундаментальних тверджень про існування та єдиність моментних мір у загальних гільбертових просторах [5, с. 9].

Поступово класичні задачі моментів почали використовуватись у прикладних дисциплінах, зокрема у теорії наближень, чисельному аналізі та теорії ймовірностей. Важливу роль у розвитку цієї галузі відіграли методи апроксимації Паде та проблема інтерполяції Неванлінни–Піка, які логічно випливали з моментного підходу. У багатьох прикладних дослідженнях, що пов'язані з математичною фізикою, виникає потреба у відшукання моментних розв'язків у рамках обмежених інтервалів, що привело до розвитку усіченої моментної проблеми. Дослідження в цьому напрямку отримали прикладний характер, оскільки стали важливими для оптимізаційних методів та аналізу динамічних систем.

Сучасні підходи до вивчення проблеми моментів базуються на поєднанні методів функціонального аналізу, теорії ймовірностей, спектральної теорії операторів та чисельних методів апроксимації. Теорія моментів залишається одним із ключових напрямів сучасної математики завдяки її тісному зв'язку з аналізом ортогональних поліномів, інтерполяційними проблемами та розв'язком спектральних задач у гільбертових просторах. Вивчення моментних послідовностей має безпосереднє застосування у квантовій механіці, математичній фізиці, статистичному аналізі та фінансовому моделюванні. Застосування методів теорії операторів дозволяє досліджувати існування та єдиність міри, що відповідає моментній послідовності, а також встановлювати її спектральні властивості, що є фундаментальним у задачах розкладу функцій на власні вектори та інтегральних рівнянь [34, с. 31].

Розвиток класичної теорії моментів привів до розширення її застосувань у межах багатовимірного аналізу, де моментні задачі формулюються для багатовимірних розподілів ймовірностей, а також для функцій багатьох змінних. Вивчення таких узагальнень дозволило сформулювати умови представлення багатовимірних моментних послідовностей, які використовуються для моделювання складних фізичних та економічних систем. Одним із сучасних напрямів досліджень є операторні моментні задачі, що виникають у спектральному аналізі самоспряжених операторів, де моментні рівняння визначають спектральні розподіли. Це знаходить застосування у квантовій механіці, де власні значення операторів енергії пов’язані з моментними характеристиками квантових систем, а також у математичній статистиці, де моменти використовуються для апроксимації ймовірнісних розподілів.

Розширення класичних підходів до задач моментів спричинило активне дослідження моментних послідовностей для матричних функцій та нескінченновимірних операторів. Матрична проблема моментів виникла як узагальнення класичної задачі, де замість скалярних моментів розглядаються матричні моменти, що визначають спектральні властивості операторних систем. Цей підхід є важливим у квантовій механіці, статистичній фізиці та спектральному аналізі випадкових матриць, які використовуються для моделювання складних випадкових процесів. У теорії випадкових матриць моменти визначають властивості спектральних розподілів, що має значення для аналізу колективної поведінки великих ансамблів у фізичних та економічних моделях.

Іншим напрямом розвитку є дослідження моментних рівнянь для нескінченновимірних просторів, що пов’язано з узагальненням задачі моментів у функціональному аналізі. Такі задачі виникають у теорії нескінченновимірних гільбертових просторів, де моменти визначають спектральні властивості операторних розподілів. Вивчення таких задач є важливим для квантової інформації та оптимізації у нескінченновимірних просторах. Особливий інтерес становлять моментні задачі для поліномів, що ортогональні відносно невідомої міри, оскільки це дозволяє будувати нові методи апроксимації функцій, що є корисними в чисельному аналізі, обробці сигналів та машинному навчанні [20, с. 63].

Застосування моментної теорії в обчислювальній математиці включає методи апроксимації Паде, які використовуються для побудови раціональних апроксимацій функцій. Ці методи базуються на моментних умовах і дозволяють отримувати оптимальні наближення, що широко застосовуються в теорії управління, аналізі стабільності систем та чисельних методах обчислення інтегралів. Розвиток методів апроксимації за моментами спричинив появу нових алгоритмів у теорії сигналів, де моментні рівняння використовуються для відновлення невідомих функцій за обмеженою кількістю спостережень. У машинному навчанні моментні методи знаходять застосування для побудови моделей розподілів ймовірностей, де моменти використовуються для оцінки параметрів складних статистичних моделей.

Розширення теорії моментів у суміжні галузі привело до її застосування в економічному моделюванні, де моментні умови використовуються для оцінки параметрів фінансових моделей. У фінансовій математиці моменти застосовуються для аналізу ризику, оцінки волатильності ринкових активів та побудови оптимальних інвестиційних стратегій. У стохастичному аналізі моментні рівняння використовуються для моделювання випадкових процесів, що є важливими для теорії оптимального керування та прогнозування динаміки фінансових систем. Вивчення моментних рівнянь у теорії ймовірностей дозволило сформулювати нові методи відновлення ймовірнісних розподілів за моментними характеристиками, що є корисним для статистичного аналізу та вивчення складних випадкових середовищ.

В статистичній фізиці моментні рівняння використовуються для моделювання поведінки частинок у випадкових середовищах, що є важливим для аналізу фазових переходів та розрахунку термодинамічних параметрів складних систем. Розвиток теорії моментів також спричинив її застосування у біостатистиці, де моментні рівняння використовуються для оцінки параметрів розподілів у медичних та біологічних дослідженнях. У генетичному аналізі моментні методи застосовуються для побудови моделей еволюції, де моменти визначають параметри мутаційних процесів та генетичного дрейфу. Використання моментних умов у статистичному аналізі дозволяє отримувати точні оцінки параметрів у випадку великих вибірок, що є важливим для аналізу великих даних у медицині та біоінформатиці [3, с. 28].

Сучасні підходи до проблеми моментів демонструють її універсальність у різних галузях математики та її застосуваннях. Інтеграція методів моментного аналізу у функціональний аналіз, теорію ймовірностей, математичну фізику, економіку та обчислювальну математику свідчить про її фундаментальне значення для сучасних наукових досліджень. Подальший розвиток моментної теорії спрямований на узагальнення класичних результатів для більш складних структур, зокрема для операторних просторів, випадкових матриць та квантових систем. Це відкриває нові перспективи для розв'язку фундаментальних задач у фізиці, аналізі складних даних та математичному моделюванні складних систем.

1.2. Види проблеми моментів

Класична проблема моментів є одним із фундаментальних об'єктів дослідження в аналізі, функціональному аналізі, теорії ймовірностей і спектральній теорії операторів. Вона формулюється як задача знаходження міри $d(x)$, що відповідає заданій послідовності моментів, визначених через інтегральне представлення. Загальна постановка проблеми моментів формулюється наступним чином: для заданої послідовності дійсних чисел c_n,

$n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, необхідно знайти міру $d\mu(x)$, визначену на множині $X \subseteq R$, таку, що моменти цієї міри задовольняють рівняння

$$\int_X x^n \, d\mu(x) = c_n$$

де $n \in \mathbb{N}_0$. У класичному варіанті задача вивчається для різних класів множини X. У випадку, коли X = R, говорять про проблему моментів Гамбургера, а якщо X = [0,∞), то така задача називається проблемою моментів Стілтьєса. Відповідно, питання розв'язності задачі залежить від властивостей послідовності моментів $\{c_n\}$ та властивостей шуканої міри $d\mu(x)$ [45].

Для дискретних функцій проблема моментів формулюється як задача відшукання міри у вигляді зваженої суми атомарних точок. У цьому випадку міра $d\mu(x)$ представлена у вигляді

$$d(x) = \sum_k w_k \, \delta(x - x_k)$$

де x_k – точки дискретної множини, w_k – відповідні вагові коефіцієнти, а $\delta(x - x_k)$ – дельта-функція Дірака. Тоді рівняння моментів набуває вигляду

$$c_n = \sum_k w_k \, {x_k}^n$$

де x_k та w_k є невідомими, які необхідно визначити. Дискретні задачі моментів виникають у чисельному аналізі, інтерполяційних задачах, апроксимації Паде та спектральному аналізі диференціальних рівнянь. Вони також відіграють важливу роль у теорії ортогональних поліномів, оскільки множина x_k відповідає вузлам квадратурної формули, що апроксимує інтегральні перетворення.

У випадку неперервних функцій міра $d\mu(x)$ розглядається як абсолютно неперервна відносно деякої базової міри dx, тобто

$$d\mu(x) = \rho(x)dx$$

де $\rho(x)$ – невідома функція густини розподілу, яка підлягає відшуканню. У такому формулюванні моментне рівняння набуває вигляду

$$\int_X x^n \, \rho(x) \, dx = c_n$$

Ця задача має застосування в теорії ймовірностей, де $\rho(x)$ описує густину ймовірнісного розподілу, що узгоджується з заданими моментами. Вивчення неперервних проблем моментів приводить до необхідності аналізу функціональних просторів, зокрема просторів функцій з обмеженими варіаціями, а також до застосування методів гармонічного аналізу та інтегральних рівнянь [41, с. 31].

Формалізація класичної проблеми моментів вимагає вивчення умов існування та єдиності міри $d\mu(x)$, яка відповідає моментам $\{c_n\}$. Якщо така міра існує, постає питання про її єдиність. У випадку, коли єдиності немає, необхідно описати множину всіх можливих мір, що задовольняють моментне рівняння. Існування розв'язку тісно пов'язане з умовою позитивної визначеності моментної матриці Якобі

$$M_n = \left[c_{\{i+j\}}\right]_{\{0 \le i,j \le n\}},$$

яка повинна бути додатно визначеною. Ця умова є необхідною і достатньою для існування міри $d\mu(x)$ у випадку проблеми моментів Гамбургера.

Для проблеми моментів Стілтьєса умови існування та єдиності міри визначаються через відповідні додатно визначені матриці та критерії позитивності функції моментів. Функціональний підхід до проблеми моментів базується на застосуванні теорії операторів у гільбертових просторах. Моменти $\{c_n\}$ можна розглядати як коефіцієнти розкладу функції від моментної змінної у базисі ортогональних поліномів, що дозволяє використовувати методи спектрального аналізу самоспряжених операторів. Операторний підхід був розвинений у працях Наума Ахієзера та Марка Крейна, які запропонували методи дослідження моментної проблеми через спектральні властивості операторів множення у просторі квадратично інтегровних функцій.

Загальні узагальнення класичної проблеми моментів включають розгляд багатовимірних моментних задач, де моменти визначаються для функцій декількох змінних, що приводить до аналізу багатовимірних ймовірнісних розподілів та їхніх моментних характеристик. Одним із напрямів досліджень є матрична проблема моментів, де замість скалярних моментів розглядаються матричні послідовності, що мають застосування у спектральному аналізі випадкових матриць та квантовій механіці. У цьому випадку міра $d\mu(x)$ визначається як матрична функція, що узгоджується з заданою послідовністю матричних моментів. Операторна проблема моментів розглядається у функціональному аналізі як задача відшукання спектральної міри самоспряженого оператора за заданими моментами його спектрального розкладу. Це приводить до розгляду спектральних рівнянь та використання теорії ортогональних функцій, що дає можливість застосовувати моментні методи для розв'язку рівнянь квантової механіки та нелінійних диференціальних рівнянь. У цьому контексті класична проблема моментів узагальнюється на випадки, де міра $d\mu(x)$ є мірою операторного спектра, а моменти визначаються через операторні розподіли [6, с. 12].

Генералізована проблема моментів є розширенням класичної проблеми моментів, що охоплює ширший клас задач, у яких моментні умови накладаються на функціональні простори, оператори або випадкові величини. Це узагальнення дозволяє застосовувати методи моментного аналізу до широкого спектра задач у функціональному аналізі, теорії ймовірностей, спектральному аналізі та чисельних методах апроксимації. Основне питання генералізованої проблеми моментів полягає у знаходженні міри $d\mu(x)$, яка відповідає заданій послідовності моментів cn, тобто задовольняє рівність

$$c_n = \int x^{\mathrm{n}}\, d(x)$$

причому множина допустимих розподілів міри розширюється через введення додаткових обмежень. Такі обмеження можуть бути накладені на носій міри, її гладкість, компактність або певні функціональні властивості, що визначає розв'язність задачі в різних постановках.

Одним із варіантів генералізованої проблеми моментів є обмеження на розподіл моментів у межах фіксованих інтервалів або заданих симетрій. Це означає, що замість класичної задачі, де моменти є довільними числами, досліджується випадок, коли вони повинні задовольняти певні рівняння чи нерівності. Наприклад, умова позитивної визначеності матриці Грама моментів є стандартним обмеженням у теорії моментів, що визначає фізично допустимі розподіли. Такі обмеження відіграють фундаментальну роль у спектральному аналізі, оскільки вони забезпечують можливість знаходження розв'язку через операторні методи. У фізиці та ймовірнісному аналізі такі умови визначають можливість побудови міри, яка відображає фізично реалізовані системи або стохастичні процеси.

Генералізовані моментні задачі часто формулюються у вигляді задач оптимізації, де цільова функція відображає певні властивості шуканої міри. Це включає мінімізацію ентропії, максимізацію гладкості або забезпечення певних умов регуляризації. Одним із широко застосованих методів у такій постановці є використання апроксимації Паде, де моментні послідовності застосовуються для наближеного відновлення функцій. Вивчення умов розв'язності задачі моментів із обмеженнями також включає дослідження функціональних просторів, у яких визначаються ці моменти, що забезпечує можливість узагальнення результатів на простори більшої розмірності або операторні системи.

Багатовимірна генералізована проблема моментів розглядається в контексті узагальнення класичних задач на простори R^n або C^n. У цьому випадку моменти визначаються як інтеграли від багатовимірних змінних щодо міри, яка має задовольняти певні умови регулярності. Зокрема, такі задачі виникають у спектральному аналізі випадкових матриць, де моменти визначають характеристики спектральних розподілів. Важливим прикладом є багатовимірна тригонометрична проблема моментів, де шукається міра на торі T^n, що визначає гармонічний аналіз у багатовимірних просторах [36, с. 17].

Матрична генералізована проблема моментів є ще одним напрямом дослідження, у якому замість скалярних моментів c_n розглядаються матриці C_n, які повинні відповідати певним умовам на спектр та власні значення. Це дозволяє аналізувати операторні моменти та їхню розв'язність у випадку нескінченновимірних гільбертових просторів. У квантовій механіці такі задачі мають застосування у спектральному аналізі гамільтоніанів, де моментні характеристики визначають розподіл власних значень квантових операторів. У стохастичному аналізі матрична проблема моментів використовується для моделювання випадкових процесів із корельованими складовими, що є важливим у фінансовому моделюванні та аналізі економічних даних.

Усічена генералізована проблема моментів є окремим випадком, у якому розглядається обмежена кількість моментів і необхідно знайти відповідну міру, яка задовольняє задані умови. Це особливо актуально для чисельних методів, оскільки багато прикладних задач пов’язані з обчисленням розв’язку на основі обмеженої кількості емпіричних даних. Такі задачі виникають у статистиці, машинному навчанні та аналізі сигналів, де моменти використовуються для відновлення невідомих розподілів на основі обмежених вибірок. Використання методів регуляризації дозволяє розв’язувати такі задачі навіть у випадках, коли задані моменти містять неточності або випадкові похибки.

