Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра алгебри та геометрії

ДИПЛОМНА РОБОТА

на тему: РОЗВ'ЯЗНІСТЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Виконала: студентка IV курсу,
групи М–41
Спеціальності: 111Математика
Лутчин Ю. І.
Прізвище, ініціали студента

Керівник: Никифорчин Олег Ростиславович

Рецензент: ___________________________
____

Національна шкала: __________________
Університетська шкала: ______________
Оцінка ECTS: _______________________

м. Івано-Франківськ – 2025 рік

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
Кафедра алгебри та геометрії
Освітній рівень «бакалавр»
Спеціальність 111 математика

Затверджено на засіданні кафедри алгебри та геометрії
Протокол №2 від 21.10.2024р.
Завідувач кафедри Никифорчин О.Р.

ЗАВДАННЯ НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ
Лутчин Юлії Іванівні

1. Тема роботи: «Розв'язність алгебраїчних рівнянь»
2. Керівник роботи: Никифорчин Олег Ростиславович
3. Перелік питань, які потрібно розробити:

Дати визначення алгебраїчних рівнянь та їх класифікацію за ступенем; Розкрити поняття розв'язності рівнянь, умови існування та множинність коренів; Дослідити класичні та сучасні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь, зокрема лінійних, квадратних, кубічних та вищих степенів; Розглянути розв'язування рівнянь з параметрами; Проаналізувати числові методи (ітераційні та наближені) для розв'язування складних рівнянь; Пояснити практичне застосування алгебраїчних рівнянь у науці, техніці та економіці.

4. Дата видачі завдання: 21.10.2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів роботи	Строк виконання	Примітка
1	Попереднє вивчення стану питання в науці і практиці	21.10.2024 – 31.10.2024	Виконано
2	Обґрунтування актуальності дослідження	01.11.2024 – 10.11.2024	Виконано
3	Огляд та аналіз методів розв'язування алгебраїчних рівнянь	11.11.2024 – 25.11.2024	Виконано
4	Розгляд і аналіз рівнянь з параметрами	26.11.2024 – 10.12.2024	Виконано
5	Опис числових методів і алгоритмів	11.12.2024 – 25.12.2024	Виконано
6	Збір практичного матеріалу та прикладів	01.01.2025 – 31.01.2025	Виконано
7	Проведення дослідження та оформлення результатів	01.02.2025 – 31.03.2025	Виконано
8	Оформлення повного тексту роботи	01.04.2025 – 30.04.2025	Виконано
9	Підготовка матеріалів до захисту дипломної роботи	01.05.2025 – 31.05.2025	Виконано

Студент _____________ Лутчин Ю. І.
(підпис) (Прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____________ Никифорчин О. Р.
(підпис) (Прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

до дипломної роботи на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

Лутчин Юлії Іванівни

на тему:
«Розв'язність алгебраїчних рівнянь»

Дипломна робота присвячена теоретичному та практичному дослідженню розв'язності алгебраїчних рівнянь різних типів. Метою дослідження є аналіз методів визначення умов розв'язності рівнянь та засобів їх ефективного розв'язування.

У роботі охарактеризовано класифікацію алгебраїчних рівнянь: лінійних, квадратних, кубічних, рівнянь вищих степенів, а також рівнянь із параметрами. Подано теоретичні основи поняття розв'язності, розглянуто множинність коренів, умови існування дійсних і комплексних розв'язків. Особливу увагу приділено числовим (ітераційним) методам розв'язування, алгоритмам та їх застосуванню в прикладних задачах.

У практичній частині наведено приклади розв'язування рівнянь з параметрами, проведено аналіз поведінки коренів залежно від значень параметрів, продемонстровано застосування оберненої теореми Вієта, дискримінантного аналізу та графічних методів. Результати дослідження можуть бути використані у викладанні алгебри у старших класах та закладах вищої освіти, а також для підготовки до олімпіад і ЗНО.

Загальний обсяг роботи становить 70 сторінок, основний текст — 63 сторінок.

Ключові слова: алгебраїчні рівняння, розв'язність, параметри, методи розв'язування, числові методи, обернена теорема Вієта.

ABSTRACT

of the thesis for the first (bachelor's) level of higher education

by Yulia Ivanivna Lutchyn

on the topic:
"Solvability of algebraic equations"

The thesis is devoted to the theoretical and practical study of the solvability of algebraic equations of various types. The aim of the research is to analyze methods for determining the conditions for the solvability of equations and means for their effective solution.

The thesis describes the classification of algebraic equations: linear, quadratic, cubic, equations of higher degrees, as well as equations with parameters. The theoretical foundations of the concept of solvability are presented, the multiplicity of roots, and the conditions for the existence of real and complex solutions are considered. Particular attention is paid to numerical (iterative) methods of solving, algorithms, and their application in applied problems.

The practical part provides examples of solving equations with parameters, analyzes the behavior of roots depending on the values of parameters, and demonstrates the application of Vieta's inverse theorem, discriminant analysis, and graphical methods.

The results of the study can be used in teaching algebra in high schools and higher education institutions, as well as for preparing for Olympiads and external independent testing.

The total volume of the work is 70 pages, the main text is 63 pages.

Keywords: algebraic equations, solvability, parameters, solution methods, numerical methods, Vieta's inverse theorem.

ЗМІСТ

ВСТУП

Алгебраїчні рівняння займають важливе місце в математиці і застосовуються для вирішення різноманітних задач у науці, техніці, економіці та багатьох інших сферах. Питання їх розв'язності є основним для будь-якого математичного дослідження, адже воно визначає можливість знаходження коренів рівнянь та надає можливість моделювати реальні процеси. Алгебраїчні рівняння можуть бути лінійними, квадратичними, поліноміальними та мати більш складні структури, що вимагає використання різних методів розв'язання та аналізу.

Актуальність теми дипломної роботи обумовлена необхідністю детального розгляду теоретичних основ розв'язності алгебраїчних рівнянь і розробкою ефективних методів їх розв'язування. Пошук коренів рівнянь та дослідження умов їх розв'язності є важливим етапом у вирішенні задач, що виникають в наукових і практичних сферах. У зв'язку з цим вивчення методів, що дозволяють отримувати точні або наближені рішення для різноманітних типів рівнянь, має велике значення.

Мета дослідження полягає у вивченні теоретичних аспектів розв'язності алгебраїчних рівнянь та аналізі основних методів їх розв'язування. Для досягнення цієї мети необхідно розглянути класифікацію алгебраїчних рівнянь, визначення їх розв'язності та аналіз класичних і сучасних методів розв'язування.

Об'єктом дослідження є алгебраїчні рівняння різних типів, а предметом — методи та підходи до визначення їх розв'язності, а також алгоритми для розв'язування цих рівнянь. Для досягнення поставленої мети в роботі будуть використані методи теоретичного аналізу, математичні обчислення та числові методи розв'язання.

Дана тема є актуальною не лише з теоретичної точки зору, а й з практичного, оскільки ефективні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь є основою для розробки числових алгоритмів, які знаходять широке застосування в обчислювальній техніці, інженерії, економічних розрахунках і наукових дослідженнях.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Визначення алгебраїчних рівнянь та їх класифікація

Алгебраїчне рівняння — це математичне рівняння виду $P(x) = 0$, де$P(x)$ — багаточлен, що складається з невідомої x, числових коефіцієнтів і алгебраїчних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого степеня). Наприклад:

$$2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

Алгебраїчні рівняння розв'язуються для знаходження значень x, які задовольняють умову.

Алгебраїчні рівняння класифікують за степенем багаточлена (найвищий степінь змінної x) та за типом (лінійні чи нелінійні) [1].

Лінійні рівняння – рівняння першого степеня, де змінна x не підноситься до степеня вище 1. Загальний вигляд:

$$ax + b = 0$$

де $a \neq 0, a, b -$ константи.

Приклад:

$$3x - 5 = 0$$

Розв'язання:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Наприклад, для $3x - 5 = 0$

Особливості:

- Завжди має один корінь (якщо $a \neq 0$).
- Графічно зображається прямою лінією.
- Просте розв'язання через перенесення членів [2].

Квадратичні рівняння – рівняння другого степеня, загальний вигляд:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

де $a \neq 0, a, b, c -$ константи.

Приклад:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Розв'язання:

Використовується формула дискримінанта:

$$D = b^2 - 4ac$$

Корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Наприклад, для

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = (-4)^2 = 4 * 1 * 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

Особливості:

Може мати два, один або жодного дійсного кореня залежно від D:

- $D > 0$: два дійсні корені.
- $D = 0$: один дійсний корінь (кратний).
- $D < 0$: немає дійсних коренів (комплексні корені).

Графічно зображається параболою.

Розв'язується також через факторизацію чи теорему Вієта [3].

Кубічні рівняння – рівняння третього степеня, загальний вигляд:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

де $a \neq 0$.

Приклад:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Формула Кардано, яка є складною для практичного використання.

Метод Ньютона чи ітераційні алгоритми [4].

Пошук раціональних коренів за теоремою про раціональні корені (можливі корені — дільники вільного члена, поділені на дільники старшого коефіцієнта).

Наприклад, для $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Можливі корені: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Перевірка показує, що $x = 1$ – корінь. Далі діленням багаточлена отримуємо:

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

Розв'язуємо $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \rightarrow x = 2{,}3$$

Корені $x = 1, 2{,}3$

Особливості:

- Має до трьох дійсних коренів.
- Графічно зображається кривою з можливими точками перегину.
- Складніше розв'язання порівняно з квадратичними рівняннями.

Рівняння вищих степенів – рівняння степеня $n > 3$, загальний вигляд:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

де $a \neq 0$.

Приклад:

$$x^4 - 6x^2 + 4 = 0$$

Розв'язання:

Для деяких рівнянь (наприклад, біквадратних, як $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$) використовується заміна, наприклад,

$$y = x^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \rightarrow \; y = 1{,}4$$

Тоді $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1, x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Для загальних рівнянь вищих степенів аналітичні методи (як формула Абеля-Руффіні) показують, що для $n \geq 5$ не існує загальної формули розв'язання через радикали.

Використовуються чисельні методи (метод Ньютона, ітераційні алгоритми) або програмне забезпечення (MATLAB, Python).

Особливості:

- Мають до n коренів (за основною теоремою алгебри).
- Складність розв'язання зростає зі збільшенням степеня.
- Графічно можуть мати кілька екстремумів і точок перегину.
- Часто застосовуються в моделюванні складних систем (фізика, інженерія)[5].