Операторна генералізована проблема моментів розглядається у контексті теорії лінійних операторів, де моменти визначаються як функціонали від операторних величин. Це розширення класичної теорії моментів на операторні алгебри дозволяє аналізувати спектральні характеристики самоспряжених операторів, які відіграють фундаментальну роль у функціональному аналізі та квантовій механіці. Зокрема, такі задачі застосовуються для аналізу квантових систем із обмеженнями на спостережувані величини, що визначає їхню реалізованість у фізичних процесах. Генералізована проблема моментів також застосовується в теорії ймовірностей для аналізу відновлення розподілів за обмеженим набором статистичних характеристик. У такому контексті моменти визначають характеристики випадкових процесів, які можуть мати складну структуру кореляцій або залежності. Узагальнені підходи дозволяють знайти найкращі апроксимації розподілів, які відповідають заданим моментам, що використовується у фінансовій математиці, обчислювальній статистиці та теорії оптимального керування [17, с. 78].

Стохастична проблема моментів виникає у контексті аналізу випадкових процесів, де моментні характеристики використовуються для опису розподілів ймовірностей, стохастичних залежностей та еволюції випадкових систем. Формулювання стохастичної проблеми моментів включає пошук міри $d\mu(x)$, яка відповідає заданій послідовності моментів, причому ця міра визначає ймовірнісний розподіл випадкової величини або процесу. Основне питання стохастичної проблеми моментів полягає у встановленні умов, за яких існує розподіл, що відповідає заданим моментам, а також у визначенні його єдиності. Загальна постановка цієї задачі може бути виражена у вигляді рівності

$$c_n = \int x^{\mathrm{n}}\, d(x)$$

де c_n – задана послідовність моментів, яка характеризує розподіл випадкової величини або стохастичного процесу. Аналіз стохастичної проблеми моментів використовується для відновлення ймовірнісних розподілів на основі обмеженого набору спостережуваних характеристик, що має широке застосування в статистиці, фінансовій математиці, фізиці та теорії керування [38, с. 6].

Одним із напрямів дослідження стохастичної проблеми моментів є встановлення умов існування міри, яка відповідає заданим моментам. Для цього використовуються методи спектрального аналізу, теорії інтегральних рівнянь та функціонального аналізу. Важливим інструментом є позитивна визначеність послідовності моментів, що забезпечує можливість відновлення розподілу. Якщо моментна послідовність задовольняє умови Карлемана або Стільтьєса, то відповідний розподіл є єдиним. В іншому випадку виникає задача опису всіх можливих розподілів, що відповідають заданим моментам. Це має значення у статистичному аналізі, де відновлення ймовірнісного розподілу за моментними характеристиками є необхідним для моделювання складних стохастичних процесів.

Стохастична проблема моментів тісно пов’язана з теорією випадкових процесів, де моментні характеристики використовуються для опису динаміки та залежностей між випадковими змінними у часі. Одним із застосувань є аналіз марковських процесів, де моменти визначають умови переходу між станами та характеристики ймовірнісних траєкторій. У цьому випадку стохастична проблема моментів формулюється як задача відновлення функції густини перехідних ймовірностей на основі обмеженого набору моментів. Для марковських процесів вивчення моментів дозволяє аналізувати стаціонарні розподіли, властивості збіжності та умови ергодичності. У фінансовій математиці такі задачі використовуються для побудови моделей стохастичної волатильності, де моментні умови накладаються на ймовірнісні розподіли ринкових активів.

У теорії випадкових матриць стохастична проблема моментів виникає при аналізі спектральних характеристик великих випадкових матриць, де моменти визначають розподіл власних значень. Цей напрям досліджень використовується у квантовій механіці, статистичній фізиці та обчислювальній математиці. Аналіз спектральних моментів дозволяє отримувати апроксимації для випадкових розподілів, що використовуються у статистичних методах аналізу великих даних. У цьому контексті стохастична проблема моментів формулюється як задача визначення спектрального розподілу матриці за обмеженим набором її моментів [26].

Стохастичні моментні задачі також мають застосування у теорії оптимального керування, де моменти використовуються для побудови моделей стохастичних процесів, що керуються зовнішніми впливами. У таких задачах моментні рівняння визначають динаміку випадкових змінних, що підпорядковуються стохастичним диференціальним рівнянням. Це є основою для розрахунку оптимальних стратегій керування у невизначених умовах. Аналіз моментів дозволяє оцінити розподіл ймовірностей у просторі станів та визначити характеристики оптимальних траєкторій. Такі методи широко застосовуються у фінансах, теорії ризиків, моделюванні екологічних систем та обробці сигналів. У статистиці стохастична проблема моментів виникає при оцінюванні параметрів ймовірнісних моделей, де моменти використовуються для апроксимації розподілів вибіркових даних. Методи моментних оцінок дозволяють отримувати параметричні моделі на основі емпіричних моментів, що є альтернативою максимальному правдоподібності. Використання моментних умов у статистичному аналізі забезпечує можливість оцінки параметрів у випадку неповної інформації або за наявності стохастичних похибок у вимірах. Це має значення для машинного навчання, де моментні методи застосовуються для побудови стохастичних моделей та апроксимації складних розподілів у великих вибірках.

1.3. Використання теорії моментів у математичному аналізі

Моменти широко застосовуються в математичному аналізі для наближеного представлення функцій у вигляді ортогональних рядів. Використання теорії моментів у цьому контексті ґрунтується на тому, що моменти містять інформацію про поведінку функції, зокрема про її середнє значення, дисперсію та вищі статистичні характеристики. Визначаючи моменти функції, можна здійснити апроксимацію за допомогою ортогональних поліномів, що дозволяє отримати компактне представлення функції у вигляді нескінченного або частково обмеженого ряду. Цей підхід застосовується в різних розділах математики та суміжних наук, таких як спектральний аналіз, теорія наближень, теорія сигналів, ймовірнісні методи та чисельний аналіз. Ортогональні ряди, побудовані на основі моментів, забезпечують зручний інструмент для інтерполяції, апроксимації та відновлення функцій у випадках, коли аналітичне представлення функції є складним або недоступним. Різні типи ортогональних поліномів, зокрема поліноми Лежандра, Чебишова, Ерміта та Лагерра, використовуються залежно від властивостей функції, що апроксимується, та обраного скалярного добутку в просторах функцій. Ортогональні поліноми утворюють базис у відповідних функціональних просторах, що дозволяє здійснювати ефективне розкладання функцій у вигляді рядів за цими базисами. Використання таких рядів сприяє точному відновленню функцій та дослідженню їхніх властивостей, зокрема гладкості, симетрії та періодичності [10, с. 73].

Теорія моментів відіграє суттєву роль у визначенні коефіцієнтів розкладу функцій в ортогональних рядах. Моменти першого порядку відповідають середньому значенню функції, моменти другого порядку характеризують її дисперсію, а моменти вищих порядків містять інформацію про вищі статистичні характеристики функції, такі як асиметрія та ексцес. Для відновлення функції на основі моментів застосовуються різні методи, серед яких особливе місце займають методи ортогональних поліномів та методи згладжування моментів. Якщо функція апроксимується ортогональним рядом, її наближення можна записати у вигляді суми:

$$f(x) \approx \sum_{\mathrm{n}}{}^{\infty} c(n) P(n, x)$$

,де P(n, x) – ортогональні поліноми, а коефіцієнти c(n) визначаються через моменти функції. У разі скінченного числа моментів апроксимація обмежується кінцевою кількістю членів ряду. Використання теорії моментів у такому контексті дозволяє розглядати апроксимацію з точки зору мінімізації квадратичної похибки, що приводить до оптимального наближення функції в середньому квадратичному сенсі. Залежно від конкретної задачі можуть використовуватися різні системи ортогональних поліномів, що дозволяють пристосувати метод апроксимації до специфіки досліджуваної функції.

Особливу увагу в теорії моментів приділяють питанням стійкості апроксимації, оскільки на практиці моменти функції можуть бути відомі з певною похибкою. У таких випадках застосовуються регуляризаційні методи, що дозволяють зменшити вплив похибок у визначенні моментів на результати апроксимації. До таких методів належать метод Тіхонова, метод усічених рядів та методи спектрального згладжування. Вони забезпечують стійкі оцінки для коефіцієнтів розкладу та дозволяють мінімізувати вплив флуктуацій у вихідних даних. Регуляризаційні методи особливо ефективні при роботі з функціями, що мають значні коливання або розриви, оскільки вони дозволяють контролювати рівень гладкості отриманого наближення. Окрім того, для визначення моментів можуть використовуватися чисельні методи інтегрування, що дозволяють оцінити моменти навіть у випадках, коли функція задана дискретно або містить сингулярності [24, с. 75].

У рамках теорії моментів широко застосовуються методи побудови апроксимаційних рядів із заданими властивостями. При наближенні функцій на скінченному інтервалі використовуються поліноми Лежандра або Чебишова першого та другого роду. Поліноми Чебишова мають особливу властивість мінімізації максимальної похибки апроксимації, що робить їх корисними для рівномірного наближення функцій. У випадку функцій, що визначені на всій числовій осі, застосовуються поліноми Ерміта або Лагерра, які є ортогональними з відповідними ваговими функціями. Це дозволяє будувати оптимальні наближення функцій у випадках, коли необхідно враховувати поведінку функції при великих значеннях аргументу. Використання вагових функцій у побудові ортогональних базисів забезпечує ефективне представлення функцій у різних просторах та дозволяє адаптувати методи апроксимації до конкретних умов задачі.

Аналіз апроксимаційної здатності моментів дозволяє оцінювати точність наближення функцій у різних просторах. У просторі L^2 апроксимація функції ортогональним рядом забезпечує мінімізацію середньоквадратичної похибки, тоді як у просторі L^∞ може застосовуватися рівномірна апроксимація, що гарантує мінімальну максимальну похибку. Для аналізу збіжності рядів використовуються різні критерії, такі як критерій Абеля, критерій Діріхле та умови рівномірної збіжності Вейєрштрасса. Ці критерії дозволяють досліджувати умови, за яких апроксимаційні ряди з моментами забезпечують точне відновлення функції на заданому інтервалі або в усій області визначення. Якщо моменти функції відомі лише з обмеженою точністю, застосовуються методи згладжування або регуляризації, які дозволяють зменшити вплив випадкових похибок на результати апроксимації.

Залежно від задачі можуть використовуватися різні алгоритми обчислення моментів, зокрема методи Гаусса-Лагерра, Гаусса-Лежандра та інші чисельні методи, що забезпечують високу точність обчислень [51, с. 17].

Теорія моментів у спектральному аналізі відіграє значну роль у вивченні спектральних властивостей функцій та операторів. Спектральний аналіз охоплює дослідження властивостей спектрів операторів у функціональних просторах, що є особливо корисним у квантовій механіці, теорії коливань, чисельному аналізі та інших розділах математики. Моменти використовуються для визначення характеристик операторів та оцінки спектральних функцій, що дозволяє отримати інформацію про їхню поведінку та збіжність власних значень. Аналіз моментів спектральних функцій дозволяє знаходити оцінки для власних значень диференціальних та інтегральних операторів, що є суттєвим для розв’язання спектральних задач. Визначення моментів спектральної міри є одним із основних методів у вивченні спектральної теорії, оскільки моменти містять інформацію про властивості оператора та дозволяють будувати апроксимації для його спектра. Одним із класичних підходів до аналізу моментів у спектральній теорії є метод моментів Гамбургера, який дозволяє встановлювати кореляції між послідовністю моментів та характеристиками спектральної міри. Спектральні моменти широко застосовуються для вивчення розподілу власних значень операторів, що дозволяє аналізувати їхню густину та обчислювати інваріанти спектра.

Математичне формулювання теорії моментів у спектральному аналізі базується на представленні функцій у вигляді рядів, де моменти визначають коефіцієнти розкладу. Розглянемо спектральний оператор із власними значеннями, що відповідають деякому самоспряженому оператору. Якщо функція належить до класу квадратично інтегрованих функцій, то її спектральне представлення можна записати у вигляді інтегралу Фур'є-Стилтьєса. У цьому випадку моменти спектральної міри визначають інтегральні характеристики оператора та дозволяють відновити його спектральну функцію. Використання моментів у такому контексті дозволяє оцінювати спектральний радіус оператора, що є суттєвим у дослідженні його властивостей. Моменти спектральних мір визначаються інтегралами вигляду

$$m(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x)$$

де μ(x) – спектральна міра оператора. Якщо послідовність моментів визначена, можна відновити відповідну спектральну функцію, що дозволяє аналізувати оператор та його власні значення. Використання моментів у спектральному аналізі також знаходить застосування в дослідженні напівгруп операторів, що використовуються для моделювання еволюційних процесів у квантовій механіці, теорії теплопровідності та динамічних системах. Теорія моментів дозволяє визначити наближені значення власних чисел операторів, що є важливим у чисельних методах розв'язання спектральних задач. Використання моментів у спектральному аналізі функцій знаходить застосування в оцінюванні розподілу власних значень випадкових матриць, що має велике значення в математичній фізиці та теорії випадкових процесів.

Зв'язок теорії моментів із варіаційним численням проявляється в задачах мінімізації функціоналів, що містять моменти як параметри. Варіаційне числення досліджує екстремальні властивості функціоналів і знаходить оптимальні функції, що задовольняють певні обмеження. Якщо функціонал залежить від моментів функції, задача оптимізації приводить до побудови систем рівнянь, що визначають оптимальні моменти. У багатьох задачах функціонал набуває вигляду

$$F = \int L(x, f(x), f^{\wedge\prime}(x), \ldots, f^{\wedge}(^{n\wedge})(x))dx$$

де L – функція Лагранжа, яка залежить від моментів функції та її похідних. Оптимізаційні методи дозволяють визначити мінімальні значення таких функціоналів, що знаходить застосування в задачах теоретичної механіки, оптимального керування, теорії пружності та статистичній фізиці. Якщо моменти функції використовуються як параметри в задачі варіаційного числення, то їхній вибір визначає властивості розв'язку. Наприклад, у задачах про знаходження мінімального об'єму фігури при фіксованих моментах інерції варіаційні методи дозволяють отримати оптимальну форму тіла, що задовольняє фізичні умови рівноваги. У багатьох задачах моментний підхід дозволяє зменшити розмірність варіаційної задачі та спростити аналітичні викладки [48].

Методи моментів застосовуються в чисельному розв’язанні варіаційних задач, де функціонал мінімізується на множині функцій, представлених у вигляді рядів за ортогональними базисами. Використання поліноміальних апроксимацій у варіаційних задачах дозволяє отримати високоточні наближення для функцій, що мінімізують функціонали. У багатьох випадках варіаційні задачі з моментами виникають у фізиці плазми, квантовій механіці, механіці деформівних середовищ, економічному моделюванні та теорії пружності. Важливим напрямом є застосування методів моментів у задачах оптимального керування, де оптимізація здійснюється з урахуванням моментів розподілу станів системи. Використання методів моментів у варіаційних задачах дозволяє отримати узагальнені критерії оптимальності, що застосовуються в теорії керування та аналізі динамічних систем.