Нелінійні рівняння та багаточлени – нелінійні рівняння — це алгебраїчні рівняння, де змінна входить у вирази зі степенем, вищим за 1, або в інших нелінійних формах (наприклад, дробові чи ірраціональні). Багаточлени є основою таких рівнянь.

Приклади:

Квадратичні та кубічні рівняння (вже нелінійні)

$$x^5 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{x} + x^2 = 4$$

Розв'язання:

- Для багаточленів: чисельні методи, пошук раціональних коренів, факторизація.
- Для інших нелінійних рівнянь: ітераційні методи, графічний аналіз або спеціалізовані алгоритми.

Особливості:

- Нелінійні рівняння можуть мати складну поведінку коренів (наприклад, кілька розв'язків або нестабільність).
- Графічно можуть мати нестандартні форми (асимптоти, розриви).
- Застосовуються в оптимізації, економіці, машинному навчанні [6].

Алгебраїчні рівняння є фундаментальною частиною математики, класифікуючись за степенем і типом. Лінійні рівняння прості й універсальні, квадратичні та кубічні мають чіткі методи розв'язання, тоді як рівняння вищих степенів і нелінійні багаточлени вимагають складних чисельних підходів. Їхнє застосування охоплює широкий спектр галузей, від базових розрахунків до моделювання складних систем.

1.2 Поняття розв'язності рівнянь

Для алгебраїчних рівнянь, таких як$x^2 - 4 = 0$, фундаментальна теорема алгебри гарантує принаймні один комплексний корінь. Для дійсних коренів, наприклад, у квадратичному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$, дискримінант $\Delta = b^2 - 4ac$ визначає:

- Якщо $\Delta > 0$, два дійсні корені.
- Якщо $\Delta = 0$, один дійсний корінь.
- Якщо $\Delta < 0$, немає дійсних коренів, лише комплексні.

Для трансцендентних рівнянь, як-от $sinx = x$,існування коренів перевіряють за допомогою теореми про проміжні значення: якщо функція змінює знак на інтервалі, корінь існує.

Точність залежить від методу: для простих рівнянь, як $2x + 3 = 0$, розв'язок точний ($x = -1.5$). Для складніших, як $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ x5−3x2+1=0, використовують чисельні методи, де точність залежить від ітерацій.

Множинність — це кількість повторень кореня, наприклад, у $(x - 2)^3 = 0$ корінь $x = 2$ має множинність 3, що впливає на поведінку функції.

Розв'язність рівнянь — це центральна тема алгебри та аналізу, яка стосується можливості знайти значення невідомих, що задовольняють задану рівність. Розглянемо ключові аспекти: умови існування коренів, точність та множинність розв'язків, а також відмінності між алгебраїчними та трансцендентними рівняннями.

1.3 Класичні методи розв’язування алгебраїчних рівнянь

Лінійні алгебраїчні рівняння мають важливе значення в чисельних обчисленнях, оскільки до них часто зводяться задачі, пов’язані з наближеним розв’язанням різноманітних обчислювальних проблем, включаючи системи нелінійних рівнянь та диференціальні рівняння. Теоретичні основи розв’язання таких систем добре вивчені, а також створено велику кількість програмних засобів для обробки різних типів систем: умовно визначених, блочних, стрічкових, з розрідженими матрицями тощо. Тому в подальшому розгляд обмежиться лише основними підходами та їх ключовими особливостями.

Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на дві основні категорії: точні (прямі) та наближені (ітераційні).

Прямі методи забезпечують можливість отримання точних значень невідомих шляхом виконання скінченного набору арифметичних операцій, за умови, що всі обчислення виконуються без похибок.

Наближені, або ітераційні, методи ґрунтуються на поступовому уточненні розв’язку в рамках, теоретично, нескінченного процесу наближень.

Серед прямих методів найбільш поширеними є методи Гауса, Крамера та LU-розклад, тоді як метод оберненої матриці застосовується значно рідше. Метод Крамера, що базується на обчисленні визначників, є обчислювально складним уже для систем із п’ятьма рівняннями, тому його переважно використовують у навчальних цілях.

Серед ітераційних підходів найчастіше застосовуються метод простої ітерації та метод Гаусса–Зейделя.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Розв'язування лінійних та квадратних рівнянь

У процесі розв’язання прикладних задач у техніці та математиці часто виникає потреба в побудові та аналізі рівнянь. У багатьох випадках, окрім невідомих, до складу рівнянь входять також змінні величини, які називаються параметрами.

Параметр має своєрідну двоїсту природу: з одного боку, він розглядається як фіксоване числове значення, що дозволяє трактувати його як звичайне число, з іншого боку — його невизначеність обмежує повноцінну роботу з ним у межах класичних методів.

Таким чином, операції ділення на вирази з параметрами або добування коренів парного ступеня з подібних виразів потребують попереднього аналізу. Зазвичай результати такого аналізу визначають як спосіб розв’язання задачі, так і саму відповідь.

Рівняння з параметрами — це рівняння виду $f(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$, де x – невідоме, яке потрібно знайти, $a_1, a_2, \ldots a_n$ – змінні параметри.

Значення невідомої величини x визначається відповідно до конкретних значень параметрів.

Допустимими називають такі значення параметрів $a_1, a_2, \ldots a_n$, за яких вираз $f(x, a_1, a_2, \ldots a_n)$ має математичний зміст при певних значеннях змінної x. Областю змінних параметрів рівняння $f(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ називають сукупність усіх допустимих наборів значень параметрів, для яких цей вираз має зміст.

Кожному допустимому набору значень параметрів у рівнянні $f(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ відповідає певна множина його розв’язків. Розв’язати рівняння з параметрами — це означає визначити всі його розв’язки для кожного допустимого набору значень параметрів. Щоб знайти розв’язки рівняння з параметрами $f(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$ з невідомим x і параметрами $a_1, a_2, \ldots a_n$, необхідно дотриматися послідовного алгоритму:

1) визначити всі допустимі значення параметрів $a_1, a_2, \ldots a_n$;
2) знайти загальний розв’язок рівняння відносно x та подати x як функцію від параметрів $x = g(, a_1, a_2, \ldots a_n)$;
3) встановити, для яких допустимих значень параметрів значення функції $x = g(, a_1, a_2, \ldots a_n)$ задовольняють рівняння;

4) проаналізувати випадки допустимих значень параметрів, за яких рівняння неможливо розв'язати відносно x, і визначити, чи існують при цьому розв'язки, а якщо існують — то які саме.

Рівняння типу ax+b=0, у якому x є невідомою величиною, а a,b – параметри називають лінійним рівнянням з параметрами.

Розглянемо можливі випадки для рівняння:

якщо $a \neq 0$, тоді воно має єдиний розв'язок: $x=-\frac{b}{a}$;

якщо a = 0,b=0, рівняння набуває вигляду: $0 \times x = 0$, що виконується для будь-якого значення x;

якщо a = 0, b≠0, отримаємо рівняння: $0 \times x = -b$, яке не має змісту, а отже, розв'язків не існує.

На рис. 2.1 наведено блок-схему лінійних рівнянь.

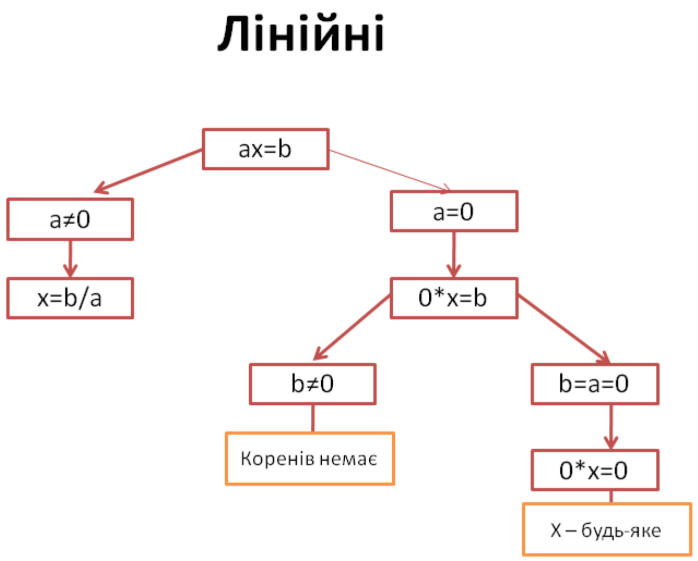


Рисунок 1.1 – Блок-схема лінійних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння $a^2x=a(x-3)+4$.

Розв'язання:

$a^2x= ax - 3a + 4$; $a^2x - ax + 3a - 4 = 0$; $ax(a-1)= 4 - 3a$;

Розгляд окремих випадків:

а) якщо a=1, то маємо $0 \times x = 1$, що є неможливим → розв'язків немає;

б) якщо a = 0, тоді 0 = 4 → рівняння не має змісту, отже, розв'язків немає;

в) якщо a≠0 і a≠1, тоді: x = (4 – 3a) / (a(a – 1))

Висновок:

при a = 1 або a = 0 — розв'язків немає

при a ≠ 0 і a ≠ 1 — x = (4 – 3a) / (a(a – 1))

Приклад 2. Знайти всі цілі значення змінної x, які кратні 3, що задовольняють рівняння виду ax = a + 5x, де a — ціле число, не рівне 5.

Розв'язання:

x (a – 5) = a

Оскільки a ≠ 5 , то x $=\frac{a}{a-5}$. За умовою корені повинні бути кратні 3 , тобто $\frac{a}{a-5}=3k$, a = 3k (a – 5), a$=\frac{15k}{3k-1}$, деk єZ.

Відповідь: x $=\frac{a}{a-5}$ дляa$=\frac{15k}{3k-1}$, k єZ.

Приклад 3. З'ясувати, при яких значеннях параметра a рівняння (x – 1)(a – 2) = 1 має розв'язок, що належить відкритому інтервалу (1; 2).

Розв'язання:

Для a ≠ 2 маємо $x-1=\frac{1}{a-2}$; $x=1+\frac{1}{a-2}$; $x=\frac{a-1}{a-2}$.

За умовою $1<\frac{a-1}{a-2}<2$, тому перейдемо до системи:

$$\begin{cases}\frac{a-1}{a-2}>1,\\ \frac{a-1}{a-2}<2;\end{cases}\begin{cases}\frac{a-1}{a-2}-1>0,\\ \frac{a-1}{a-2}-2<0;\end{cases}\begin{cases}\frac{a-1-a+2}{a-2}>0,\\ \frac{a-1-2a+4}{a-2}<0;\end{cases}\begin{cases}\frac{1}{a-2}>0,\\ \frac{3-a}{a-2}<0;\end{cases}\begin{cases}a>2,\\ \left[\begin{array}{l}a<2,\\ a>3;\end{array}\right.\end{cases} a>3.$$

Відповідь: $x=\frac{a-1}{a-2}$ для a>3.