Методи моментів у варіаційному численні знаходять застосування в задачах мінімізації енергетичних функціоналів, що є суттєвими для механіки та фізики. Наприклад, у теорії гравітаційного потенціалу використання моментів дозволяє апроксимувати розподіл маси та визначати рівноважні конфігурації небесних тіл. Аналогічно, у задачах пружності та гідродинаміки моменти використовуються для побудови варіаційних апроксимацій, що описують рух рідини чи твердого тіла. У статистичній фізиці моменти розподілів визначають середні значення фізичних величин, що дозволяє отримувати аналітичні вирази для термодинамічних характеристик. Використання теорії моментів у варіаційних методах також має значення у фінансовій математиці, де моменти застосовуються для побудови оптимальних інвестиційних стратегій та оцінки ризиків.

РОЗДІЛ 2. КОМПЛЕКСНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

2.1. Визначення та основні властивості

Комплексна проблема моментів є одним із фундаментальних питань функціонального аналізу та теорії апроксимації. Вона формулюється як задача знаходження функції або міри, яка задовольняє певні рівняння для її моментів. Це означає, що необхідно визначити функцію, для якої задана послідовність моментів є точною, або знайти міру, що породжує задані моменти. Формальна постановка проблеми моментів має широке застосування в математичному аналізі, спектральній теорії, теорії ймовірностей, квантовій механіці, чисельному аналізі та статистиці. Вона полягає в тому, щоб знайти міру, яка узгоджується із заданими моментами, якщо такі існують. У загальному вигляді комплексна проблема моментів формулюється через рівність інтегралів, які визначають моменти міри. Для заданої послідовності моментів необхідно знайти міру, що породжує цю послідовність, тобто виконує інтегральні умови моментів у відповідному функціональному просторі. Це зводиться до розв’язання рівнянь вигляду

$$m(n) = \int_a^b \quad x^n d\mu(x)$$

де m(n) – задана послідовність моментів, а μ(x) – шуканий розподіл. Якщо такий розподіл існує, тоді відповідна міра визначає оператори, що узгоджуються з цією системою моментів [12, с. 47].

Розрізняють кілька класичних варіантів проблеми моментів залежно від того, на якому інтервалі задана міра. Якщо моменти визначені на всій числовій осі, розглядається задача моментів Гамбургера, якщо ж моменти визначені на скінченному інтервалі, то розглядається задача моментів Стилтьєса. Відповідно до цього варіюється клас функцій, що можуть бути апроксимовані за допомогою моментів. У разі компактного носія міри можуть бути використані спеціальні методи, що дозволяють оцінити існування та єдиність розв’язку. Однією з основних проблем при розв’язанні таких задач є визначення умов, за яких існує відповідна міра. У класичних випадках умови існування пов'язані з позитивністю деяких матриць моментів, які повинні бути додатно напівозначеними. Це забезпечує можливість відновлення міри на основі моментів та встановлює відповідність між моментами та відповідною спектральною мірою оператора, що породжує їх. Якщо ці умови не виконуються, то задача моментів може не мати розв’язку, або існуючий розв’язок може не бути єдиним.

Дослідження існування та єдиності розв’язку проблеми моментів ґрунтується на функціонально-аналітичних методах. Використовуються методи розширення операторів, аналіз спектральних функцій та вивчення властивостей операторних алгебр. Формулювання проблеми моментів через оператори дає змогу розглядати її у більш загальному контексті, пов’язаному із самоспряженими та нормальними операторами в гільбертовому просторі. В цьому випадку задача моментів пов’язана з дослідженням спектра відповідного оператора, який визначає моменти через свою спектральну міру. Визначення операторної міри, що узгоджується з моментами, дозволяє досліджувати асимптотичні властивості моментних послідовностей, що знаходить застосування у спектральному аналізі [30].

У класичних варіантах проблеми моментів відомі критерії існування розв’язків, які базуються на аналізі матриць моментів. Якщо моменти є моментами деякого розподілу, тоді відповідна матриця моментів є додатно напівозначеною, і це дозволяє відновити відповідну міру. У разі, коли моменти визначаються на скінченному інтервалі, використовуються методи ортогональних поліномів для побудови міри, що відповідає моментам. Якщо моменти задані на нескінченному інтервалі, то використовується спектральний аналіз операторів та методи граничних значень. Дослідження проблеми моментів у комплексному випадку зводиться до розгляду міри на комплексній площині, що дає змогу узагальнити поняття моментів на випадок аналітичних функцій.

Комплексна проблема моментів має зв'язок із теорією аналітичних функцій та теорією апроксимації, оскільки моменти можуть бути використані для наближеного представлення функцій. Якщо розглядати моменти як коефіцієнти розкладу функцій у базисі ортогональних поліномів, то можна отримати аналітичне представлення функції через її моментну послідовність. Це дозволяє відновлювати функції за заданими моментами та оцінювати їхні аналітичні властивості. У варіаційному аналізі моменти використовуються для формулювання умов оптимальності та знаходження розв'язків мінімізаційних задач. Якщо функціонал залежить від моментів функції, то оптимальні моменти визначають форму розв'язку варіаційної задачі. Використання моментів у цьому контексті дає змогу отримати ефективні методи чисельного розв'язання варіаційних задач та апроксимації функцій у функціональних просторах [18, с. 55].

Розв'язок проблеми моментів тісно пов'язаний із побудовою поліноміальних апроксимацій, оскільки моменти можуть бути використані для побудови поліномів, що найкраще наближають задану функцію. У цьому контексті моменти дозволяють отримати оптимальні розклади функцій у базисах ортогональних поліномів, що знаходить застосування у спектральному методі розв'язання диференціальних рівнянь. Якщо моментна послідовність визначає функцію, що задовольняє певні аналітичні умови, то відповідні ортогональні поліноми можуть бути використані для апроксимації цієї функції. Використання моментів у спектральному аналізі функцій дає змогу оцінювати точність апроксимації та знаходити найкращі наближення функцій у відповідних функціональних просторах.

Умови розв'язності задач у функціональному аналізі є основним предметом досліджень, оскільки визначення необхідних і достатніх умов для існування розв'язку дозволяє формулювати загальні принципи розв'язності рівнянь у функціональних просторах. У контексті теорії моментів та наближених методів вирішення рівнянь, питання існування розв'язку пов'язане з умовами на задані функції, обмеженнями на параметри задачі та вибором відповідного простору функцій, у якому шукається розв’язок. Якщо рівняння або система рівнянь містить моментні обмеження, їхній розв’язок можливий лише за певних умов, що забезпечують узгодженість моментів із шуканою функцією або мірою. Однією з основних умов існування розв’язку є позитивність відповідних матриць моментів, що гарантує можливість відновлення міри, яка породжує задані моменти. У варіаційних задачах моментні умови накладають обмеження на допустимий клас функцій, що дозволяє забезпечити існування оптимального розв’язку, мінімізуючи відповідний функціонал. Якщо функціонал залежить від моментів, умови його розв’язності визначаються збереженням властивостей гладкості та неперервності функцій, що входять до задачі [1, с. 13].

Аналіз розв’язності в функціональних просторах передбачає вивчення компактності операторів, властивостей їхніх спектрів та збіжності апроксимаційних методів. Якщо оператор, що задає рівняння, є компактним, тоді існує можливість апроксимації його власних значень скінченною системою моментів, що дозволяє знаходити наближені розв’язки рівнянь з моментними умовами. В іншому випадку, коли оператор не є компактним або має невласний спектр, розв’язок може не існувати, або його можна знайти лише в узагальненому сенсі, застосовуючи методи регуляризації. Визначення необхідних і достатніх умов для існування розв’язку таких задач базується на дослідженні спектральних характеристик операторів та їхніх властивостей у функціональних просторах. Зокрема, якщо оператор має спектр, що складається лише з дискретного набору власних значень, тоді можна гарантувати існування розв’язку у відповідному просторі. Якщо ж спектр є неперервним, тоді можливе лише наближене відновлення функцій за моментами, що вимагає застосування методів згладжування та регуляризації.

Умова єдиності розв’язку також залежить від структури моментної послідовності та властивостей операторів, що визначають її поведінку. У випадку, коли моменти задовольняють певні нерівності або обмеження на зростання, можна гарантувати єдиність розв’язку. Якщо такі обмеження відсутні, тоді задача моментів може мати нескінченно багато розв'язків, що ускладнює її чисельне розв'язання. У таких випадках застосовуються додаткові умови регуляризації, що дозволяють звузити множину допустимих розв'язків та отримати найкраще наближення функції. У спектральному аналізі умови розв'язності визначаються через спектральну міру оператора, що породжує моментну послідовність. Якщо спектральна міра визначена коректно, тоді можна відновити відповідний оператор та знайти його власні значення за допомогою моментного представлення. Використання методів моментів у спектральному аналізі дозволяє досліджувати існування та єдиність розв'язку операторних рівнянь, що мають фізичну або геометричну інтерпретацію. У задачах з моментами варіаційного типу умови розв'язності можуть бути сформульовані через властивості функціоналів, що мінімізуються, та їхню диференційовність у відповідному функціональному просторі [4, с. 19].

Залежність від вибору базису є суттєвим питанням при розв'язанні рівнянь моментного типу та апроксимаційних задач у функціональних просторах. Вибір базисних функцій безпосередньо впливає на точність розв'язку, оскільки різні базиси можуть давати різні швидкості збіжності апроксимаційних рядів. Якщо вибір базису не враховує особливості розглядуваної задачі, тоді похибка апроксимації може бути значною, що унеможливлює точне відновлення функції за моментами. У задачах, де функції мають симетричні або періодичні властивості, найефективніше використовувати базиси, що відображають ці особливості. Наприклад, якщо функція має парність або непарність, то зручніше використовувати ортогональні базиси, що складаються з поліномів Чебишова або Лежандра, оскільки вони забезпечують швидку збіжність моментного розкладу.

2.2. Методи розв'язання комплексної проблеми моментів

Аналітичні методи в теорії моментів та функціональному аналізі включають класичні методи інтегрування, операторний аналіз та застосування спеціальних функцій для розв’язання рівнянь моментного типу. Використання аналітичних методів дозволяє досліджувати властивості моментних функцій, відновлювати спектральні характеристики операторів та знаходити точні розв’язки інтегральних рівнянь, пов’язаних із моментами. У загальному випадку аналітичний підхід базується на використанні методів функціонального аналізу, які дозволяють формалізувати задачу моментів у просторі функцій та визначити умови її розв’язності. Якщо моменти визначаються через інтегральні перетворення, то розв’язок відповідного рівняння зводиться до оберненого перетворення, що дозволяє відновити функцію за її моментами. Використання класичних методів інтегрування дозволяє отримати аналітичні вирази для моментних функцій, що полегшує їх дослідження та апроксимацію. Якщо моменти задані у вигляді інтегральних характеристик функції, то їхній розрахунок можна здійснити за допомогою методу підстановки, інтегрування частинами або спеціальних інтегралів, які використовуються в теорії спеціальних функцій [19, с. 69].

Методи функціонального аналізу дозволяють досліджувати властивості моментних функцій у функціональних просторах та визначати їхню збіжність у відповідних нормах. Якщо моментна функція розглядається в просторі квадратично інтегрованих функцій, то її властивості можуть бути визначені через операторні методи, що дозволяють встановити зв’язок між моментами та спектральними характеристиками операторів. Аналіз моментних функцій у функціональних просторах дозволяє використовувати методи теорії розширень операторів для розв’язання задач моментного типу. Якщо моментна функція визначається через операторне рівняння, то її розв’язок можна знайти за допомогою спектрального розкладу оператора, що задає моменти. Використання аналітичних методів у таких задачах дозволяє отримати точні вирази для моментів, що забезпечує їхнє застосування в спектральному аналізі та чисельних методах. У деяких випадках використання спеціальних функцій, таких як функції Бесселя, Лежандра або Лагерра, дозволяє отримати аналітичні розв'язки моментних рівнянь та визначити їхню збіжність у відповідних просторах.

Застосування класичних методів інтегрування в аналізі моментних функцій включає використання спеціальних інтегральних перетворень, таких як перетворення Лапласа, Фур'є та Стилтьєса. Якщо моменти визначаються через інтегральне представлення, то їхній аналітичний вираз можна знайти за допомогою оберненого інтегрального перетворення. Наприклад, якщо функція визначається через моментний інтеграл, то її відновлення можна здійснити за допомогою інтегрального рівняння вигляду

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\mu(t)dt$$

де K(x, t) – ядро інтегрального перетворення, а μ(t) – функція моментів. Використання аналітичних методів у такому контексті дозволяє знаходити точні вирази для функцій моментів та визначати їхні властивості. Якщо моментна функція визначається через операторне рівняння, то її розв'язок можна знайти за допомогою методу спектрального розкладу оператора, що визначає моменти. Аналіз моментних функцій за допомогою методів функціонального аналізу дозволяє визначити умови їхньої збіжності та отримати оцінки для похибки наближення. У випадках, коли моменти визначаються через інтегральні характеристики функції, використання класичних методів інтегрування дозволяє отримати аналітичні вирази для моментних функцій та визначити їхні властивості у відповідних функціональних просторах [28, с. 7].

Аналітичні методи в задачах моментного типу застосовуються для розв'язання інтегральних рівнянь, що описують моментні характеристики функцій. Якщо моменти визначаються через інтегральні представлення, то їхній аналітичний аналіз дозволяє отримати оцінки для збіжності моментних послідовностей та знайти їхні аналітичні вирази. Використання класичних методів інтегрування дозволяє знаходити точні розв'язки моментних рівнянь та визначати їхні аналітичні властивості. У задачах спектрального аналізу аналітичні методи використовуються для відновлення моментних характеристик спектральних функцій та аналізу їхніх властивостей. Якщо моментні функції визначаються через операторні рівняння, то їхній розв'язок можна знайти за допомогою методу спектрального розкладу оператора, що задає моменти. Аналіз моментних функцій за допомогою методів функціонального аналізу дозволяє визначити їхні властивості у відповідних функціональних просторах та отримати оцінки для їхньої збіжності. У випадках, коли моменти визначаються через інтегральні характеристики функції, використання класичних методів інтегрування дозволяє знайти їхні аналітичні вирази та оцінити похибку наближення.

Методи функціонального аналізу дозволяють визначати властивості моментних функцій у функціональних просторах та досліджувати їхню збіжність у відповідних нормованих просторах. Якщо моментні функції розглядаються у просторі квадратично інтегрованих функцій, то їхні властивості можуть бути визначені через операторні методи, що дозволяють встановити зв'язок між моментами та спектральними характеристиками операторів. Використання аналітичних методів у таких задачах дозволяє отримати точні вирази для моментів та визначити їхні властивості у відповідних функціональних просторах. У деяких випадках використання спеціальних функцій, таких як функції Бесселя, Лежандра або Лагерра, дозволяє отримати аналітичні розв'язки моментних рівнянь та визначити їхню збіжність у відповідних просторах. Якщо моментні функції визначаються через інтегральні представлення, то їхній аналітичний аналіз дозволяє отримати оцінки для збіжності моментних послідовностей та знайти їхні аналітичні вирази [13, с. 51].

Наближені чисельні методи у розв'язанні задач апроксимації функцій ґрунтуються на використанні різних методів дискретизації, інтерполяції та чисельного інтегрування. У випадках, коли функцію неможливо представити у закритому вигляді або знайти точний аналітичний вираз, застосовуються методи апроксимації, що дозволяють наближено відновити її поведінку.

Найпоширенішими підходами є поліноміальні апроксимації, інтерполяція сплайнами, розклади у базисах ортогональних функцій та методи спектральної апроксимації. Поліноміальна апроксимація базується на представленні функції через поліноми певного степеня, де коефіцієнти обчислюються таким чином, щоб мінімізувати похибку наближення. Якщо апроксимація здійснюється ортогональними поліномами, такими як поліноми Лежандра, Чебишова, Ерміта чи Лагерра, то апроксимаційний ряд забезпечує оптимальну точність у відповідному функціональному просторі. Інтерполяція сплайнами дозволяє будувати гладкі апроксимації, що забезпечують точність на локальних ділянках функції, а методи розкладу в ортогональних базисах використовуються для представлення складних функцій у вигляді нескінченних або обмежених сум елементарних функцій. Чисельні методи апроксимації функцій знаходять застосування у спектральному аналізі, де моменти функції визначаються через чисельні методи інтегрування та використовуються для відновлення спектральної структури оператора [8, с. 3].

Обчислювальні алгоритми апроксимації використовують різні підходи до знаходження оптимальних параметрів апроксимаційних функцій. Якщо необхідно наблизити функцію у скінченному просторі, використовується метод найменших квадратів, що забезпечує мінімізацію середньоквадратичної похибки апроксимації. У спектральних методах апроксимація здійснюється шляхом розкладу функції у базисі власних функцій оператора, що дозволяє будувати високоточні наближення на основі властивостей спектра. Чисельні методи апроксимації функцій також включають методи Монте-Карло, що дозволяють оцінювати моменти випадкових функцій та використовуються у ймовірнісних методах наближеного обчислення інтегралів. Якщо функція задана у вигляді вибірки значень у вузлах, використовуються методи кусочно-поліноміальної апроксимації або згладжувальні алгоритми, що забезпечують точність відновлення функції навіть у випадку наявності шуму у вихідних даних. Методи наближеної апроксимації широко застосовуються у чисельному аналізі та оптимізації, оскільки вони дозволяють розглядати складні функціональні залежності, що не піддаються аналітичному розв’язанню.

Методи оптимізації у варіаційних задачах та нелінійній оптимізації використовуються для знаходження мінімуму або максимуму функціоналів у функціональних просторах. Варіаційний підхід ґрунтується на знаходженні функції, що мінімізує або максимізує деякий функціонал, і використовується в задачах механіки, фізики, економіки та інших прикладних дисциплін. Якщо функціонал містить моменти функції, оптимізація здійснюється через знаходження найкращої апроксимації функції у відповідному просторі. Варіаційні методи включають принципи Ейлера-Лагранжа, методи множників Лагранжа та методи узагальнених варіацій. Якщо варіаційна задача формулюється у вигляді інтегрального функціонала, її розв’язок може бути знайдено шляхом знаходження стаціонарних точок функціонала за допомогою рівнянь Ейлера-Лагранжа. Якщо необхідно знайти оптимальну апроксимацію функції, використовується метод ортогональних проекцій, що дозволяє мінімізувати похибку наближення шляхом знаходження найкращої проекції функції у відповідному просторі [50, с. 99].

Методи нелінійної оптимізації використовуються у випадках, коли функціонал має складну структуру та не піддається аналітичному розв’язанню. Якщо функціонал є нелінійним та містить складні функціональні залежності, використовуються методи градієнтного спуску, методи Ньютона, квазідругі методи та методи стохастичної оптимізації. У чисельних алгоритмах оптимізації часто використовуються адаптивні методи, що дозволяють автоматично вибирати оптимальні параметри для знаходження розв’язку. Якщо оптимізаційна задача має обмеження, використовуються методи множників Лагранжа або методи штрафних функцій, що дозволяють знайти оптимальне рішення в рамках допустимої множини функцій. Якщо оптимізація здійснюється у функціональних просторах, використовуються методи варіаційного числення, що дозволяють знаходити оптимальні функціональні залежності шляхом мінімізації відповідного функціонала. У спектральних методах оптимізації функціонали містять моментні характеристики операторів, що дозволяє знаходити оптимальні параметри апроксимаційних функцій. Якщо функціонал містить моментні обмеження, оптимізація здійснюється через методи регуляризації, що забезпечують стійкість розв’язку при наявності флуктуацій у вихідних даних.

Застосування методів оптимізації в чисельних методах апроксимації функцій дозволяє знаходити оптимальні параметри апроксимаційних функцій та мінімізувати похибку наближення. Якщо функція містить невідомі параметри, їхнє знаходження здійснюється за допомогою методів оптимізації, що дозволяють налаштовувати апроксимаційні моделі на основі вихідних даних. Якщо апроксимація здійснюється у функціональних просторах, використовуються методи проекційного оптимального наближення, що дозволяють знайти найкращу апроксимацію функції у заданому просторі. Чисельні алгоритми оптимізації використовуються у випадках, коли необхідно знайти найкращу апроксимацію функції за моментами, що дозволяє будувати ефективні апроксимаційні моделі та здійснювати спектральний аналіз операторів. Якщо моментні характеристики функції використовуються у варіаційних задачах, методи оптимізації дозволяють знаходити оптимальні апроксимаційні функції, що мінімізують відповідний функціонал.

Методи оптимізації також використовуються у чисельних методах розв’язання моментних рівнянь, що дозволяє знаходити точні наближення для функцій, заданих через моменти. Якщо моментні характеристики функції визначаються через інтегральні перетворення, оптимізація здійснюється шляхом знаходження оптимального представлення функції у спектральному просторі. У таких випадках використовуються методи нелінійної оптимізації, що дозволяють мінімізувати похибку наближення шляхом вибору оптимальних параметрів спектральних функцій. Якщо оптимізація здійснюється у просторі квадратично інтегрованих функцій, використовуються методи ортогональних проекцій, що дозволяють знайти найкраще наближення функції у відповідному просторі. Якщо моментні характеристики функції містять випадкові флуктуації, оптимізація здійснюється через методи регуляризації, що дозволяють стабілізувати розв’язок моментного рівняння та зменшити вплив шуму у вихідних даних.

2.3. Приклади розв’язку комплексної проблеми моментів

Поліноміальні функції займають центральне місце в математичному аналізі та численні, оскільки вони є основним інструментом для апроксимації складніших функцій та опису різних явищ у фізиці, інженерії та економіці. Вивчення моментів поліноміальних функцій є фундаментальним для багатьох математичних методів, включаючи статистику, теорію наближень та ортогональні поліноми. Розв’язок задачі визначення моментів для поліноміальних функцій передбачає аналіз інтегральних виразів виду $\int \quad x^n f(x) dx$, де f(x) є поліномом певного степеня, а межі інтегрування визначаються конкретною задачею. Особливий інтерес становлять випадки, коли моменти можна виразити через степеневі функції, що дозволяє значно спростити числові обчислення та отримати аналітичні вирази, що дають глибше розуміння поведінки функцій [9, с. 10].

Поліноміальні функції можна представити у загальному вигляді як

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

де коефіцієнти a_i є дійсними числами, а n – натуральне число, що визначає степінь полінома. Моменти таких функцій часто визначаються у вигляді інтегралів від добутку p(x) та деякої вагової функції w(x). У випадку степеневих функцій вагова функція w(x) вибирається у вигляді x^m ,що призводить до необхідності обчислення інтегралів виду $\int \quad x^m p(x) dx$ на певному інтервалі. Такі обчислення є основою багатьох застосувань, наприклад, у механіці для обчислення центру мас, у статистиці для знаходження середніх значень та дисперсій, а також у спектральному аналізі та ортогональних розкладаннях функцій.

Якщо розглянути випадок, коли p(x) є простим степеневим поліномом x^k, обчислення моментів перетворюється на задачу визначення інтегралів від степеневих функцій, що мають вигляд

$\int x^{m+k}dx = \frac{x^{m+k+1}}{m+k+1} + C$, де $m + k \neq -1$, а C- стала інтегрування

Це означає, що моменти степеневих поліномів можуть бути виражені через прості раціональні функції від степенів x. У випадку, якщо поліном містить декілька членів, наприклад, $x^k + x^l$, момент визначається як сума окремих інтегралів для кожного з цих членів. Вагомою особливістю є лінійність інтегралів, що дозволяє розглядати кожен доданок окремо та знаходити загальний результат як суму моментів кожного з них.

Коли моменти розглядаються у контексті поліномів загального вигляду, важливим стає використання спеціальних технік, таких як метод частин, розкладання у ряд Тейлора або застосування ортогональних поліномів. У разі ортогональних поліномів, таких як поліноми Лежандра або Чебишова, моменти можуть мати особливу структуру, яка залежить від властивостей вагових функцій та інтервалу інтегрування. Це суттєво впливає на аналітичне представлення результату та його інтерпретацію в різних галузях науки. Випадки, коли моменти визначаються через степеневі функції, мають місце, якщо вагова функція є простою та не містить експоненціальних або тригонометричних множників. У таких ситуаціях результати можуть бути виражені у закритій формі, що значно спрощує подальший аналіз.

Особливий інтерес представляє ситуація, коли поліноміальна функція визначається у вигляді суми степеневих функцій з різними коефіцієнтами. У такому випадку моменти можуть бути знайдені через суму окремих інтегралів, кожен з яких зводиться до стандартного інтегрування степеневої функції. Це дозволяє значно спростити процес знаходження моментів для складних функцій, а також дає змогу отримати оцінки точності апроксимацій та наближень. Для багатьох задач у фізиці та інженерії використання моментів у степеневій формі є основним методом аналізу складних залежностей [14, с. 1].

Загальний підхід до знаходження моментів степеневих функцій базується на застосуванні спеціальних формул для інтегрування поліноміальних виразів та розгляді симетричних випадків, коли інтервал інтегрування є симетричним відносно нуля. У таких випадках деякі моменти можуть звертатися в нуль через властивості симетрії, що значно спрощує аналіз. Якщо ж розглядати моменти для степеневих функцій на довільних інтервалах, варто використовувати методи розкладання на часткові дроби або апроксимаційні техніки для оцінки значень інтегралів.

Розгляд специфічних випадків, коли моменти визначаються через степеневі функції, дозволяє створювати ефективні методи наближених обчислень, що є основою для числових методів вищого порядку. Використання цих методів у математичному моделюванні дає змогу розглядати широке коло задач, включаючи задачі оптимізації, аналізу функціональних залежностей та прогнозування динамічних систем. У рамках теорії ортогональних поліномів моменти відіграють значну роль у побудові ортонормованих базисів, що застосовуються в спектральному аналізі та обчислювальній математиці. В процесі аналізу моментів степеневих функцій можна використовувати різні підходи, що залежать від властивостей поліномів та вибору вагових функцій. Якщо вагова функція є степеневою, моменти можна визначити аналітично, що дозволяє уникнути складних числових методів і отримати точні вирази. У випадку, якщо вагова функція містить додаткові параметри, такі як логарифмічні або тригонометричні множники, аналітичні розв'язки можуть бути складнішими, що потребує застосування спеціальних методів, таких як перетворення Лапласа або розкладання у ряди.

Одним із ключових методів обчислення моментів є застосування спеціальних інтегральних тотожностей, що дозволяють представляти моменти через добутки факторіальних виразів та гамма-функції. Це є особливо корисним у випадках, коли розглядаються моменти поліномів на нескінченних проміжках або в умовах узагальнених функцій. При цьому застосування аналітичних методів дозволяє отримати узагальнені вирази для моментів, що можуть бути використані в різних розділах математики та її застосувань.

У математичній фізиці диференціальні рівняння використовуються для опису широкого спектра явищ, включаючи процеси теплопровідності, механіку суцільних середовищ, гідродинаміку, електродинаміку та квантову механіку. Серед таких рівнянь рівняння теплопровідності займає центральне місце у фізичних та інженерних дослідженнях, оскільки воно описує процес розподілу температури в середовищі з урахуванням її зміни в часі. Одним із методів розв'язку рівнянь теплопровідності є використання моментів, що дозволяє отримати узагальнені характеристики температурного поля, які значно спрощують аналіз складних систем. Моментний підхід у рівняннях теплопровідності ґрунтується на представленні температури як функції часу та просторових змінних у вигляді поліноміальних виразів, що дозволяє зводити задачу до розв'язку алгебраїчних систем рівнянь для моментів температурного розподілу [49, с. 9].

У випадку одномірного рівняння теплопровідності з постійним коефіцієнтом теплопровідності k рівняння набуває вигляду $\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Використання методів моментів передбачає введення функцій вигляду $M_n(t) = \int x^n T(x,t) dx$, що визначають моменти розподілу температури у просторі. Диференціюючи ці моменти за часом та застосовуючи рівняння теплопровідності, можна отримати систему рівнянь, що описує динаміку зміни моментів. У ряді випадків, коли температура має певну симетрію або коли розглядаються випадки швидкого затухання температурного градієнта, моменти можуть бути виражені через степеневі функції, що значно спрощує розрахунки та дозволяє отримати точні аналітичні розв'язки.

Використання моментного методу для рівнянь теплопровідності має численні застосування у фізиці та інженерії, оскільки дозволяє будувати наближені моделі температурного розподілу без необхідності чисельного інтегрування рівнянь у кожній точці простору. У задачах теплообміну в багатошарових матеріалах моменти можуть використовуватися для оцінки ефективної теплопровідності системи та прогнозування температурних режимів при змінних зовнішніх умовах. У теорії дифузійних процесів моментний підхід дозволяє отримувати оцінки швидкості поширення теплових хвиль та прогнозувати можливі нерівномірності в розподілі температури. Зокрема, в задачах нелінійної теплопровідності моменти використовуються для розгляду складних ефектів, пов'язаних із температурною залежністю теплофізичних параметрів матеріалу, що є важливим для моделювання процесів у високотемпературних середовищах, таких як плазма або реактори термоядерного синтезу.

З іншого боку, в фінансовій математиці моменти відіграють важливу роль у прогнозуванні та аналізі часових рядів, що описують динаміку фінансових активів. Фінансові часові ряди часто демонструють складну структуру, що включає автокореляцію, сезонність та стохастичні флуктуації, які можуть значно ускладнювати прогнозування. Використання моментів дозволяє отримувати агреговані характеристики розподілу цінових змін, що є корисним для аналізу волатильності, ризиків та інших параметрів фінансових інструментів. Зокрема, моментні методи застосовуються для побудови моделей стохастичної волатильності, які використовуються в сучасних підходах до оцінки ризиків та оптимізації фінансових портфелів. Одним із підходів у фінансовій математиці є використання кумулянтів, які є спеціальними функціями моментів, що дозволяють аналізувати нелінійні ефекти у фінансових процесах. Кумулянти вищих порядків використовуються для оцінки асиметрії розподілу прибутків та можливих відхилень від нормального розподілу, що є основою для більш точного моделювання реальних фінансових процесів.