Приклад 4. Знайти всі значення змінної x, що задовольняють рівняння $\frac{m}{x}+\frac{x}{n}=k$, де m ≠ 0, n ≠ 0, x ≠ 0 — параметри та змінна.

Розв'язання:

Домножимо обидві частини на x (x ≠ 0):

$$m+n\,\frac{x^2}{n}=kx$$

Приведемо до стандартного вигляду:

$$\frac{x^2}{n} - kx + m = 0$$

Домножимо на n:

$$x2−nkx+nm=0$$

Відповідь:

Отримали квадратне рівняння, дискримінант якого:

$$D=(nk)^2 −4nm=n^2k^2−4nm$$

Якщо D > 0 ⟶ два дійсних корені

Якщо D = 0 ⟶ один дійсний корінь

Якщо D < 0 ⟶ дійсних коренів немає

На рис.2.2 наведено блок-схема квадратних рівнянь.

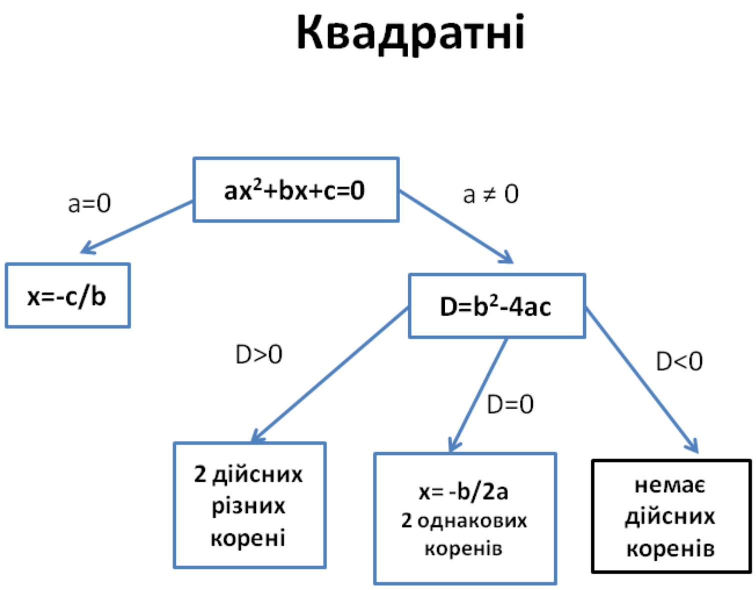


Рисунок 2.2 – Алгоритм квадратних рівнянь

Приклад 1. Розв’язати рівняння: $3(2a – 1) x^2-2(a + 1)x + 1= 0$.

Розв’язання:

1. Якщо $a=\frac{1}{2}$, то маємо: $-2(\frac{1}{2} + 1) x+1=0$; $-3x+1=0$; $x = \frac{1}{3}$.
2. Якщо $a\neq\frac{1}{2}$, то дане рівняння є квадратним. Знайдемо дискримінант :

$D = 4(a + 1)^2 - 12(2a – 1) = 4(a^2 - 4a+ 4) = 4(a - 2)^2$,$D \geq 0$.

a) $D>0$, $a\neq 2$, то маємо корені: $x = \frac{2(a+1)\pm\sqrt{4(a-2)^2}}{6(2a-1)} = \frac{-a+1\pm(a-2)}{3(2a-1)}$, звідси $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2a-1}$.

b) $D=0$,$a=2$, дане рівняння набуває вигляду:

$9x^2-6x+1=0$; $(3x - 1)^2 =0$; $x = \frac{1}{3}$.

Відповідь: якщо $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, то $x = \frac{1}{3}$;

якщо $a\neq\frac{1}{2}$,$a\neq 2$, то $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2a-1}$.

Приклад 2. Необхідно розв’язати рівняння:

$(a^2 + a – 2) x^2+ 2(a^2- 1)x + a^2= 0.$

Розв’язання:

1) Якщо $a^2 + a – 2= 0$, тоді $a = 1$ та $a = -2$

а) $a = -2$, рівняння набуває вигляду: $6x + 4 = 0$; $x = -\frac{2}{3}$

б) При $a = 1$, отримаємо: $0 \bullet x + 1 = 0$, $0 \bullet x = - 1$

Рівняння не має розв’язків.

2) Якщо $a^2 + a – 2\neq 0$, тобто $a \neq 1$, $a \neq - 2$, обчислюємо дискримінант:

$\frac{D}{4} = (a^2- 1) - a^2(a^2+a-2)=a^4- 2a^2+1-a^4-a^3+2a^2=1-a^3$

а) Якщо $D>0$, $1- a^3>0$, $a^3<1$, $a<1$, тоді рівняння має два дійсних корені:

$$x_{1,2} = \frac{-(a^2-1)\pm\sqrt{1-a^3}}{a^2+a-2}=\frac{1-a^2\pm\sqrt{1-a^3}}{a^2+a-2}$$

б)$D=0$, $1- a^3=0$, $a^3=1$, $a=1$, то рівняння маємо таке рівняння:

$0\bullet x^2+0\bullet x+a^2=0$, де $x \in \varnothing$.

в) $D<0$, $1- a^3<0$, $a>1$, то рівняння не має розв’язків.

Відповідь: якщо $a\geq 1$, то рівняння не має розв’язків;

якщо $a=-2$, то $x=-\frac{2}{3}$

якщо $a<1$, $a \neq -2$, то $x_{1,2} = \frac{1-a^2\pm\sqrt{1-a^3}}{a^2+a-2}$.

Під час розв'язання квадратних рівнянь із параметрами, коли потрібно дослідити значення коренів, важливо враховувати такі теоретичні положення:

$\begin{cases} Д \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0. \end{cases}$ Теорема 1. Щоб корені квадратного тричлена були дійсними та мали однаковий знак, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:

$\begin{cases} Д \geq 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} > 0. \end{cases}$ Привіт При цьому обидва корені будуть додатні, якщо додатково виконано таку умову:

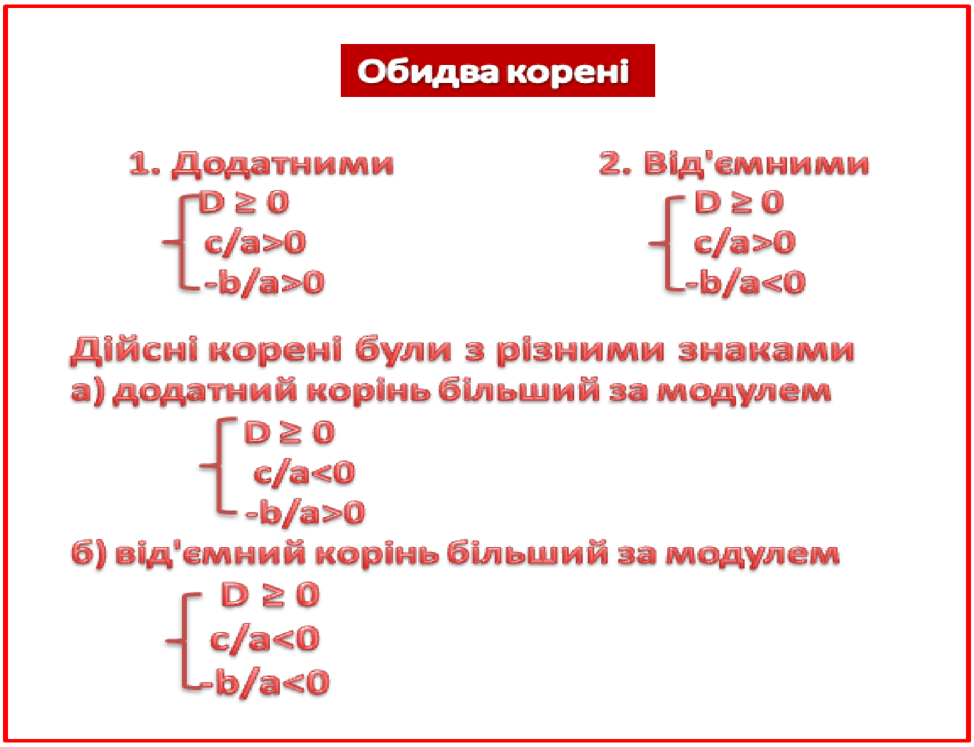
$x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$, тобто

$\begin{cases} Д \geq 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} < 0. \end{cases}$ Обидва корені набувають від'ємних значень у тому випадку, коли їх сума $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ є від'ємною, тобто коли $-\frac{b}{a}<0$.

$\begin{cases} Д > 0 \\ \frac{c}{a} < 0. \end{cases}$ Теорема 2. Щоб корені квадратного тричлена були дійсними та мали протилежні знаки, необхідною і достатньою умовою є одночасне виконання таких вимог:

При цьому додатний корінь має більший абсолютний розмір, ніж від'ємний., якщо $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$, тобто

$$\begin{cases} Д > 0, \\ \frac{c}{a} < 0, \\ -\frac{b}{a} > 0. \end{cases} \begin{cases} Д > 0, \\ \frac{c}{a} < 0, \\ -\frac{b}{a} < 0. \end{cases}$$



Приклад 1. Знайти всі значення *a*, за яких корені рівняння

$(a-1)x^2+2ax+a+3=0$ є додатними.

Розв'язання.

1) Якщо $a=1$ тоді рівняння набуває вигляду: $2x=-4$; $x=-2$. Отже, умова задачі не виконується.

2) Розглянемо випадок $a\neq 1$. Обчислимо дискримінант:

$$\frac{Д}{4}=a^2-(a+3)(a-1)=a^2-a^2-2a+3=3-2a.$$

Щоб рівняння мало лише додатні корені, повинні виконуватись такі умови:

$$\begin{cases} 3-2a\geq 0, \\ \frac{a+3}{a-1}>0, \\ \frac{a}{a-1}<0, \end{cases} \quad \begin{cases} a\leq \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a<-3 \\ a>1 \end{array}\right. \\ 0<a<1. \end{cases}$$

Система виявляється несумісною, отже жодне значення параметра *a* не забезпечує додатності обох коренів..

Відповідь: Значення параметра *a* за яких обидва корені були б додатними, не існує.

Приклад 2. Для яких значень параметра *a* рівняння *(a+5)x²+(2a-3)x+a-10=0* має два від'ємні корені?