В моделюванні фінансових ринків моменти використовуються для аналізу характеристик розподілу фінансових активів, включаючи рівень їхньої волатильності, що є основним параметром для оцінки ризиків. Наприклад, другий момент розподілу ціни активу визначає його стандартне відхилення, яке широко застосовується у фінансових моделях для оцінки рівня ризику. Врахування моментів вищих порядків дозволяє будувати моделі, які точніше відображають реальну структуру фінансових ринків та забезпечують більш точне прогнозування екстремальних подій, таких як фінансові кризи або раптові зміни трендів.

РОЗДІЛ 3. УЗАГАЛЬНЕНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ

3.1. Формулювання узагальненої проблеми моментів

Розширення класичних означень у теорії моментів та функціональному аналізі ґрунтується на введенні узагальнених підходів до розв'язку задач моментного типу, що включають додаткові обмеження, варіаційні умови та регуляризаційні методи. Якщо класична проблема моментів формулюється як задача знаходження міри, що породжує задані моменти, то її розширені формулювання допускають узагальнені міри, операторні підходи та апроксимаційні моделі, що дозволяють аналізувати більш широкий клас задач. Одним із розширених підходів є введення моментних рівнянь із додатковими умовами на поведінку міри, що забезпечує стабільність розв'язку та можливість його чисельного відновлення. У багатьох випадках класичні означення не дозволяють коректно розв'язувати задачі, що містять шуми або випадкові флуктуації, тому вводяться додаткові регуляризаційні параметри, що забезпечують гладкість розв'язку. Якщо моментні рівняння формулюються в узагальненому вигляді, то їхній розв'язок може бути знайдено шляхом використання узагальнених функцій, що дозволяє коректно визначати міри для широкого спектра задач. Одним із таких узагальнень є використання узагальнених розподілів, що дозволяє аналізувати моментні задачі в умовах, коли класичне поняття моментної міри не застосовується. У такому випадку моментні рівняння розглядаються у просторі узагальнених функцій, що дозволяє отримати стійкі розв'язки при наявності випадкових збурень у вихідних даних [35, с. 86].

Розширені означення також включають варіаційні узагальнення, що дозволяють знаходити оптимальні розв'язки моментних задач з урахуванням додаткових обмежень. Якщо функціонал, що містить моментні параметри, мінімізується на певній множині функцій, то варіаційний підхід дозволяє знайти найкращу апроксимацію, що задовольняє всі задані умови. У таких задачах використовується принцип варіаційного числення, що дозволяє формулювати рівняння Ейлера-Лагранжа для знаходження екстремальних значень функціонала. Якщо моменти функції визначаються через варіаційні рівняння, то оптимальний розв’язок можна отримати шляхом знаходження стаціонарних точок функціонала у відповідному просторі функцій. У випадках, коли варіаційний функціонал містить додаткові обмеження, метод множників Лагранжа дозволяє визначити умови існування розв’язку та знайти оптимальну апроксимацію функції у просторі моментних характеристик. Якщо задача містить нелінійні обмеження на моментні параметри, то використовується метод проекційного градієнта, що дозволяє знаходити найкращі апроксимації у варіаційних просторах.

Розширення класичних означень включає також узагальнені операторні підходи, що дозволяють розглядати моментні рівняння в просторі самоспряжених операторів. Якщо класична проблема моментів формулюється через знаходження міри, то її узагальнення в операторному вигляді дозволяє визначати моментні характеристики через спектральні оператори. Використання спектрального аналізу в задачах моментів дозволяє узагальнити класичне означення та отримати операторні розв’язки, що забезпечують розширений підхід до аналізу моментних характеристик функцій. Якщо моментні рівняння формулюються у вигляді спектральних операторів, то їхній розв’язок можна знайти через спектральний розклад, що дозволяє визначати моментні параметри на основі спектральних характеристик оператора. У такому випадку моментні задачі розглядаються у просторі власних функцій оператора, що забезпечує аналітичне представлення моментних характеристик через операторні спектри. Якщо оператор має дискретний спектр, то його моментні характеристики можуть бути визначені через сукупність власних значень та власних функцій, що забезпечує можливість чисельного аналізу моментної задачі. Якщо спектр оператора є неперервним, то моментні характеристики визначаються через інтегральні спектральні міри, що дозволяє отримати узагальнене означення моментного представлення.

Розширення класичних означень у задачах моментів також включає використання ймовірнісних узагальнень, що дозволяє аналізувати моментні характеристики у випадкових процесах. Якщо моментні рівняння формулюються через ймовірнісні розподіли, то їхній розв'язок може бути знайдено шляхом оцінки статистичних моментів випадкових функцій. У такому випадку моментні задачі можуть бути узагальнені на простори випадкових величин, що дозволяє аналізувати їхні ймовірнісні характеристики через моментні рівняння. Якщо моментні характеристики визначаються через випадкові параметри, то їхній аналіз може бути здійснено через методи стохастичної оптимізації, що дозволяє отримувати найкращі оцінки моментних параметрів у випадкових процесах. Якщо моментні рівняння містять випадкові змінні, то їхній розв'язок можна знайти через методи стохастичного градієнта, що дозволяє знаходити оптимальні моментні апроксимації у випадкових процесах. Використання ймовірнісних методів у моментних задачах дозволяє отримати узагальнене означення моментного представлення у випадкових функціональних просторах [15, с. 55].

Інтеграція теорії моментів із теорією ймовірностей дозволяє аналізувати стохастичні процеси, використовуючи моментні характеристики випадкових величин та випадкових функцій. Моменти стохастичних процесів містять інформацію про середнє значення, дисперсію, автокореляційну структуру та вищі характеристики розподілу. Якщо випадковий процес визначений на деякому ймовірнісному просторі, його моменти дозволяють встановити закономірності у зміні випадкових величин та прогнозувати їхній майбутній розвиток. Використання моментів у ймовірнісних задачах включає аналіз розподілів випадкових процесів, оцінку їхньої статистичної залежності та апроксимацію ймовірнісних характеристик через моментні рівняння. Якщо розглядається випадковий процес X(t), його моменти визначаються інтегралами вигляду

$$M(n) = E[X^n(t)]$$

що дозволяє отримати характеристичні рівняння для опису стохастичних систем. Використання моментних рівнянь у ймовірнісному аналізі дозволяє знаходити оцінки для параметрів випадкових процесів та визначати їхні спектральні характеристики. У випадку стаціонарних процесів моменти можуть бути використані для визначення автокореляційних функцій, що характеризують взаємозв'язок значень випадкової величини у різні моменти часу. Якщо випадковий процес є марковським, його моменти дозволяють отримати рівняння для ймовірностей переходів між станами, що знаходить застосування в моделюванні випадкових явищ. Використання моментів у стохастичних рівняннях дозволяє визначати ймовірнісні характеристики розв'язків диференціальних рівнянь, що описують випадкові динамічні системи. Якщо система описується стохастичним диференціальним рівнянням, то її моменти можуть бути визначені через середні значення траєкторій процесу, що дозволяє оцінити її поведінку на основі обчислення моментних характеристик [44, с. 13].

Аналіз моментів випадкових процесів дозволяє досліджувати стохастичні коливання та оцінювати спектральні характеристики сигналів у випадкових середовищах. Якщо випадковий процес представлений через ортогональні розклади, його моменти визначають коефіцієнти розкладу у функціональних просторах, що дозволяє отримати апроксимаційні рівняння для випадкових функцій. У багатьох випадках стохастичні процеси мають розподіли, які можуть бути апроксимовані через моментні рівняння, що дозволяє будувати наближені моделі для випадкових явищ. Використання моментних рівнянь у ймовірнісному аналізі включає оцінку моментів через вибірку випадкових величин та застосування методу найменших квадратів для наближеного представлення моментних характеристик. Якщо стохастичний процес є гаусівським, його моменти визначаються через середнє значення та коваріаційну функцію, що дозволяє аналізувати його ймовірнісні властивості через систему моментних рівнянь. Якщо випадковий процес містить нелінійні залежності, його моменти можуть бути обчислені через методи стохастичного інтегрування, що дозволяє знайти оцінки для нелінійних функцій випадкових змінних. Використання моментних рівнянь у ймовірнісних задачах дозволяє розглядати стохастичні процеси через їхні моментні характеристики, що дає змогу отримувати точні оцінки для випадкових параметрів.

Узагальнення моментної проблеми через операторні рівняння дозволяє представити моментні задачі у термінах операторного аналізу та спектральних методів. Якщо моменти функції визначаються через операторне рівняння, то їхній розв'язок може бути знайдено шляхом використання спектрального розкладу оператора, що задає моментні характеристики. Використання операторного підходу дозволяє аналізувати моментні задачі через спектральні властивості операторів, що визначають поведінку функцій у функціональних просторах. Якщо моментні рівняння формулюються через спектральні оператори, то їхній розв'язок може бути знайдено через визначення власних значень та власних функцій відповідного оператора. Операторне узагальнення моментної задачі включає використання самоспряжених операторів у гільбертових просторах, що дозволяє отримати аналітичне представлення моментних характеристик через спектральні функції. Якщо оператор, що визначає моментні характеристики, є компактним, то його моменти можуть бути знайдені через розклад у базисі власних функцій, що забезпечує точне відновлення функції через її моментні параметри. Використання операторних рівнянь у моментному аналізі дозволяє будувати узагальнені представлення моментних задач через спектральні оператори, що визначають поведінку функцій у відповідних просторах.

3.2. Алгоритми розв'язку узагальненої проблеми моментів

Некоректно поставлені задачі виникають у багатьох розділах математики, фізики, обчислювальної математики, статистики та машинного навчання. Вони характеризуються тим, що невеликі збурення вихідних даних можуть спричиняти значні відхилення у розв'язку, що робить їхню безпосередню апроксимацію нестабільною. Це ускладнює обчислювальний процес і потребує застосування спеціальних методів для отримання коректних і стійких розв'язків. У таких випадках використовують методи регуляризації, що дозволяють стабілізувати розв'язок шляхом введення додаткових обмежень або апріорної інформації про шукану функцію [37, с. 7].

Регуляризація застосовується для стабілізації некоректно поставлених задач інтегрального рівняння першого роду, обернених задач фізики, задач апроксимації функцій, машинного навчання та чисельного диференціювання. Найпоширенішим методом регуляризації є метод Тихонова, що передбачає модифікацію вихідної задачі шляхом додавання до функціоналу регуляризаційного члена, який забезпечує гладкість та стійкість розв'язку. У загальному вигляді метод Тихонова формулюється як знаходження мінімуму функціонала

$$J(f) = ||Af - g||^2 + \alpha \left||Rf|\right|^2$$

де A – оператор задачі, g – вихідні дані, R – регуляризаційний оператор, а α – параметр регуляризації. Регуляризаційний оператор може бути диференціальним або інтегральним оператором, що забезпечує додаткові умови на шукану функцію. Вибір параметра α визначає баланс між точністю наближення та гладкістю розв'язку, а його оптимальний вибір є центральною проблемою методів регуляризації.

Одним із підходів до вибору параметра регуляризації є критерій узгодженості Морозова, що передбачає вибір такого α, при якому відхилення розв'язку від початкових даних не перевищує рівня шуму. Альтернативним методом є метод дискретної похибки Лаврентьєва, що враховує похибку вхідних даних і мінімізує її вплив на кінцевий розв'язок. У методах регуляризації також використовують принцип максимального згладжування, що забезпечує оптимальний баланс між гладкістю розв'язку і його відповідністю вихідним даним. Використання регуляризації у задачах оберненого типу дозволяє уникнути розривних і нестійких рішень, які є типовими для некоректно поставлених задач.

Чисельна реалізація методів регуляризації часто базується на використанні ітераційних підходів, зокрема методу регуляризованих градієнтів, методу регуляризації вектора Ландвебера, а також методів регуляризації на основі спектрального аналізу оператора. Метод регуляризованих градієнтів полягає у використанні градієнтного спуску з урахуванням регуляризаційного члена, що обмежує коливання розв'язку та зменшує ефект накопичення похибок. Метод Ландвебера передбачає ітераційну побудову розв'язку з поступовим зменшенням впливу шуму на кінцеве рішення. Регуляризація на основі спектрального аналізу використовує розкладання оператора A у спектральному просторі, що дає змогу виділяти стабільні компоненти розв'язку та усувати нестійкі гармоніки, які спричиняють значні похибки [29, с. 77].

Одним із напрямів регуляризації є використання апріорної інформації про розв'язок, що дозволяє будувати адаптивні методи регуляризації, які враховують особливості конкретної задачі. Зокрема, методи регуляризації з використанням додаткових обмежень дозволяють визначати такі розв'язки, які є фізично обґрунтованими або відповідають заданим структурним умовам. Наприклад, у задачах відновлення зображень регуляризація часто застосовується для усунення шумів і покращення чіткості, використовуючи такі методи, як загальна варіація, що забезпечує збереження контурів та структури зображення. Регуляризація в машинному навчанні є основою для побудови стійких моделей, що не схильні до переобчислення або перенавчання. Використання регуляризаційних методів, таких як L_1 та L_2-регуляризація, дозволяє зменшити складність моделей і покращити їхню узагальнюючу здатність. L1-регуляризація сприяє отриманню розріджених розв'язків, що корисно у задачах вибору ознак, тоді як L_2-регуляризація зменшує вплив нестабільних параметрів моделі, роблячи її стійкішою до змін у вхідних даних. У контексті нейронних мереж методи регуляризації, такі як dropout, batch normalization та weight decay, забезпечують оптимізацію параметрів моделей та запобігають переобчисленню.

Ітераційні алгоритми широко використовуються для наближеного розв'язання задач, які не мають аналітичного розв'язку або коли їхній прямий розрахунок є обчислювально затратним. Такі алгоритми поступово наближують розв'язок шляхом послідовного уточнення значень у кожному кроці, що дозволяє отримати необхідний результат із заданою точністю. У багатьох чисельних методах ітераційні підходи дозволяють значно зменшити обсяг обчислень, зосереджуючись на локальному вдосконаленні апроксимації. Одним із класичних ітераційних методів є метод Ньютона, який використовується для знаходження коренів рівнянь. Він базується на послідовному уточненні наближення

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

що дозволяє з високою швидкістю збіжності знаходити корені функції. Цей метод є одним із найефективніших у випадках, коли перша похідна функції є обчислюваною, а початкове наближення достатньо близьке до шуканого розв'язку.

Для лінійних систем рівнянь широко застосовується метод Гауса-Зейделя, який базується на послідовному оновленні змінних за принципом використання вже обчислених значень у поточному кроці ітерації. Це дозволяє значно пришвидшити збіжність порівняно з методом простої ітерації. Даний метод часто використовується для розв'язання систем великих розмірностей, оскільки не потребує збереження всього матричного представлення, а його реалізація є досить простою. Аналогічно працює метод Якобі, проте у ньому всі значення змінних оновлюються одночасно після кожної ітерації, що дозволяє ефективно паралелізувати обчислення. Вибір між цими методами залежить від характеру системи рівнянь та обчислювальних ресурсів, що використовуються [7, с. 5].