Розв'язання

Із умови випливає, що, $a \neq -5$. інакше коефіцієнт при x^2 дорівнюватиме нулю. Обчислимо дискримінант:

$Д=(2a-3)^2-4(a+5)(a-10)=4a^2-12a+9-4(a^2-5a-50)=4a^2-12a+9-4a^2+20a+200=8a+209.$

$$\begin{cases} a \geq -\frac{209}{8} \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > 10 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l} a < -5 \\ a > 1{,}5 \end{array}\right] \end{cases} \begin{cases} 8a + 209 \geq 0, \\ \frac{a-10}{a+5} > 0, \\ \frac{2a-3}{a+5} > 0, \end{cases} \begin{cases} Д \geq 0, \\ \frac{a-10}{a+5} > 0, \\ -\frac{2a-3}{a+5} < 0, \end{cases}$$

Щоб рівняння мало від'ємні корені, потрібно, щоб виконувалися такі умови:

$$-\frac{209}{8};$$

Отже, $a \in$ - 5) U (10; + ∞)

$$-\frac{209}{8};$$

Відповідь: $a \in$ [- 5) U (10; + ∞)

Задачі на знаходження співвідношень між коренями квадратного рівняння з параметрами зручно розв'язувати без обчислення самих коренів через дискримінант. Для цього доцільно застосовувати обернену теорему Вієта, яка є коректною лише за умови існування дійсних коренів, тобто коли дискримінант не менший за нуль.

Якщо Д>0, то відповідно до теореми Вієта:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

За потреби можна використати також таку формулу:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \bullet x_2$$

Теорема Вієта

$ax^2+bx+c=0$ => $x_1+x_2=-b/a$

$a\neq0$, $D>=0$ $x_1*x_2=c/a$

Обернена теорема Вієта

$m+n=-p$ => $m=x_1$; $n=x_2$ - корені

$m*n=q$ рівняння $x^2+px+q=0$

Приклад 1. Не виконуючи повного розв'язання рівняння x^2- $(2a+1)x+a^2+2=0$, визначити значення параметра a за якого один з його коренів у 2 рази більший за інший.

Розв'язання:

Спочатку обчислимо дискримінант: $D=(2a+1)^2-4a^2-8=4a^2+4a+1-4a^2-8=4a-7$.

Рівняння має два корені тоді, коли $D>0$, тобто $4a-7>0$, $a>\frac{7}{4}$.

Припустимо, що $x_1=2x_2$. Згідно з оберненою формою теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2a+1, \\ x_1x_2=a^2+2; \end{cases} \begin{cases} 2x_2+x_2=2a+1, \\ 2x_2x_2=a^2+2; \end{cases} \begin{cases} x_2=\dfrac{2a+1}{3}, \\ x_2^2=\dfrac{a^2+2}{2}. \end{cases}$$

Отже, $\left(\frac{2a+1}{3}\right)^2=\frac{a^2+2}{2}$; $\frac{4a^2+4a+1}{9}-\frac{a^2+2}{2}=0$;

Домножимо обидві частини на 9:

$8a^2+8a+2-9a^2-18=0$; a^2 - 8a+20=0

Відповідь : $a=4$.

Приклад 2. Для якого значення параметра k сума квадратів коренів заданого рівняння $x^2+(2-k)x-k-3=0$ досягає найменшого значення?

Розв'язання:

Якщо D=(2-k)^2+4(k+3)≥0 маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2, \\ x_1x_2 = -\mathrm{k} - 3. \end{cases}$

Тоді $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$ (k-2)^2+2(k+3)= k^2 - 4k + 4 + 2k + 6 =

= k^2 - 2k+10= (k-1)^2+9 , беремо найменше значення при k = 1.

При k = 1 корені існують , бо D=(2-1)^2 + 4(1+3)= 17>0.

Відповідь: m = 1.

Приклад 3. Знайти значення c, за якого корені x_1 і x_2 рівняння x^2- $2x$+c=0 задовільняють умову $7x_2 - 4x_1 = 47$.

Розв'язання:

Обчислимо дискримінант: D=4-4c.

Рівняння має два дійсних корені, якщо D>0;   4-4c>0, тобто c<1.

Згідно з оберненою формою теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1x_2 = \mathrm{c}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 - x_1, \\ x_1x_2 = \mathrm{c}. \end{cases}$$

За умовою задачі корені рівняння повинні задовольняти умову $7x_2 - 4x_1 = 47$; $7(2 - x_1)$ -4x_1=47;   -11x_1=33; x_1=-3.

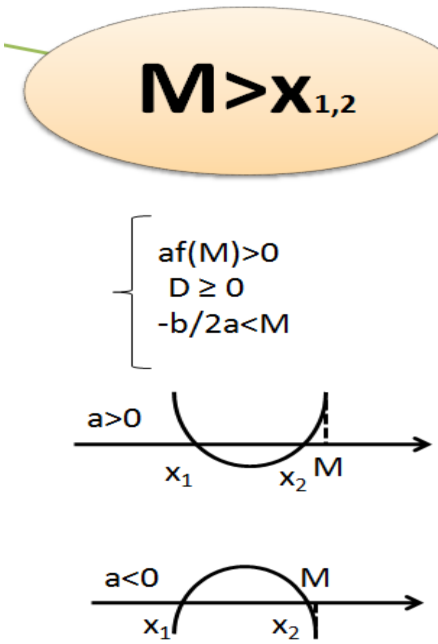
Тоді x_2=2-(-3)=5 , а підставивши значення x_1 та x_2 у друге рівняння системи, одержимо: c=(-3)×5= -15.

Відповідь: c = -15.

Теорема 1. Щоб обидва корені квадратного тричлена були меншими за деяке число M (M є R) (тобто розміщувалися на числовій прямій лівіше за M) необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:

для a>0 $\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < \mathrm{M}, \\ f(\mathrm{M}) > 0; \end{cases}$,   а для a<0 $\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < \mathrm{M}, \\ f(\mathrm{M}) < 0. \end{cases}$

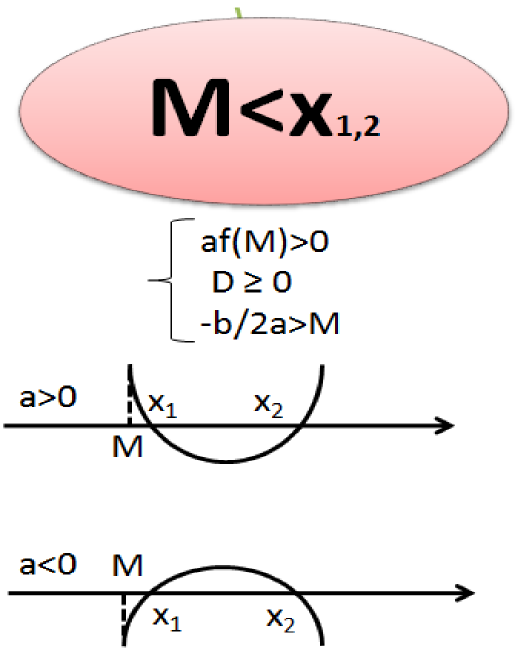
які можна записати у вигляді однієї системи: $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < \mathrm{M}, \\ af(\mathrm{M}) < 0. \end{cases}$



Теорема 2. Щоб обидва корені квадратного тричлена перевищували певне число M (тобто розташовувались на числовій прямій правіше за M), необхідною й достатньою умовою є одночасне виконання таких вимог:

для $a>0$ $\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > \mathrm{M}, \\ f(\mathrm{M}) > 0; \end{cases}$ а для $a<0$ $\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > \mathrm{M}, \\ f(\mathrm{M}) < 0. \end{cases}$

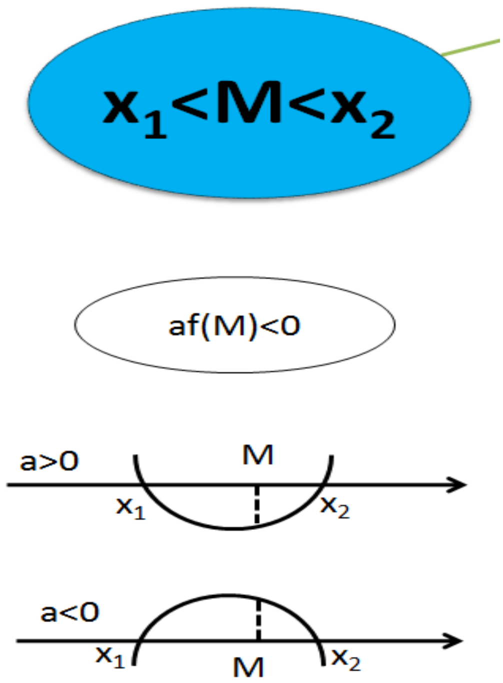
які можна записати у вигляді однієї системи: $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > \mathrm{M}, \\ af(\mathrm{M}) < 0. \end{cases}$



Теорема 3. Щоб один із коренів квадратного тричлена був меншим за число М, а інший — більшим (тобто щоб М знаходився між коренями), необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувалися такі дві умови:

для a>0$\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(\text{М}) < 0; \end{cases}$ а для a<0$\begin{cases} a < 0, \\ D > 0, \\ f(\text{М}) > 0; \end{cases}$

які виконуються також і тоді , коли $af(\text{М}) < 0$.



Приклад 1. Для яких значень параметра a один з коренів рівняння $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x-a^2-5=0$ менший за 1, а інший — більший за 1?

Розв’язання:

Згідно з умовою, число 1 розташоване між коренями рівняння. Це означає, що має виконуватися нерівність:

$(a^2+a+1)f(1)<0$, оскільки $a^2+a+1>0$ при a є R, то $a^2+a+1+2a-3-a^2-5<0, 3a-7<0$, $a<\frac{7}{3}$.

Відповідь: при a є ($-\infty$; $2\frac{1}{3}$).

Приклад 2. Для яких значень k корені рівняння $x^2+(2k-4)x+2k-1=0$, більші за 1.

Розв’язання:

Більший коефіцієнт рівняння є додатним. Отже, для того щоб обидва корені були більшими за 1, необхідно, щоб одночасно виконувались такі умови:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ \dfrac{4-2k}{2} > 1, \\ f(1) > 0; \end{cases} \begin{cases} (2\text{k} - 4)^2 - 4(2\text{k} - 1) \geq 0, \\ 2 - k > 1, \\ 4k - 4 > 0; \end{cases} \begin{cases} k^2 - 6k + 5 \geq 0, \\ k < 1, \\ k > 1; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k \leq 1, \\ k \geq 5, \end{array}\right. \\ k < 1, \\ k > 1. \end{cases}$$

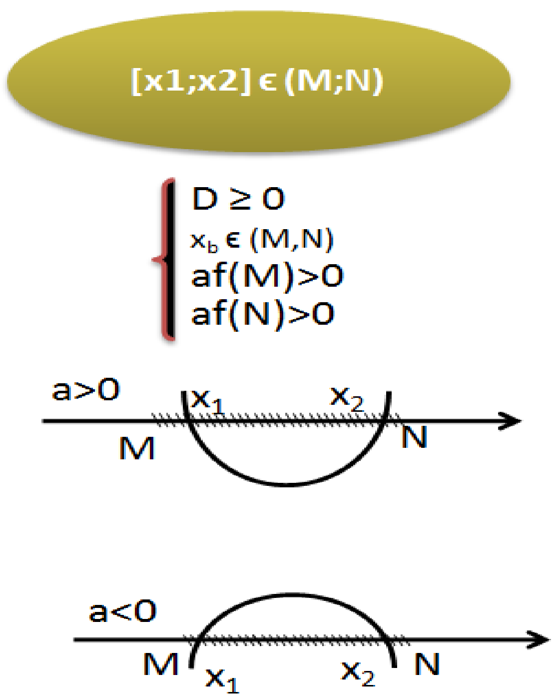
Система несумісна, тому значень k при яких корені рівняння були більші за 1 не існує.

Відповідь: таких значень k немає.

Теорема 1. Для того , щоб обидва корені квадратного тричлена були більшими за число M, але меншими , ніж число N (M<N)(тобто лежали між числа M і N, необхідно і достатньо виконання таких умов:

для a>0 $\begin{cases} a \geq 0, \\ D \geq 0, \\ \text{M} < -\frac{b}{2a} < N, \\ f(\text{M}) > 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$, а для a<0 $\begin{cases} a < 0, \\ D \geq 0, \\ \text{M} < -\frac{b}{2a} < N, \\ f(\text{M}) < 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$

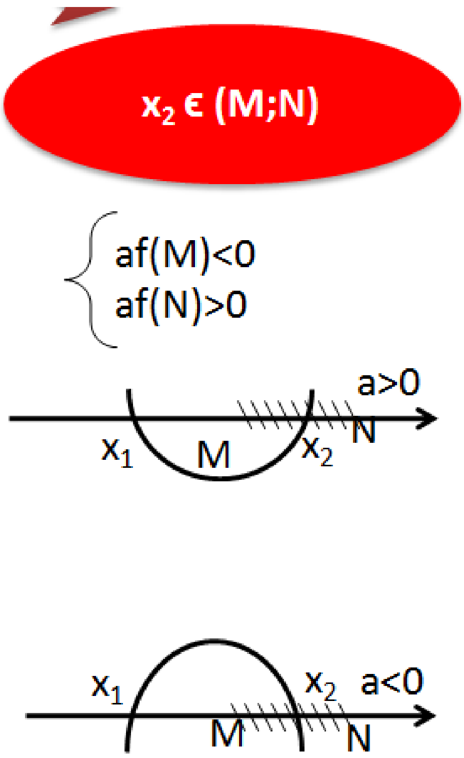
які можна записати також у вигляді однієї системи : $\begin{cases} af(\text{M}) > 0, \\ af(N) > 0, \\ \text{M} < -\frac{b}{2a} < N, \\ D \geq 0. \end{cases}$



Теорема 2. Щоб лише більший із коренів квадратного тричлена потрапляв у проміжок між числами M і N (M<N), необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувалися такі дві умови:

для a>0 $\begin{cases} a > 0, \\ f(\mathrm{M}) < 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$ а для a<0 $\begin{cases} a < 0, \\ f(\mathrm{M}) > 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$

які можна записати також у вигляді однієї системи: $\begin{cases} af(\mathrm{M}) < 0, \\ af(N) > 0. \end{cases}$

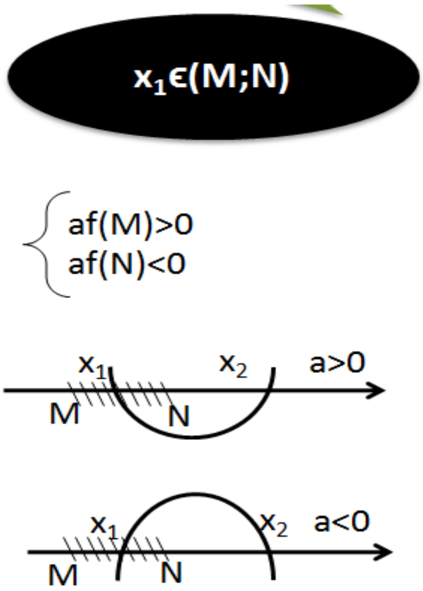


Теорема 3. Щоб лише менший корінь квадратного тричлена знаходився в межах M і N (M<N), необхідно і достатньо виконання таких двох умов:

$\begin{cases} \mathrm{a} < 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{a} > 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0, \end{cases}$ для a>0 для a<0

$$\begin{cases} a\,f(M) > 0, \\ a\,f(N) < 0. \end{cases}$$

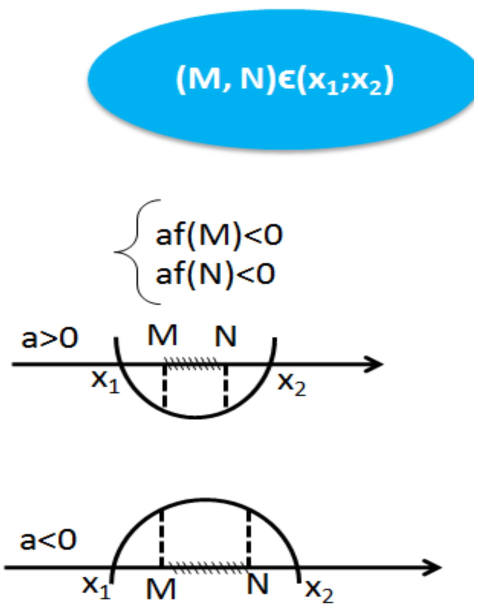
які можна записати також у вигляді однієї системи:



Теорема 4. Щоб один із коренів квадратного тричлена був меншим за M, а інший — більшим за N (M<N), тобто щоб відрізок MN повністю лежав між коренями, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі дві умови:

для a>0$\begin{cases} a > 0, \\ f(\mathrm{M}) < 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$а для a<0$\begin{cases} a < 0, \\ f(\mathrm{M}) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$

які можна записати також у вигляді однієї системи: $\begin{cases} af(\mathrm{M}) < 0, \\ af(N) < 0. \end{cases}$



Теорема 5. Якщо між двома коренями одного тричлена *f*(*x*) знаходиться лише один корінь іншого тричлена *g(x)* то це відбувається тоді і тільки тоді, коли $g(x_1)\bullet g(x_2)<0$, де x_1 *і* x_2 корені рівняння *f*(*x*).

Приклад 1. При яких *а* корені рівняння $2x^2-(2a-5)x+a-3=0$ розташовані між числами 0 і 1 ?

Розв’язання:

$f(x)=2x^2-(2a-5)x+a-3.$

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)>0, \\ D\ge 0, \\ 0<-\frac{b}{2a}<1; \end{cases} \begin{cases} a-3>0, \\ 4-a>0, \\ (2a-7)^2\ge 0, \\ 0<\frac{2a-5}{4}<1; \end{cases} \begin{cases} a>3, \\ a<4, \\ a>2{,}5, \\ a<4{,}5; \end{cases} a \in (3;\,4).$$

Відповідь: $a \in (3;\,4)$.

Приклад 2. При яких значеннях *а* один із коренів квадратного рівняння

$ax^2-(3a-2)x+a-2=0$ менший за -2, а другий $-$ більший 1 ?

Розв’язання:

$f(x)=ax^2-(3a-2)x+a-2$. За умовою задачі $a\neq 0$. Тоді маємо:

$$\begin{cases} af(-2)<0, \\ af(1)<0; \end{cases} \begin{cases} a(4a+6a-4+a-2)<0, \\ a(a-3a+2+a-2)<0; \end{cases}; \quad \begin{cases} a(11a-6)<0, \\ a(-a)<0; \end{cases} a \in \left(0;\,\frac{6}{11}\right).$$

Відповідь: $a \in \left(0;\,\frac{6}{11}\right)$.

Приклад 3. При яких значеннях *а*корені x_1 і x_2 рівняння

$(a^2+1)x^2+(a+2)x-a^2-3=0$задовольняють умову $x_1 \in (-4;-1), x_2 \in (0;2)$?

Розв’язання:

Нехай $f(x)=(a^2+1)x^2+(a+2)x-a^2-3$. Оскільки $a^2+1>0$, то вітки параболи*f*(*x*) напрямлені вгору. Складемо і розв’яжемо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} f(0)<0, \\ f(2)>0, \\ f(-1)<0, \\ f(-4)>0; \end{cases} \begin{cases} -a^2-3<0, \\ 4(a^2+1)+2(a+2)-a^2-3>0, \\ a^2+1-(a+2)-a^2-3<0, \\ 16(a^2+1)-4(a+2)-a^2-3>0; \end{cases} \begin{cases} a \in (-\infty,+\infty), \\ 3a^2+2a+5>0, \\ -a-4<0, \\ 15a^2-4a+5>0. \end{cases}.$$

Відповідь:$a>-4$

2.2 Числові методи розв'язування нелінійних рівнянь

У процесі моделювання різноманітних об’єктів у багатьох випадках виникає потреба у розв’язанні нелінійних рівнянь. Такі задачі особливо часто трапляються при аналізі та дослідженні електронних, радіоелектронних і обчислювальних пристроїв.

Концепція методів. Методи розв’язування нелінійних рівнянь виду $f(x)=0$ поділяються на прямі і ітераційні.

Прямі методи передбачають одержання розв’язків рівнянь у формі конкретних скінченних виразів. Такі підходи застосовні лише до обмеженого класу простих рівнянь, зокрема квадратних.

У реальних задачах часто доводиться працювати з рівняннями вищих порядків, для яких застосовуються ітераційні методи — методи поступового наближення до розв’язку. Кожне таке уточнення називається ітерацією.

Зазвичай розв’язання нелінійного рівняння $f(x)=0$ з здійснюється у два основні етапи:

1. Відділення кореня — визначається відрізок, у межах якого гарантовано розташований лише один корінь, і з цього інтервалу вибирається початкове наближення.

2. Уточнення кореня — шляхом послідовних ітерацій наближення знаходять розв’язок із заданою точністю, тобто знаходять значення x^* із заданою точністю ε.