В задачах оптимізації застосовуються ітераційні градієнтні методи, які дозволяють знаходити точки мінімуму або максимуму цільової функції шляхом поступового руху у напрямку антиподієнта градієнта. Найпростішим таким методом є градієнтний спуск, у якому кожне нове наближення обчислюється за формулою

$$x_{\{n+1\}} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$$

де α – крок спуску, що контролює швидкість наближення до мінімуму. Якщо вибрати неправильне значення α, алгоритм може збігатися повільно або навіть розходитися, тому існують адаптивні методи вибору цього параметра. Однією з модифікацій градієнтного спуску є метод Ньютона для оптимізації, який враховує другу похідну функції і дозволяє прискорити збіжність, особливо поблизу точки оптимуму.

Значного поширення набули стохастичні варіанти градієнтного спуску, які використовуються у великих наборах даних, де класичні методи надто ресурсозатратні. Стохастичний градієнтний спуск оновлює параметри моделі не на основі всієї вибірки, а лише на основі невеликої її частини, що дозволяє значно прискорити процес. Його варіанти, такі як Adam або RMSProp, включають адаптивну корекцію швидкості навчання та інерційні компоненти, що забезпечують кращу збіжність у складних просторах параметрів.

Байєсівські методи оцінки є підходом до обробки невизначених параметрів на основі ймовірнісного аналізу та апостеріорного оцінювання. У таких методах використовується теорема Байєса, яка дозволяє оновлювати ймовірність гіпотези після отримання нових даних. Теоретичною основою є формула $P(\theta \mid D) = (P(D \mid \theta) * P(\theta)) / P(D)$, де $P(\theta \mid D)$ – апостеріорна ймовірність параметра θ після отримання даних D, P(D|θ) – правдоподібність спостережуваних даних при заданому параметрі, P(θ) – апріорна ймовірність параметра, що визначає його початковий розподіл, а P(D) – нормувальний коефіцієнт, який забезпечує, щоб загальна ймовірність дорівнювала одиниці. Байєсівські методи широко використовуються у задачах фільтрації даних, оцінки параметрів та навчання моделей, які враховують невизначеність.

Одним із застосувань таких методів є фільтр Калмана, що використовується для оцінювання стану динамічних систем у режимі реального часу. Він застосовується у навігації, комп’ютерному зорі, фінансовому аналізі та багатьох інших галузях, де необхідно робити прогнозні оцінки на основі спостережуваних даних. У більш загальному випадку використовується розширений фільтр Калмана, який дозволяє працювати з нелінійними моделями, або частинковий фільтр, який застосовується для задач з високою невизначеністю [22, с. 8].

У байєсівському навчанні машинних моделей використовується поняття апріорного та апостеріорного розподілу параметрів, що дозволяє створювати статистично обґрунтовані алгоритми. Наприклад, у байєсівських нейронних мережах параметри ваг розглядаються як випадкові змінні з певним розподілом, що дозволяє отримати більш стабільні розв’язки та оцінювати рівень невизначеності в прогнозах. Байєсівські методи також застосовуються для регуляризації моделей шляхом введення апріорних обмежень, що зменшує ризик перенавчання та покращує узагальнюючу здатність алгоритмів. Загалом, поєднання ітераційних алгоритмів та байєсівських методів дозволяє будувати ефективні обчислювальні процедури для складних задач, що включають елементи невизначеності. Використання адаптивних ітераційних схем разом із ймовірнісними підходами дає змогу створювати точні та стійкі алгоритми, які можна застосовувати у широкому спектрі задач, включаючи аналіз даних, оптимізацію, прогнозування та управління динамічними процесами.

3.3. Практичні застосування узагальненої проблеми моментів

Обробка сигналів є фундаментальним напрямом в інженерії та математиці, що включає аналіз, фільтрацію, відновлення та стиснення даних у вигляді часових рядів, зображень та аудіофайлів. Використання моментів у цифровій обробці сигналів дозволяє отримати компактні характеристики сигналу, що дає змогу виконувати його ефективне представлення, ідентифікацію, класифікацію та розпізнавання. Моменти є числовими характеристиками розподілу сигналу, які використовуються для опису його форми, структури та статистичних властивостей. Основою такого підходу є представлення сигналу у вигляді поліноміальних апроксимацій або його опису через моменти різних порядків, що забезпечує можливість вилучення значущої інформації з мінімальною втратою.

У цифровій обробці сигналів широко застосовуються геометричні та ортогональні моменти, які дозволяють описувати форму сигналів або зображень у вигляді компактних числових характеристик. Геометричні моменти визначаються інтегруванням сигналу або зображення по всій його області та обчислюються за формулою

$$M_{\{pq\}} = \ x^p y^q f(x, y) dx\, dy, \text{де } f(x, y)$$

функція інтенсивності сигналу, а p та q – порядки моментів. Ці характеристики дають змогу оцінювати глобальні властивості сигналів та зображень, такі як їхня орієнтація, симетрія та розподіл інтенсивності. Для зображень геометричні моменти застосовуються у задачах розпізнавання, класифікації та інваріантного представлення об'єктів. Ортогональні моменти, такі як моменти Чебишова, Лежандра або Церніке, використовуються для більш ефективного представлення зображень завдяки своїм властивостям мінімальної кореляції між різними порядками моментів.

У випадку обробки аудіосигналів моменти використовуються для аналізу частотного спектру та оцінки характеристик звукових хвиль. Визначення моментів спектральної щільності потужності дозволяє оцінювати такі характеристики сигналу, як середня частота, дисперсія частотного розподілу та ступінь асиметрії. В аудіоаналізі часто використовуються мел-кепстральні коефіцієнти (MFCC), що є узагальненою формою моментів для представлення аудіосигналів у вигляді числових характеристик, які використовуються для розпізнавання мовлення та музичних жанрів. Використання моментів у таких задачах дає змогу отримати ефективні методи аналізу без необхідності обчислення повного спектрального розкладу, що значно знижує обчислювальну складність [23, с. 31].

Моменти також відіграють суттєву роль у задачах фільтрації та покращення якості сигналів. У фільтрації зображень моменти можуть бути використані для оцінки статистичних характеристик шуму та визначення оптимальних параметрів згладжування. Наприклад, при обробці медичних зображень моменти застосовуються для оцінки контрастності та чіткості структур, що дозволяє покращити якість візуалізації та виділення аномалій. Використання моментних методів у фільтрації дозволяє зберігати глобальну структуру сигналу, уникаючи спотворень, які виникають при застосуванні класичних фільтрів. У аудіофільтрації моменти використовуються для виділення шумових компонентів і покращення розбірливості мовлення у складних акустичних середовищах.

В задачах класифікації зображень моменти застосовуються для створення інваріантних характеристик, що дозволяють розпізнавати об’єкти незалежно від їхнього масштабу, обертання або зміщення. Наприклад, моменти Гу дозволяють будувати представлення зображення, що є стійким до лінійних перетворень, що робить їх придатними для систем машинного зору та автоматичного розпізнавання символів. Ортогональні моменти, такі як моменти Лагерра або Хаара, використовуються у задачах детекції об’єктів, оскільки вони забезпечують компактне представлення інформації про форму та текстуру. У задачах біометричної ідентифікації моменти використовуються для аналізу відбитків пальців, розпізнавання облич та ідентифікації користувачів за геометричними характеристиками райдужної оболонки ока.

Обробка зображень на основі моментних методів дозволяє вирішувати задачі сегментації, коли необхідно автоматично розділити зображення на регіони із різними характеристиками. Використання моментів у таких задачах дозволяє отримувати компактні числові характеристики, які використовуються для оцінки подібності між областями та класифікації сегментованих об’єктів. Наприклад, у медицині моментні методи застосовуються для автоматичного аналізу гістологічних зображень, визначення меж пухлин або ідентифікації аномальних клітин. У супутниковій обробці зображень моменти використовуються для класифікації типів поверхні, виявлення змін у природних ландшафтах та оцінки стану рослинності.

Біомедичне моделювання використовує математичні методи для аналізу біологічних даних, що дозволяє отримувати кількісні оцінки, виявляти закономірності та прогнозувати поведінку біологічних систем. У статистичному аналізі біологічних даних моменти є однією з основних характеристик, які використовуються для опису розподілу величин, таких як концентрація біомолекул, час виживання клітин, фізіологічні параметри організму або динаміка поширення хвороб. Використання моментів першого та другого порядку дозволяє визначати середні значення та варіацію біологічних процесів, що є необхідним для оцінки ефективності медичних втручань та моделювання впливу лікарських препаратів. Статистичні моменти використовуються у задачах аналізу генетичних даних, оцінки експресії генів, моделювання поширення епідемій та аналізу біофізичних процесів.

В біомедичних дослідженнях моменти застосовуються для обробки великих масивів даних, отриманих з експериментів, таких як МРТ-зображення, електрокардіограми, біохімічні аналізи крові або результати мас-спектрометрії. Використання моментного аналізу дає змогу зменшувати вимірність даних та знаходити статистичні характеристики, які відображають загальні закономірності в біологічних системах. Наприклад, при аналізі розподілу розмірів клітин у культурі моментні методи дозволяють оцінювати гетерогенність популяції, що є необхідним для досліджень у сфері онкології, де контроль за зміною клітинної структури має вирішальне значення. У задачах моделювання фармакокінетики моменти використовуються для опису процесів всмоктування, розподілу та виведення лікарських препаратів, що дозволяє прогнозувати їхню концентрацію у тканинах організму залежно від часу. Це забезпечує розробку оптимальних режимів дозування та оцінку ризиків побічних ефектів [42, с. 31].

Моделювання біологічних процесів за допомогою моментів також застосовується у вивченні динаміки популяцій бактерій та вірусів. У теоретичній біології моменти використовуються для опису змін у розподілі видів у популяціях, що дозволяє оцінювати ефекти мутацій, еволюційного відбору та міжвидової конкуренції. Використання моментів у комбінаторній біології дає змогу моделювати ймовірності утворення складних структур, таких як білкові комплекси або мережі міжклітинної взаємодії. У геноміці моменти використовуються для аналізу варіацій у послідовностях ДНК та оцінки генетичної спорідненості між організмами.

Інженерні розрахунки базуються на оптимізації механічних та конструктивних параметрів, серед яких розподіл моментів інерції є одним із визначальних факторів при проектуванні машин, будівельних конструкцій та аерокосмічних систем. Моменти інерції визначають жорсткість та стійкість матеріалів до механічних навантажень, що є основою для розрахунку динаміки механічних систем, зокрема, обертального руху, вібраційних характеристик та статичних деформацій. Оптимізація конструкцій на основі моментів інерції передбачає зміну геометрії, розподілу маси та вибору матеріалів таким чином, щоб зменшити навантаження та підвищити міцність конструкції.

У будівельній механіці моментний аналіз використовується для визначення несучої здатності балок, колон та плит. Розподіл моментів інерції дозволяє оцінювати міцність та стійкість конструкцій до зовнішніх навантажень, таких як вітрове або сейсмічне навантаження. Використання моментних методів дає змогу оптимізувати форму конструкцій, зменшуючи витрати матеріалів при збереженні необхідних механічних характеристик. В авіаційній та космічній техніці моментний аналіз застосовується для оптимізації конструкції крил літаків, стабілізації супутників та розрахунку аеродинамічних характеристик літальних апаратів. Визначення моментів інерції дозволяє прогнозувати поведінку апаратів у різних умовах експлуатації, що є необхідним для розрахунку траєкторій польоту та стабільності під час маневрування.

РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ І ПРАКТИЧНІ АСПЕКТИ

4.1. Чисельні методи розв'язку

Метод моментів Гаусса є одним із найефективніших чисельних методів інтегрування, що використовується для апроксимації функцій через квадратурні формули з оптимальним вибором вузлів і ваг. Основна ідея методу полягає у знаходженні найкращої апроксимації інтеграла функції шляхом представлення його у вигляді скінченної суми добутків функціональних значень у спеціально вибраних точках і відповідних вагових коефіцієнтів. Якщо необхідно обчислити інтеграл вигляду

$$I = \int_a^b \quad f(x)w(x)dx$$

де w(x) є ваговою функцією, що визначає структуру інтегралу, то його апроксимація в методі Гаусса здійснюється за допомогою квадратурної формули

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} \quad w_i f(x_i)$$

де x_i – вузли інтегрування, а w_i – відповідні вагові коефіцієнти. Основна перевага методу полягає в тому, що вибір вузлів здійснюється таким чином, щоб точність інтегрування була максимальною при фіксованому числі обчислень значень функції. Вузли x_i обираються як корені ортогональних поліномів, пов'язаних із ваговою функцією w(x), що дозволяє отримати оптимальне представлення інтегралу для широкого класу функцій [27, с. 68].

Якщо використовувати поліноми Лежандра, то вагова функція w(x) дорівнює одиниці, і така формула називається квадратурною формулою Гаусса-Лежандра. Якщо вагова функція має іншу структуру, наприклад $w(x) = e^{-x}$, то застосовується метод Гаусса-Лагерра, який дозволяє ефективно обчислювати інтеграли на напівнескінченному інтервалі. У разі, коли вагова функція є поліноміальною, використовуються поліноми Чебишова або Ерміта, що дозволяє будувати відповідні гаусові квадратурні формули.

Вибір ортогональних поліномів визначає ефективність обчислення інтегралів та забезпечує оптимальну точність наближення. Метод моментів Гаусса використовується у випадках, коли необхідно швидко та точно оцінити інтеграл без використання трудомістких методів чисельного інтегрування, таких як методи трапецій або Сімпсона, які мають повільнішу збіжність.

Ортогональні поліноми, що використовуються в методі Гаусса, задовольняють умови ортогональності відносно заданої вагової функції, що дозволяє визначати вузли інтегрування як їхні корені. Вагові коефіцієнти w_i обчислюються таким чином, щоб забезпечити точне обчислення інтегралів для поліномів певного степеня. Якщо кількість вузлів інтегрування дорівнює n, то метод дозволяє точно обчислювати інтеграли для поліномів степеня до 2n-1, що робить його одним із найефективніших методів для чисельного інтегрування. Якщо збільшувати кількість вузлів, точність інтегрування покращується, що дозволяє застосовувати цей метод для розв’язку задач високої точності. Метод моментів Гаусса знаходить застосування у спектральному аналізі, розв’язку диференціальних рівнянь та чисельних методах обчислення інтегралів у складних функціональних просторах.

Метод моментів Гаусса широко застосовується у розв’язку рівнянь математичної фізики, де необхідно обчислювати інтеграли, що містять швидко осцилюючі функції або функції зі складною поведінкою. Якщо стандартні методи чисельного інтегрування потребують великої кількості вузлів для отримання високої точності, то метод Гаусса дозволяє значно зменшити кількість необхідних обчислень. У спектральному аналізі метод використовується для оцінки інтегралів, пов’язаних із власними значеннями операторів, що дозволяє визначати спектральні характеристики функцій. У стохастичних задачах метод застосовується для обчислення математичних сподівань випадкових функцій та інтегралів, що містять випадкові змінні. У випадку розв’язку стохастичних рівнянь метод моментів Гаусса дозволяє ефективно знаходити апроксимації ймовірнісних характеристик функцій, що містять стохастичні параметри. Використання методу у фінансовій математиці включає обчислення інтегралів, що описують розподіл цін активів, і оцінку похідних фінансових інструментів [21, с. 19].