Якщо рівняння $f(x)=0$ має складну структуру, то його корені зазвичай не вдається визначити точно. До того ж, у деяких випадках рівняння містить коефіцієнти, що задані лише приблизно, через що сама постановка задачі щодо точного обчислення коренів стає некоректною. Саме тому велике значення набувають методи наближеного знаходження коренів і оцінювання рівня їх точності.

Нехай дано рівняння

$$f(x)=0 \quad (4.1)$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому скінченому або нескінченному інтервалі $a<x<b$.

У деяких випадках може виникнути потреба в тому, щоб функція мала існуючу та неперервну першу похідну $f'(x)$ або навіть другої похідної $f''(x)$, причому це має виконуватись у визначених точках.

Будь-яке значення ξ, що обертає функцію в нуль, тобто таке, що $f(\xi)=0$, називається коренем рівняння (4.1) або нулем функції $f(x)$.

Припустимо, що рівняння (4.1) має лише окремо розташовані корені, тобто для кожного з них існує такий окіл, у якому відсутні інші корені цього рівняння.

Для виділення коренів стане в пригоді одна з відомих теорем математичного аналізу.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$є неперервною і набуває значень протилежних знаків на кінцях відрізка$[\alpha;\beta]$, тобто $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, то всередині цього інтервалу гарантовано існує хоча б один корінь, тобто знайдеться точка$\xi\in(\alpha;\beta)$ таке, що $f(\xi)=0$ (рис. 4.1).

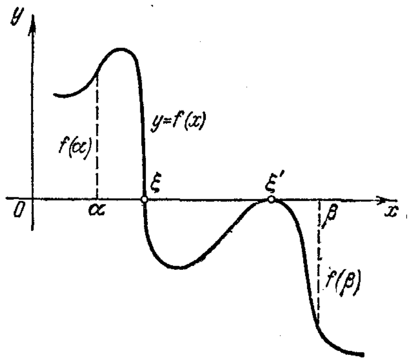


Рис. 4.1

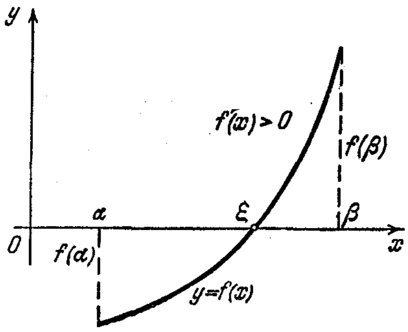


Рис. 4.2

Корінь ξбуде єдиним за умови, що похідна $f'(x)$існує та не змінює свого знака на всьому проміжку$(\alpha;\beta)$, тобто якщо $f'(x)>0$ (або $f'(x)<0$) в межах інтервалу$\alpha<x<\beta$ (рис. 4.2).

Процес відокремлення коренів починається з перевірки знаків функції $f(x)$на кінцях відрізка, тобто в точках$x=\alpha$ и $x=\beta$у межах її визначення.

Далі визначаються значення функції $f(x)$у низці проміжних точок$x=\alpha_1,\alpha_2,...$, які обираються з урахуванням характеру функції $f(x)$. Якщо буде виявлено, що для деякогоk виконується нерівність $f(\alpha_k)f(\alpha_{k+1})<0$,то, згідно з теоремою 1, на відрізку (α_k,α_{k+1})існує корінь рівняння $f(x)=0$. Після цього слід перевірити, чи є цей корінь єдиним. У багатьох випадках для відділення коренів достатньо застосувати метод половинного поділу, поділяючи заданий інтервал на 2, 4, 8 тощо рівних частин (із незначним кроком), та визначаючи знак функції $f(x)$у точках поділу. Варто пам'ятати, що алгебраїчне рівняння nnn-го степеня може мати лише один дійсний корінь.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

Може мати не більше ніж n дійсних коренів. Отже, якщо для цього рівняння зафіксовано n змін знаків, то всі його корені вважаються успішно відокремленими.

Приклад 1. Відділити корені рівняння

$$f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0. \qquad (4.2)$$

Розв'язок. Складаємо приблизну схему:

x	$f(x)$
$-\infty$	-
-3	-
-1	+
0	+
1	-
3	+
$+\infty$	+

Таким чином, рівняння (4.2) має три дійсні корені, розташовані всередині відповідних інтервалів $(-3,-1)$, $(0,1)$, $(1,3)$.

Якщо похідна $f'(x)$є неперервною, а також відомі корені рівняння $f'(x) = 0$то процес виділення коренів рівняння (4.1) значно спрощується та піддається впорядкуванню.Для цього достатньо, по суті, визначити знаки функції $f(x)$у точках, де похідна дорівнює нулю, а також на межах інтервалу $x = \alpha$ і $x = \beta$.

Приклад 2. Відділити корені рівняння

$$f(x) \equiv x^4 - 4x - 1 = 0. \qquad (4.3)$$

Розв'язок. Тут $f'(x) = 4(x^3 - 1)$, тому $f'(x) = 0$ при $x = 1$.

Маємо

$$f(-\infty) > 0(+), \quad f(1) = -4 < 0(-), \quad f(+\infty) > 0(+).$$

Таким чином, рівняння (4.3) має лише два дійсних корені, причому один з них розташований у межах інтервалу $(-\infty,1)$, а інший — в інтервалі $(1,+\infty)$.

Приклад 3. Знайти кількість дійсних коренів заданого рівняння.

$$f(x) \equiv x + e^{x} = 0. \qquad (4.4)$$

Розв’язок. Оскільки $f'(x) = 1 + e^{x} > 0$ і $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$

Отже, рівняння (4.4) має лише один дійсний корінь.

Тепер оцінимо похибку наближеного значення кореня.

Теорема 2. Нехай ξ — точний корінь, а $\bar{x}$ — його наближене значення, причому обидва належать одному й тому ж відрізку $[\alpha, \beta]$, а похідна задовольняє нерівність $[\alpha, \beta]$, причому $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $\alpha \leq x \leq \beta$.

У такому разі справедлива оцінка

$$\left|\bar{x} - \xi\right| \leq \frac{\left|f(\bar{x})\right|}{m_1}. \qquad (4.5)$$

Примітка. Формула (4.5) іноді дає неточні результати, тому застосовувати її слід обережно. На практиці зазвичай розглядають загальний інтервал (α, β), у якому знаходиться корінь ξ і його наближене значення $\bar{x}$, і вважають $\left|\bar{x} - \xi\right| \leq \beta - \alpha$.

Приклад 4. Наближений корінь рівняння $f(x) \equiv x^4 - x - 1 = 0$ є $\bar{x} = 1{,}22$. Потрібно обчислити абсолютну похибку відповідного кореня.

Розв’язок. Маємо $f(\bar{x}) = 2{,}2153 - 1{,}22 - 1 = -0{,}0047 < 0$.

Оскільки при $\bar{\bar{x}} = 1{,}23$ одержуємо

$f(\bar{\bar{x}}) = 2{,}2888 - 1.23 - 1 = 0{,}0588 > 0$,

Отже, точне значення кореня знаходиться в межах деякого інтервалу $(1{,}22;1{,}23)$. Похідна $f'(x) = 3x^3 - 1$ є монотонно зростаючою, її найменше значення на заданому інтервалі дорівнює:

$$m_1 = 3 \cdot 1{,}22^3 - 1 = 4{,}448.$$

Звідси по формулі (4.5) отримаємо:

$$\left|\bar{x} - \xi\right| \leq \frac{0{,}0047}{4{,}448} \approx 0{,}001.$$

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \qquad (4.6)$$

де функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і $f(a)\cdot f(b)<0$.

Щоб знайти корінь рівняння (4.6), необхідно розділити відрізок $[a,b]$, якому належить корінь, навпіл. Якщо значення функції в точці середини, тобто $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, то ця точка й буде коренем. У разі, якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$, то вибираємо ту з половин $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ чи $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, на кінцях якої функція $f(x)$ набуває значень з протилежними знаками. Новий, уже звужений відрізок $[a_1,b_1]$ знову ділимо навпіл і обираємо ту з половин, на кінцях якої значення функції мають протилежні знаки $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$ чи $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$, на кінцях якої функція $f(x)$ набуває протилежних знаків. підсумку на певному кроці або буде знайдено точний корінь рівняння (4.6), або ж утвориться нескінченна послідовність відрізків, вкладених один в одного $[a,b];[a_1,b_1];\ldots;[a_n,b_n];\ldots$ таких, що

$$f(a_n)f(b_n)<0 \quad n=1,2,\ldots \qquad (4.7)$$

і

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n} \qquad (4.8).$$

Для будь-якого заданого $n\geq 0$ можна стверджувати, що розв’язок рівняння (4.6) міститься в межах відрізка $[a_n,b_n]$. Як наближене значення кореня приймають середину цього відрізка:

$$\xi=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

Похибка у цьому випадку:

$$\varepsilon\leq\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Задавши досить велике значення n (тобто здійснивши велику кількість поділень відрізка навпіл), можна отримати обчислення з високим рівнем точності.

Якщо корені рівняння (4.6) не відокремлені на заданому відрізку $[a,b]$, то таким методом можна знайти щонайменше один із коренів рівняння (4.6), однак гарантії знаходження всіх коренів цей спосіб не дає.

Метод дихотомії зручний для попереднього наближеного визначення кореня рівняння, оскільки підвищення точності істотно збільшує обсяг необхідних обчислень.

Варто зауважити, що метод бісекції (половинного поділу) зручно реалізовується засобами комп'ютерної техніки. Алгоритм розрахунків організовується таким чином, щоб програма обчислювала значення лівої частини рівняння (4.6) у середині кожного відрізка $[a_n, b_n]$ $n = 1,2,...$ та обирала ту його половину, на кінцях якої функція змінює знак.

Приклад. За допомогою методу половинного поділу уточнити корінь рівняння $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, який розташований на заданому відрізку $[0,1]$.

Розв'язок. Послідовно маємо:

i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)$	$\frac{b_i - a_i}{2^{i+1}}$
0	**0**	**1**	**-1**	**1**	$f\left(\frac{0+1}{2}\right) = f(0{,}5) = -1{,}19$	**0,5**
1	**0,5**	**1**	**-1,19**	**1**	$f\left(\frac{0{,}5+1}{2}\right) = f(0{,}75) = -0{,}59$	**0,25**
2	**0,75**	**1**	**-0,59**	**1**	$f\left(\frac{0{,}75+1}{2}\right) = f(0{,}875) = 0{,}05$	**0,125**
3	**0,75**	**0,875**	**-0,59**	**0,05**	$f\left(\frac{0{,}75+0{,}875}{2}\right) = f(0{,}8125) = -0{,}304$	**0,0625**
4	**0,8125**	**0,875**	**-0,304**	**0,05**	$f\left(\frac{0{,}8125+0{,}875}{2}\right) = f(0{,}84375) = -0{,}135$	**0,03125**

Приймаємо:

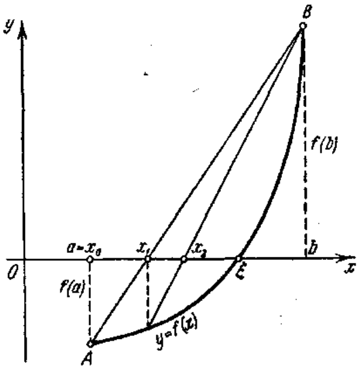
$$\xi = \frac{0{,}84375 + 0{,}875}{2} = 0{,}8594.$$

Метод хорд.

Розглянемо, за умовами пункту 4.2, більш ефективний підхід до знаходження кореня ξ рівняння $f(x) = 0$, що знаходиться на вказаному відрізку $[a,b]$, такому, що $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Якщо для визначеності $f(a) < 0$ і $f(b) > 0$. Покладемо також, що $f''(x) > 0$. У такому випадку, замість поділу відрізка $[a,b]$ навпіл, доцільніше розділити його в певному співвідношенні, яке враховує значення функції на кінцях $f(a) : f(b)$.

У геометричному сенсі метод хорд відповідає заміні кривої $y = f(x)$ хордою, що з'єднує точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$ (рис. 4.3).



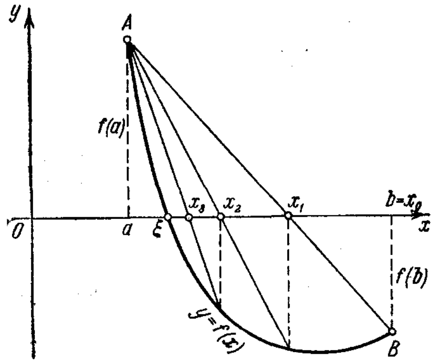


Рис. 4.3 Рис. 4.4

Рівняння хорди AB:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Звідси, поклавши $x = x_1$ та $y = 0$, отримаємо:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \qquad (4.9)$$

Далі, використовуючи цей метод до відрізка $[x_1, b]$, отримаємо друге наближення кореня:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}(b-x_1).$$

Продовжуючи цей процес, приходимо до формули методу хорд:

$$x_0 = a;$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n) \quad n = 0,1,2,... \qquad (4.10)$$

Умова $f''(x) > 0$ гарантує, що точне значення кореня на кожному кроці обчислень розташоване всередині відрізка $[x_n, b]$ а кожному етапі обчислень залишається всередині поточного відрізка. Це видно з аналізу ілюстрації 4.3.

Якщо $f(a) > 0$ і $f(b) < 0$ (рис. 4.4), слід застосовувати таку формулу методу хорд (при цьому, як і раніше, вважаємо, що виконується умова, що $f''(x) > 0$):

$$x_0 = b;$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a) \quad n = 0,1,2,... \qquad (4.11)$$

Якщо $f''(x) < 0$, то можна розглядувати рівняння $(-f(x)) = 0$.

Узагальнюємо отримані результати:

1) фіксується той кінець відрізка x, на якому знак функції $f(x)$збігається зі знаком другої похідної $f''(x)$, тобто $f(x) \cdot f''(x) > 0$; за x_0 у протилежному випадку обирається інший (нефіксований) кінець;

2) послідовні наближення розташовуються з того боку, де знак функції ξ, де функція $f(x)$має знак, протилежний знаку її другої похідної $f''(x)$. В обох випадках кожне нове наближення x_{n+1} розташоване ближче до істинного кореня ξ, ніж попереднє x_n.

Для оцінювання точності наближеного розв'язку знову можна використати відповідну формулу:

$$|x_n - \xi| < \frac{|f(x_n)|}{m_1},$$

де $|f'(x)| \geq m_1$ при $a \leq x \leq b$;

а також формулою:

$$|x_n - \xi| < -\frac{f(a) \cdot f(b)}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \right|.$$

Приклад. Знайти корінь поданого рівняння.

$f(x) \equiv x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$

з точністю до $\varepsilon = 0{,}002$.

Розв'язок. Насамперед відокремимо корінь рівняння. Так як

$f(1) = -0{,}6 < 0$, $f(1{,}5) = 1{,}425 > 0$, то $1 < \xi < 1{,}5$.

Перша похідна:

$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x > 3 \cdot 1^2 - 0{,}4 \cdot 1 = 2{,}6 = m_1$.

Друга похідна

$f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ при $1 < x < 1{,}5$.

Отже: нерухомий кінець $b=1{,}5$, $x_0=1$.

Послідовно застосовуючи формулу (4.10), матимемо:

n	x_n	$f(x_n)=x_n^3-0{,}2x_n^2-$ $-0{,}2x_n-1{,}2$	$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$	x_{n+1}
0	**1**	**-0,6**	$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{0{,}6}{2{,}6}\approx 0{,}23$	$x_1=1+\dfrac{0{,}6}{1{,}425+0{,}6}(1{,}5-1)=1{,}15$
1	**1,15**	**-0,173**	$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{0{,}173}{2{,}6}\approx 0{,}067$	$x_2=1{,}15+$ $+\dfrac{0{,}173}{1{,}425+0{,}073}(1{,}5-1{,}15)=1{,}190$
2	**1,190**	**-0,036**	$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{0{,}036}{2{,}6}\approx 0{,}014$	$x_3=1{,}190+$ $+\dfrac{0{,}036}{1{,}425+0{,}036}(1{,}5-1{,}190)=1{,}198$
3	**1,198**	**-0,0072**	$\lvert x_n-\xi\rvert<\dfrac{0{,}0072}{2{,}6}\approx 0{,}0028$	

Так як при $x_3<x<1{,}5$ маємо

$f'(x)\ge 3\cdot 1{,}198^2-0{,}4\cdot 1{,}5-0{,}2=3{,}49$,

то можна оцінити похибку точніше:

$$0<\lvert\xi-x\rvert<\frac{0{,}0072}{3{,}49}\approx 0{,}002\,.$$

Зазначимо, що точне значення кореня рівняння є $\xi=1{,}2$.

Метод Ньютона.

Нехай корінь ξ рівняння

$$f(x)=0 \qquad (4.12)$$

Якщо на відрізку $[a,b]$, функції $f'(x)$ та її похідна $f''(x)$ є неперервними й зберігають сталий знак для всіх $a<x<b$. Знайшовши яке-небудь n-е наближене значення кореня $x_n\approx\xi$ $(a\le x_n\le b)$, ми можемо уточнити його методом Ньютона по формулі:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=0,1,2,3,\ldots). \qquad (4.13)$$

У геометричному сенсі метод Ньютона еквівалентний заміні невеликої ділянки кривої $y=f(x)$ дотичною, проведеною в певній точці цієї кривої. Справді, покладемо для визначеності, що $f''(x)>0$ при $a\le x\le b$ та $f(b)>0$ (рис. 4.5).

Виберемо, наприклад, $x_0 = b$, для якого $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $B(x_0, f(x_0))$.

Для першого наближення кореня x_1 беремо абсцису точки, де дотична перетинає вісь Ox. Потім через точку $B_1(x_1, f(x_1))$ знову проводимо дотичну; абсциса її перетину з віссю Ox дасть друге наближення x_2 кореня і т. д. (рис. 4.5).

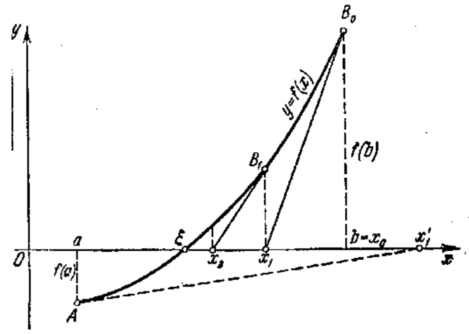


Рис. 4.5

Очевидно, що рівняння дотичної в точці $B_n(x_n, f(x_n))$ є

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Поклавши $y = 0, x = x_{n+1}$, отримаємо формулу (4.13):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0,1,2,3,...).$$

Зазначимо, що якщо в нашому випадку обрати $x_0 = a$ і, і при цьому виконується умова $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то, провівши дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $A(a, f(a))$, ми отримали б точку x_1' (рис. 4.5). Це означає, що за такого вибору початкового наближення метод Ньютона не дасть збіжності. Таким чином, у цьому випадку «вдалим» початковим наближенням буде таке значення x_0 є таке, для якого виконується нерівність

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \qquad (4.14).$$

Це правило є загальним для методу Ньютона.

Зауваження 1. Якщо: 1) функція $f(x)$ визначена та неперервна на всій області $-\infty < x < +\infty$; 2) $f(a)f(b) < 0$; 3) $f'(x \neq 0)$ при $a \leq x \leq b$; 4) $f''(x)$ існує всюди і зберігає сталий знак, то при використанні методу Ньютона для знаходження кореня рівняння

$f(x)=0$, який лежить у інтервалі (a,b), за початкове наближення x_0 можна обирати будь-яке початкове наближення $c\in[a,b]$. Зокрема, можна покласти $x_0=a$ або $x_0=b$.

Зауваження 2. Із формули (4.13) випливає, що чим більше абсолютне значення похідно $f'(x)$кореня, тим меншою буде поправка, яку потрібно внести на кожному кроці для отримання наступного наближення $(n+1)$-е. Отже, метод Ньютона є особливо зручним у випадках, коли поблизу шуканого кореня графік функції характеризується значною крутизною.У випадку, коли числове значення похідної біля кореня є малим, поправки будуть значними, що може призвести до того, що обчислення кореня за методом Ньютона стане надзвичайно тривалим або навіть неможливим. Отже, якщо крива $y=f(x)$ біля точки перетину з віссю Ox майже горизонтальна, то застосовувати метод Ньютона для розв'язування рівняння $f(x)=0$ не рекомендується.

Для оцінки похибки n-го наближення x_n знову можна скористатися формулою

$$|\xi-x_n|\le\frac{|f(x_n)|}{m_1} \qquad (4.15),$$

де m_1 — найменше значення $|f'(x)|$ на відрізку $[a,b]$.