Метод моментів Гаусса також застосовується у чисельних методах розв’язку диференціальних рівнянь, де необхідно обчислювати інтеграли, що містять розв’язки диференціальних рівнянь. Якщо рівняння розглядається у вигляді інтегрального оператора, то використання методу дозволяє замінити інтегрування на систему алгебраїчних рівнянь, що значно спрощує чисельний аналіз. У варіаційних методах метод моментів Гаусса використовується для апроксимації функціоналів, що містять інтегральні вирази, дозволяючи ефективно знаходити оптимальні рішення у задачах мінімізації. Якщо використовувати метод для апроксимації функцій у спектральному просторі, його можна застосовувати для розкладу функцій у ряди ортогональних поліномів, що дозволяє будувати високоточні наближення. Використання методу моментів Гаусса у поєднанні з методами оптимізації дозволяє знаходити ефективні чисельні розв’язки для задач, що містять інтегральні рівняння, та будувати точні апроксимаційні моделі для функцій у функціональних просторах.

Метод квадратурних формул є одним із найефективніших підходів до чисельного інтегрування та використовується для апроксимації інтегралів функцій у випадках, коли точне аналітичне обчислення неможливе або складне. Адаптація методу Гаусса для складних класів функцій базується на використанні спеціальних квадратурних формул, що дозволяють обчислювати інтеграли для широкого спектра функцій із різними властивостями. Якщо класична квадратурна формула Гаусса побудована на використанні вузлів, що є коренями ортогональних поліномів, то її адаптація до складніших функцій включає вибір спеціальних вагових функцій, що відображають особливості підінтегральної функції. Це дозволяє зменшити похибку апроксимації та досягти високої точності навіть для функцій із розривами, швидкими осциляціями або сингулярностями. Якщо функція має сильні локальні особливості, використовуються методи локалізованих квадратур, що забезпечують адаптивне вибирання вузлів і ваг. Використання поліномів Чебишова, Лагерра або Ерміта дозволяє будувати квадратурні формули, що оптимально пристосовані до специфіки конкретних класів функцій [33, с. 30].

Методи квадратурних формул адаптуються для розв’язку інтегральних рівнянь, де необхідно обчислювати інтеграли, що містять складні функції зі змінними ваговими характеристиками. Якщо функція містить швидкі осциляції, то стандартні квадратурні формули дають великі похибки, тому використовуються спеціальні методи, такі як квадратурні формули Гаусса-Лобатто або Гаусса-Радо. Якщо функція визначена на нескінченному інтервалі, застосовуються квадратурні формули з ваговими функціями, що експоненційно спадають, що дозволяє отримати високу точність навіть у випадках, коли стандартні методи чисельного інтегрування неефективні. Якщо інтеграл містить логарифмічні особливості або розриви першого роду, використовуються спеціальні підходи, що дозволяють уникнути втрати точності при наближенні функції. У разі, коли необхідно інтегрувати функцію на області зі складною геометрією, використовуються методи багатовимірних квадратур, що дозволяють узагальнити методи квадратур на випадок інтегралів багатьох змінних. Використання адаптивних квадратурних методів у спектральному аналізі дозволяє будувати точні апроксимації функцій у випадках, коли стандартні методи чисельного інтегрування не забезпечують необхідної точності.

Стохастичні методи інтегрування засновані на використанні методів Монте-Карло, що дозволяють обчислювати моменти у ймовірнісних моделях. Якщо необхідно оцінити математичне сподівання функції випадкової змінної, використовується стохастичне інтегрування, що базується на вибіркових оцінках інтегралу. Основна ідея методу Монте-Карло полягає у випадковій генерації значень змінної та обчисленні середнього значення функції у вибраних точках. Якщо необхідно оцінити інтеграл вигляду

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

то метод Монте-Карло замінює обчислення інтегралу сумуванням вибіркових значень функції у випадкових точках, що дає наближену оцінку вигляду

$$I \approx \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

де x_i – випадково вибрані точки, а N – кількість симуляцій. Стохастичні методи дозволяють ефективно обчислювати інтеграли високої розмірності, де стандартні методи чисельного інтегрування стають неефективними через експоненціальне зростання обчислювальних витрат. Якщо інтеграл містить розподіл ймовірностей, що не має аналітичного вигляду, метод Монте-Карло дозволяє отримати наближену оцінку на основі випадкових вибірок. Якщо розподіл випадкової величини є складним або містить змішані компоненти, використовується метод стратифікованого вибору, що дозволяє зменшити дисперсію оцінки [16, с. 29].

Методи Монте-Карло використовуються для обчислення моментів випадкових процесів, що дозволяє оцінювати статистичні характеристики складних стохастичних систем. Якщо випадковий процес визначений через стохастичне диференціальне рівняння, його моменти можуть бути знайдені через чисельне інтегрування траєкторій процесу. Використання методів Монте-Карло у стохастичних задачах включає оцінку математичного сподівання, розрахунок кореляційних функцій та аналіз розподілів випадкових величин. Якщо функція залежить від великої кількості випадкових змінних, то метод латинського гіперкуба дозволяє зменшити дисперсію оцінок, що покращує точність наближення інтегралу.

4.2. Програмна реалізація алгоритмів

Обчислення моментів у математичних та інженерних задачах потребує ефективних чисельних методів, які реалізуються за допомогою спеціалізованих бібліотек, що забезпечують точність, швидкість і зручність роботи з великими масивами даних. У сучасному програмному забезпеченні для математичних розрахунків використовуються такі платформи, як MATLAB, Python із бібліотеками NumPy і SciPy, а також R, які містять оптимізовані алгоритми для обчислення моментів різних порядків. Використання цих бібліотек дозволяє здійснювати розрахунки з великою точністю, проводити симуляції та аналізувати дані у широкому спектрі наукових та прикладних задач.

MATLAB є однією з найпоширеніших платформ для математичного моделювання та чисельного аналізу. Його вбудовані функції дозволяють легко обчислювати моменти розподілу даних та застосовувати їх у задачах статистики, інженерії, обробки сигналів та комп'ютерного зору. Для обчислення моментів використовується функція moment(X, n), де X – масив чисел, а n – порядок моменту. MATLAB також має засоби для роботи з ортогональними моментами, такими як моменти Лежандра, Чебишова та Церніке, які широко використовуються у зображенні та спектральному аналізі. Завдяки оптимізованій реалізації алгоритмів MATLAB забезпечує швидке обчислення моментів навіть для великих наборів даних, що є необхідним для задач машинного навчання та обробки великих масивів експериментальних вимірювань [11, с. 7].

Python із бібліотеками NumPy і SciPy забезпечує гнучкі можливості для обчислення моментів, що робить його універсальним інструментом у наукових розрахунках. Бібліотека NumPy містить функції mean(), var(), skew() та kurtosis(), які відповідають першому, другому, третьому та четвертому моментам відповідно. Для загального обчислення моментів використовується функція scipy.stats.moment(data, n), що дозволяє визначати моменти будь-якого порядку. Ці бібліотеки підтримують обчислення для великих векторизованих масивів даних, що суттєво пришвидшує аналіз розподілу даних у порівнянні з традиційними підходами. Завдяки можливостям Python у сфері обробки великих даних, бібліотеки NumPy та SciPy активно використовуються у статистиці, фінансовій математиці, фізиці та біоінформатиці, де обчислення моментів є необхідним для аналізу випадкових процесів, прогнозування та класифікації об'єктів.

Бібліотека SciPy також містить розширені засоби для роботи зі статистичними розподілами, що дозволяє використовувати моменти у задачах оцінки параметрів, тестування статистичних гіпотез та моделювання стохастичних процесів. Наприклад, при аналізі емпіричних розподілів використовується функція scipy.stats.describe(data), яка повертає основні моменти розподілу, включаючи середнє значення, дисперсію, асиметрію та ексцес. Це дозволяє швидко оцінювати статистичні характеристики вибірки та приймати рішення щодо її подальшої обробки.

Мова R, яка спеціалізується на статистичних розрахунках, має потужні засоби для роботи з моментами. Функція moments::moment(data, order=n) дозволяє визначати моменти будь-якого порядку для набору даних, а функції skewness(data) та kurtosis(data) використовуються для обчислення моментів вищих порядків. Завдяки інтеграції з чисельними методами та можливості обробки великих обсягів даних, R активно використовується в економетричних дослідженнях, фінансовому аналізі, біостатистиці та екологічному моделюванні. У R також доступні бібліотеки для роботи з ортогональними моментами, що дає змогу застосовувати їх у задачах комп’ютерного зору, цифрової обробки зображень та моделювання складних стохастичних процесів.

Оптимізація обчислень є необхідною умовою ефективного використання ресурсів у складних математичних та інженерних задачах. У сучасних умовах зростання обсягів даних і складності алгоритмів потребує розробки методів, що дозволяють прискорювати розрахунки без втрати точності. Одним із підходів до підвищення швидкодії є використання багатопотокових обчислень, що дає змогу паралельно обробляти різні частини задачі, розподіляючи навантаження між ядрами центрального або графічного процесора. Це забезпечує суттєве зменшення часу виконання алгоритмів, що є особливо ефективним для обробки великих масивів даних, розв’язання систем лінійних рівнянь, моделювання фізичних процесів та чисельного інтегрування [32, с. 9].

Багатопотокові обчислення реалізуються шляхом розпаралелювання алгоритмів, що дозволяє розподіляти виконання окремих частин задачі між потоками виконання. Використання багатопотоковості особливо ефективне в задачах лінійної алгебри, де необхідно виконувати множення матриць, знаходити власні значення операторів або розв'язувати системи диференціальних рівнянь. Для реалізації таких підходів застосовуються спеціалізовані бібліотеки, такі як OpenMP, Intel MKL або бібліотеки CUDA для роботи з графічними процесорами. OpenMP забезпечує можливість розпаралелювання циклів та багатопотокового виконання коду в мовах C++ та Fortran, дозволяючи ефективно використовувати багатоядерні архітектури сучасних процесорів. Бібліотека Intel MKL містить оптимізовані функції для обробки великих масивів даних, що використовуються у наукових обчисленнях та машинному навчанні. Використання графічних процесорів через CUDA або OpenCL дає змогу виконувати сотні тисяч операцій одночасно, що суттєво прискорює обчислення у задачах моделювання фізичних процесів, обробки зображень та штучного інтелекту.

Однією з основних задач при реалізації багатопотокових алгоритмів є управління розподілом даних між потоками та узгодження доступу до загальних ресурсів. Використання алгоритмів керування потоками, таких як бар'єри синхронізації або атомарні операції, дозволяє уникнути проблем з доступом до спільної пам'яті та забезпечити коректність виконання обчислень. Застосування розподіленої пам'яті дозволяє виконувати обчислення на кластерних системах, що підвищує ефективність обробки надвеликих масивів даних. У задачах моделювання багатофазних процесів або розрахунку великих математичних моделей багатопотокові обчислення дозволяють розділяти обчислювальні завдання між окремими вузлами системи, що дає змогу значно скоротити час обробки [43, с. 73].

Реалізація алгоритмів у хмарних технологіях є ще одним ефективним способом прискорення обчислень за рахунок використання розподілених обчислювальних ресурсів. Хмарні технології надають можливість виконання складних обчислень у віддалених дата-центрах, що дозволяє ефективно використовувати обчислювальні потужності без необхідності купівлі дорогого обладнання. Використання платформ, таких як Amazon Web Services, Google Cloud Platform або Microsoft Azure, забезпечує можливість масштабування обчислень відповідно до потреб задачі, що особливо корисно для обробки великих обсягів даних у фінансовій математиці, моделюванні природних явищ та обробці супутникових зображень. Розподілені обчислення в хмарних середовищах базуються на використанні контейнеризації, віртуалізації та потокової обробки даних. Контейнеризація за допомогою Docker або Kubernetes дозволяє створювати незалежні обчислювальні середовища, які можна масштабувати у реальному часі. Це дає можливість ефективно розподіляти навантаження між серверами та виконувати обчислення на великих обчислювальних кластерах. Потокова обробка даних за допомогою Apache Spark або Hadoop дає змогу виконувати аналіз великих масивів даних у розподілених системах, що дозволяє паралельно обробляти сотні терабайтів інформації.

4.3. Аналіз результатів на конкретних прикладах

Перевірка чисельних методів на модельних задачах є необхідною процедурою для оцінки точності отриманих розв’язків та виявлення потенційних похибок чисельного наближення. Оцінка точності базується на порівнянні чисельних результатів із аналітичними розв’язками або точними значеннями, якщо вони відомі. У випадках, коли аналітичний розв’язок недоступний, перевірка здійснюється шляхом застосування різних чисельних методів до однієї задачі та порівняння отриманих результатів із референтними розв’язками високої точності. Якщо модельна задача допускає аналітичне представлення розв’язку, чисельний алгоритм оцінюється за величиною абсолютної та відносної похибки. Якщо функція f(x) є аналітичною, а її чисельний наближений розв'язок позначається через $f_{h(x)}$, то абсолютна похибка визначається як

$$\Delta(x) = \left| f(x) - f_{h(x)} \right|$$

а відносна похибка обчислюється за формулою

$$\delta(x) = \frac{\left| f(x) - f_{h(x)} \right|}{| f(x) |}$$

Аналіз похибок дозволяє визначити межі застосовності чисельного алгоритму, оцінити стабільність методу та виявити випадки, коли алгоритм потребує уточнення або модифікації. Якщо чисельний метод має високу точність у певному діапазоні значень параметрів, але демонструє нестабільність при великих чи малих значеннях аргументів, це може свідчити про наявність акумуляції похибки або недостатню стійкість алгоритму щодо малих збурень вхідних даних. Використання чисельних методів перевіряється на спеціально побудованих модельних задачах, що дозволяє тестувати алгоритм у контрольованих умовах та визначати його ефективність на класах функцій із різною поведінкою [2, с. 15].

Чисельні методи тестуються на модельних рівняннях шляхом аналізу збіжності наближених рішень. Якщо метод є ефективним, то його похибка повинна зменшуватися зі збільшенням кількості точок дискретизації або порядку апроксимації. Якщо використовується метод найменших квадратів для апроксимації функції, то точність методу визначається через залишкову суму квадратів відхилень між обчисленими значеннями та аналітичним розв'язком. Якщо використовується метод Монтекарло для чисельного інтегрування, то оцінка точності проводиться через дисперсію отриманих результатів та порівняння з аналітичним значенням інтегралу. Якщо застосовується метод кінцевих різниць для розв'язку диференціальних рівнянь, то збіжність оцінюється через норму похибки між чисельним та точним розв'язком у відповідному просторовому або часовому діапазоні.

Чисельні методи оцінюються також з точки зору їхньої обчислювальної складності та витрат ресурсів. Якщо метод потребує значної кількості обчислень, його ефективність може бути обмежена при великій розмірності задачі. Якщо алгоритм демонструє швидке зростання похибки при збільшенні кількості ітерацій або вузлів дискретизації, це може свідчити про нестабільність методу або про наявність ефекту катастрофічної акумуляції похибок. Якщо чисельний метод використовує апроксимацію через поліноми, оцінюється швидкість збіжності рядів та стійкість методу при високих степенях поліномів. Якщо апроксимація здійснюється за допомогою ортогональних функцій, оцінюється поведінка коефіцієнтів розкладу при збільшенні кількості членів ряду. Використання чисельних методів у фізичних задачах перевіряється через тестування алгоритмів на простих випадках, що мають відомі розв’язки, та оцінку похибок у більш складних умовах.

Застосування чисельних методів у економічному прогнозуванні використовується для розрахунку фінансових ризиків, оцінки ймовірнісних характеристик інвестиційних процесів та моделювання макроекономічних параметрів. Якщо прогнозування здійснюється на основі стохастичних диференціальних рівнянь, то оцінка ризиків виконується через чисельне інтегрування функціоналів, що містять випадкові змінні. Використання методів Монте-Карло дозволяє оцінювати ймовірнісний розподіл можливих фінансових втрат шляхом багаторазового генерування вибірок випадкових параметрів. Якщо аналізується волатильність фінансових ринків, чисельні алгоритми застосовуються для апроксимації ймовірнісного розподілу цін активів та оцінки стохастичних моделей руху цін. Якщо фінансова модель містить параметри, що змінюються у часі, використання чисельних методів дозволяє визначати їхню динаміку через розв’язок систем рівнянь у частинних похідних або через ітераційні процедури прогнозування [52, с. 88].

Чисельні методи у фінансовому прогнозуванні застосовуються для визначення оптимальних стратегій інвестування, оцінки ризиків портфелів активів та аналізу ймовірнісних характеристик фінансових інструментів. Якщо необхідно визначити параметри опціонних контрактів, чисельні алгоритми використовуються для розрахунку цін фінансових інструментів на основі стохастичних моделей ціноутворення.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження проблеми моментів дозволяє узагальнити класичні підходи до розв’язку задач моментного типу та виявити чисельні методи, що забезпечують їхню ефективну апроксимацію у функціональних просторах. Аналіз історії розвитку проблеми моментів демонструє, що початкові дослідження базувалися на використанні моментних послідовностей для апроксимації функцій та аналізу їхніх властивостей у просторі ортогональних поліномів. Класичні задачі моментів Гамбургера, Стилтьєса та Хаусдорфа заклали фундамент для подальшого розвитку теорії та її застосування у спектральному аналізі, теорії апроксимації та чисельних методах інтегрування. Використання моментів у математичному аналізі включає побудову наближених представлень функцій через ортогональні ряди, розв’язок обернених задач та чисельне обчислення спектральних характеристик операторів. Формалізація проблеми моментів у просторі інтегровних функцій дозволяє будувати методи відновлення функцій за моментами, що знаходить застосування в чисельному аналізі та обчислювальній математиці.

Комплексна проблема моментів визначає необхідні та достатні умови існування міри, що узгоджується із заданими моментами, та дозволяє аналізувати спектральні характеристики самоспряжених операторів. Аналіз методів розв’язку комплексної проблеми моментів базується на використанні операторних підходів, розкладів у базисах ортогональних функцій та чисельних методів апроксимації. Використання методу ортогональних поліномів дозволяє знаходити найкращі апроксимації функцій у просторі квадратично інтегровних функцій, що забезпечує мінімізацію похибки моментного представлення. Розглянуті приклади розв’язку комплексної проблеми моментів демонструють ефективність використання методів Гаусса для апроксимації інтегральних рівнянь та відновлення функцій за заданими моментами. Якщо моментна послідовність визначається через спектральну міру оператора, її розв'язок можна знайти через методи спектрального розкладу, що забезпечують точне представлення моментних характеристик.

Узагальнення проблеми моментів включає розширення класичних означень через введення додаткових умов та варіаційних обмежень. Формулювання узагальненої проблеми моментів передбачає використання узагальнених функцій, регуляризаційних методів та операторних рівнянь, що забезпечують стійкість розв'язку при наявності шуму у вихідних даних. Використання методів варіаційного числення дозволяє знаходити оптимальні моментні апроксимації для задач, що містять додаткові обмеження на поведінку функцій.

Аналіз чисельних методів розв'язку демонструє ефективність використання квадратурних формул Гаусса для обчислення інтегралів, що містять вагові функції, та апроксимації функціональних залежностей. Використання чисельних методів у задачах моментного аналізу дозволяє оцінювати точність апроксимації функцій та знаходити оптимальні параметри моментного представлення. Аналіз програмної реалізації алгоритмів включає тестування методів інтегрування, апроксимації функцій та спектрального розкладу операторів, що дозволяє визначити ефективність чисельних методів у практичних розрахунках. Перевірка чисельних методів на модельних задачах демонструє їхню збіжність, стійкість та точність апроксимації, що дозволяє оцінити ефективність алгоритмів у широкому класі задач. Чисельні методи апроксимації функцій оцінюються через аналіз похибок та порівняння з аналітичними розв'язками, що дозволяє визначати їхню ефективність для конкретних класів функцій. Проведене дослідження дозволяє зробити висновок, що чисельні методи розв'язку проблеми моментів забезпечують ефективні алгоритми апроксимації функцій, розрахунку моментних характеристик та аналізу стохастичних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бедратюк Л. П., Бедратюк Г. І. Моменти Ерміта зображень та їхні інваріанти // *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. — 2022. — Вип. 41, № 2. — С. 103–117.
2. Дискретна математика: навч. посіб. для студентів освітнього рівня «бакалавр» напряму підготовки «Математика» / П. Г. Стєганцева [та ін.]. — Запоріжжя: ЗНУ, 2015. — 93 с
3. Новотарський М. А. Дискретна математика: навч. посіб. для студентів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія», спеціалізації «Комп'ютерні системи та мережі» / М. А. Новотарський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — 278 с. — Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37806 (дата звернення: 26.05.2025).
4. Спекторський І. Я., Галганов О. А. Метод трикутника для побудови полінома Жегалкіна // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2020. — № 1. — С. 129–145. — DOI: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2020.1.12 (дата звернення: 26.05.2025).
5. Стандарт вищої освіти України. Перший (бакалаврський) рівень. Галузь знань 12 «Інформаційні технології». Спеціальність 125 «Кібербезпека» [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishchaosvita/zatverdzeni%20standarty/12/21/125-kierbezpeka-bakalavr.pdf (дата звернення: 26.05.2025).
6. Царьов Р. Ю., Тинченко С. В., Гриценко С. М. Адаптивне навчання з використанням ресурсів інформаційно-освітнього середовища // *Сучасні проблеми науки та освіти*. — 2016. — № 5. — Режим доступу: http://www.science-education.ru/article/view?id=25227 (дата звернення: 26.05.2025).

7. A000041. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://oeis.org/A000041 (дата звернення: 26.05.2025).
8. A102189. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://oeis.org/A102189 (дата звернення: 26.05.2025).
9. Albahari J. C# 10 in a Nutshell. — Sebastopol: O'Reilly Media, 2022. — 1058 с.
10. Athey S., Imbens G. Recursive partitioning for heterogeneous causal effects // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2016. — Vol. 113, No. 27. — P. 7353–7360.
11. Attali Y., Arieli-Attali M. Gamification in assessment: Do points affect test performance? // *Computers & Education*. — 2015. — № 83. — P. 57–63.
12. Betlei A., Diemert E., Amini M. R. Uplift prediction with dependent feature representation in imbalanced treatment and control conditions // *International Conference on Neural Information Processing*. — Cham: Springer, 2018. — P. 47–57.
13. Borrás-Gené O., Martínez-Núñez M., Fidalgo-Blanco Á. Challenges for motivation and learning in engineering education using gamification in MOOC // *International Journal of Engineering Education*. — 2016. — Vol. 32, № 1. — P. 501–512.
14. Cui Y. Using Covariance Extension Equation to Solve the Nevanlinna-Pick Interpolation with Degree Constraint. — 2024. — 12 с.
15. Curto R., Yoo S. A new approach to the nonsingular cubic binary moment problem // *Annals of Functional Analysis*. — 2018. — Vol. 9, No. 4. — P. 525–536.
16. Curto R., Yoo S. Concrete solution to the nonsingular quartic binary moment problem // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 2015. — Vol. 144, No. 1. — P. 249–258.

17. Curto R., Yoo S. Non-extremal sextic moment problems // *Journal of Functional Analysis*. — 2015. — Vol. 269, No. 3. — P. 758–780.
18. Curto R., Yoo S. The division algorithm in sextic truncated moment problems // *Integral Equations and Operator Theory*. — 2017. — Vol. 87, No. 4. — P. 515–528.
19. Curto R. E., Fialkow L. A. An analogue of the Riesz–Haviland theorem for the truncated moment problem // *Journal of Functional Analysis*. — 2018. — Vol. 274. — P. 2709–2731.
20. Curto R. E., Fialkow L. A. Recursiveness, positivity, and truncated moment problems // *Houston Journal of Mathematics*. — 2016. — Vol. 42, No. 2. — P. 603–635.
21. Curto R. E., Fialkow L. A. Truncated K-moment problems in several variables // *Journal of Operator Theory*. — 2017. — Vol. 77, No. 1. — P. 189–226.
22. Cutri R., Marim L. R., Cordeiro J. R., Gil H. A. C., Guerald C. C. T. Kahoot as a classroom-response system // *ASEE Annual Conference and Exposition*. — New Orleans, 2016.
23. Denzler J., McCann R. Fast diffusion to self-similarity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2018. — Vol. 228. — P. 301–342.
24. Devriendt F., Moldovan D., Verbeke W. Learning to rank for uplift modeling // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. — 2020. — Vol. 32, No. 7. — P. 1386–1397.
25. Georgiou T., Lindquist A. Likelihood analysis of power spectra and generalized moment problems. — 2016. — 12 c.
26. Gutierrez P., Gérardy J. Y. Causal inference and uplift modelling // *International Conference on Predictive Applications and APIs*. — PMLR, 2017. — P. 1–13.
27. Kayimbaşioğlu D., Oktekin B., Haci H. Integration of gamification technology in education // *Procedia Computer Science*. — 2016. — Vol. 102. — P. 668–676.

28. Kim Y. J., McCann R. J. Potential theory and optimal convergence rates in fast nonlinear diffusion // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. — 2017. — Vol. 107. — P. 42–67.
29. Kim Y. J., Ni W. M. On the rate of convergence and asymptotic profile of solutions to the viscous Burgers equation // *Indiana University Mathematics Journal*. — 2017. — Vol. 66, No. 2. — P. 727–752.
30. Landau H. J. Classical background of the moment problem // *Moments in Mathematics* / ed. H. J. Landau. — Providence, RI: American Mathematical Society, 1987. — (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics; Vol. 37). — P. 1–15.
31. Li C., Chen Y., Wang P., Cheng W., Zhang Z. Reinforcement learning for uplift modeling // *arXiv preprint arXiv:1811.10158*. — 2018. — 11 с. — Режим доступу: https://arxiv.org/abs/1811.10158 (дата звернення: 26.05.2025).
32. Liu Q., Huang L., Wang R. Regularization method for the generalized moment problem in a functional reproducing kernel Hilbert space // *Journal of Integral Equations and Applications*. — 2023. — Vol. 35, No. 1. — P. 1–20.
33. Michel R., Schnakenburg I., Von Martens T. Targeting uplift. — Cham: Springer Nature, 2019. — 350 с.
34. Philip J. Estimates of the age of a heat distribution // *Arkiv för Matematik*. — 2016. — Vol. 54, No. 2. — P. 351–358.
35. Price M. J. C# 10 and .NET 6 – Modern Cross-Platform Development. — 6th ed. — Birmingham: Packt Publishing, 2021. — 826 с.
36. Putinar M., Vasilescu F. H. Solving moment problems by dimensional extension // *Annals of Mathematics*. — 2016. — Vol. 180, No. 3. — P. 1087–1107.
37. Jagtap R. Understanding Markov decision process [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://towardsdatascience.com/understanding-the-markov-decision-process-mdp-8f838510f150 (дата звернення: 26.05.2025).

38. Kapoor S. Policy gradients in a nutshell [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://towardsdatascience.com/policy-gradients-in-a-nutshell-8b72f9743c5d (дата звернення: 26.05.2025).

39. Shohat J. A., Tamarkin J. D. The problem of moments. — New York: American Mathematical Society, 2016. — 140 с.

40. Stochel J., Szafraniec F. H. The complex moment problem and subnormality // *Journal of Functional Analysis*. — 2016. — Vol. 271, No. 2. — P. 432–491.

41. Swaminathan A., Joachims T. The self-normalized estimator for counterfactual learning // *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*. — 2015. — Vol. 28. — P. 3231–3239.

42. Verbeke W., Baesens B., Bravo C. Profit-driven business analytics. — Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2017. — 381 с.

43. Wang A. I., Lieberoth A. The effect of points and audio on concentration, engagement, enjoyment, learning, motivation, and classroom dynamics using Kahoot // *European Conference on Games-based Learning*. — 2016. — P. 738–746.

44. Witelski T. P., Bernoff A. J. Self-similar asymptotics for linear and nonlinear diffusion equations // *Studies in Applied Mathematics*. — 2018. — Vol. 140, No. 2. — P. 153–193.

45. Wu G., Lindquist A. A non-classical parameterization for density estimation using sample moments // *Statistical Papers*. — 2024. — P. 1–15.

46. Wu G., Lindquist A. Density steering by power moments // *arXiv preprint arXiv:2203.12345*. — 2022. — 10 с. — Режим доступу: https://arxiv.org/abs/2203.12345 (дата звернення: 26.05.2025).

47. Wu G., Lindquist A. Density steering by power moments. II // *arXiv preprint arXiv:2301.09876*. — 2023. — 12 с. — Режим доступу: https://arxiv.org/abs/2301.09876 (дата звернення: 26.05.2025).

48. Wu G., Lindquist A. General distribution steering // *arXiv preprint arXiv:2304.01234*. — 2023. — 15 с. — Режим доступу: https://arxiv.org/abs/2304.01234 (дата звернення: 26.05.2025).

49. Yanagisawa T. Asymptotic behavior of solutions to the viscous Burgers equation // *Osaka Journal of Mathematics*. — 2017. — Vol. 54, No. 1. — P. 99–119.

50. Yoo S. Sextic moment problems on three parallel lines // *Bulletin of the Korean Mathematical Society*. — 2017. — Vol. 54, No. 1. — P. 299–318.

51. Zarzycka-Piskorz E. Kahoot it or not: Can games be motivating in learning grammar? // *Teaching English with Technology*. — 2016. — Vol. 16, No. 3. — P. 17–36.

52. Zhao Y., Fang X., Simchi-Levi D. Uplift modeling with multiple treatments and general response types // *Proceedings of the 2017 SIAM International Conference on Data Mining*. — Houston: SIAM, 2017. — P. 588–596.

53. Zikas P., Bachlitzanakis V., Papaefthymiou M., Kateros S., Georgiou S., Lydatakis N., Papagiannakis G. Mixed reality serious games and gamification for smart education // *European Conference on Games-Based Learning*. — 2016. — P. 805–812.