Має місце ще одна формула для оцінки точності наближення x_n:

$$|\xi-x_n|\le|x_n-x_{n-1}| \qquad (4.16).$$

Таким чином, якщо задано певну точність ε, то обчислення за методом Ньютона доцільно проводити доти, доки модуль різниці між двома послідовними наближеннями стане меншим за ε. Після цього останнє наближення приймають за значення кореня рівняння.

Приклад 1. Обчислити методом Ньютона від'ємний корінь рівняння $f(x)\equiv x^4-3x^2+75x-10000=0$ з п'ятьма вірними знаками.

Розв'язок.

Послідовно приймаючи у лівій частині рівняння $x=0,-10,-100,\ldots$, отримаємо $f(0)=-10000$, $f(-10)=-1050$, $f(-100)\approx+10^8$.

Отже, шуканий корінь ξ знаходиться в інтервалі $-100<\xi<-10$. Звузимо знайдений інтервал. Так як $f(-11)=3453$, то $-11<\xi<-10$.

Перша та друга похідні:

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75;\ f''(x) = 12x^2 - 6.$

У межах останнього знайденого інтервалу похідні зберігають сталі знаки, що забезпечує стабільність обчислень і сприяє збіжності вибраного методу: $f'(x) < 0$ та $f''(x) > 0$. Так як $f(-11) > 0$ і $f''(-11) > 0$, то можемо прийняти за початкове наближення $x_0 = -11$. Послідовні наближення x_n $(n = 1,2,...)$ обчислюємо за такою схемою:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-11	3453	-5183	0,7
1	-10,3	134,3	-4234	0,03
2	-10,27	37,8	-4196	0,009
3	-10,261	0,15	-4185	0,00004

Так як поправка h_n є фактично різницею між двома сусідніми наближеннями кореня, то можна покласти $\xi = -10{,}261$.

Приклад 2. Знайти за методом Ньютона найменший додатний корінь рівняння $tgx = x$ з точністю $\varepsilon = 0{,}00001$.

Розв'язок. Побудувавши графіки функцій $y = tgx$ та $y = x$ (рис. 4.6), робимо висновок, що шуканий корінь ξ знаходиться в інтервалі $\pi < \xi < \dfrac{3\pi}{2}$. Перепишемо рівняння у вигляді $f(x) \equiv \sin x - x\cos x = 0$, матимемо:

$f'(x) = x\sin x;\ f''(x) = \sin x + x\cos x.$

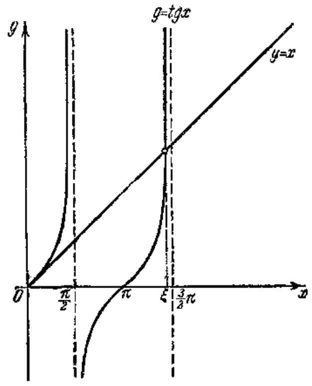


Рис. 4.6

Звідси $f'(x)<0$ та $f''(x)<0$ при $\pi<\xi<\frac{3\pi}{2}$. Так як $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1<0$, то за початкове наближення можна прийняти $x_0=\frac{3\pi}{2}$. Обчислення виконуємо за наступною схемою:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	$\frac{3\pi}{2}=4{,}71239\left(270^0\right)$	-1	-4,712	$-0{,}212\left(\approx-12^0 10''\right)$
1	$4{,}50004\left(257^0 50'\right)$	-0,0291	-4,399	$-0{,}0066\left(\approx-22^0 44'\right)$
2	$4{,}49343\left(257^0 27'16''\right)$	-0,00003	-----	

Надаємо можливість читачу самостійно здійснити оцінку похибки наближеного значення x_n.

Комбінований метод.

Якщо $f(a)\cdot f(b)<0$,а також похідні $f'(x)$ і $f''(x)$берігають сталі знаки на відрізку$[a,b]$, то поєднавши метод хорд і метод Ньютона, отримаємо комбінований підхід, в якому на кожному кроці обчислюються два значення: одне з недостатньої точністю x_n та значення з надлишком $\bar{x}_n$ точного кореня ξ рівняння $f(x)=0$.

Звідси, зокрема, випливає, що цифри, спільні для $\bar{x}_n$ і x_n, обов'язково належать точному кореню ξ. Теоретично можливі чотири випадки:

1) $f'(x)>0; f''(x)>0$ (мал. 4.7);

2) $f'(x)>0; f''(x)<0$ (мал. 4.8);

3) $f'(x)<0; f''(x)>0$ (мал. 4.9);

4) $f'(x)<0; f''(x)<0$ (мал. 4.10).

Обмежимося аналізом першого випадку, оскільки інші розглядаються аналогічним чином, а їх суть легко зрозуміти за відповідними ілюстраціями. Варто зазначити, що ці випадки зводяться до першого шляхом перетворення досліджуваного рівняння $f(x=0)$ рівносильними йому рівняннями: $-f(x)=0$ та $\pm f(-z)=0$, де $z=-x$.

Отже, нехай $f'(x) > 0$ та $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$. Покладемо $x_0 = a$; $\overline{x_0} = b$ та

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n); \qquad (4.17)$$

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}; \qquad (4.17')$$

$n = 0,1,2,\ldots$

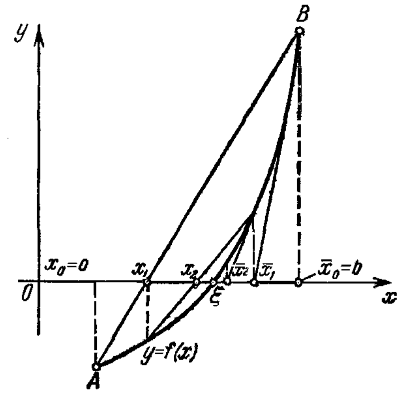


Рис. 4.7

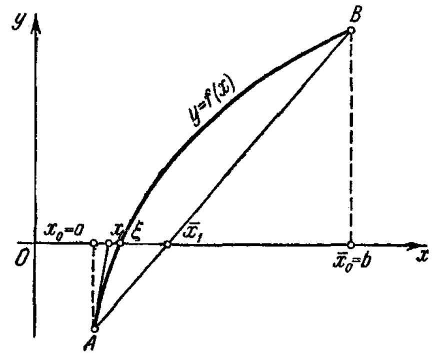


Рис. 4.8

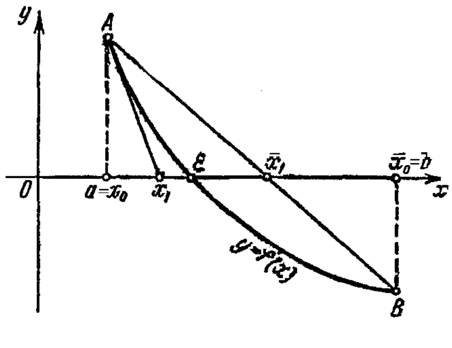


Рис. 4.9

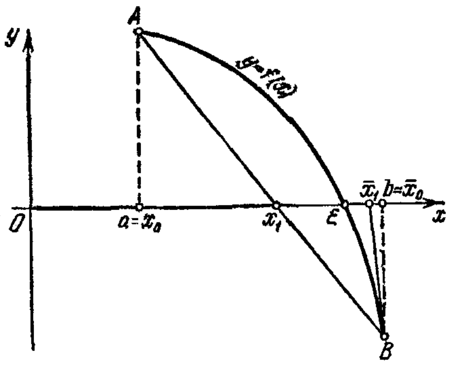


Рис. 4.10

У формулах (4.17) та $(4.17')$ метод хорд застосовується на кожному кроці до нового відрізка $[x_n, \bar{x}_n]$.

Легко встановити, що

$$x_n < \xi < \bar{x}_n \quad \Leftrightarrow 0 < \xi - x_n < \bar{x}_n - x_n \qquad (4.18).$$

Отже, якщо задано значення абсолютної похибки наближеного кореня x_n задана попередньо і рівна ε, то процес зближення закінчується тоді, коли буде встановлено, що $\bar{x}_n - x_n < \varepsilon$. Після завершення обчислень доцільно приймати значення кореня ξ краще всього прийняти рівним середньому арифметичному знайдених останніх значень:

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\bar{x}_n + x_n\right).$$

Приклад. Обчислити з точністю $\varepsilon = 0{,}0005$ єдиний додатний корінь рівняння $f(x) \equiv x^5 - x - 0{,}2 = 0$.

Розв'язок. Так як $f(1) < 0$ і $f(1{,}1) > 0$, то корінь знаходиться в інтервалі $(1;1{,}1)$. Маємо: $f'(x) = 5x^4 - 1$ та $f''(x) = 20x^3$.

На обраному інтервалі як перша, так і друга похідні функції мають додатні значення протягом усього проміжку.

Застосуємо комбінований метод, поклавши $x_0 = 1$ та $\bar{x}_0 = 1{,}1$.

Обчислення за формулами (4.17) та $(4.17')$ дадуть такі результати:

$x_1 \approx 1{,}039;\quad \bar{x}_1 \approx 1{,}051$.

Так як $x_1 - \bar{x}_1 \approx 0{,}012 > 0{,}0005$, обчислення потрібно продовжити. Знаходимо наступну пару наближень:

$x_2 \approx 1{,}04469;\quad \bar{x}_2 \approx 1{,}04487$.

Так як $x_2 - \bar{x}_2 \approx 0{,}00018 < 0{,}0005$, обчислення слід закінчити.

Можна покласти:

$$\xi = \frac{1{,}04469 + 1{,}04487}{2} \approx 1{,}045.$$

Одним із ключових методів чисельного розв'язання рівнянь є ітераційний метод (який також відомий як метод послідовних наближень). Його суть полягає в поступовому наближенні до розв'язку шляхом побудови послідовності значень, що сходиться до кореня рівняння.

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0 \qquad (4.19),$$

де $f(x)$ — неперервна функція, і необхідно знайти його дійсні корені.

Рівняння (4.19) замінюємо рівносильним рівнянням

$$x = \varphi(x). \qquad (4.20)$$

Виберемо деяке наближене значення кореня x_0 і підставимо його у праву частину рівняння (4.20). У результаті отримаємо число:

$$x_1 = \varphi(x_0). \qquad (4.21)$$

Тепер підставимо у праву частину рівняння (4.20) замість x_0 відповідне числове значення x_1, у результаті отримаємо нове значення $x_2 = \varphi(x_1)$. Поступово повторюючи ці дії, формуємо послідовність наближених значень.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1,2,3,...). \qquad (4.22)$$

Якщо дана послідовність є збіжною, тобто має скінченну границю $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тоді, переходячи до границі в рівності (4.22) і враховуючи неперервність функції $\varphi(x)$ отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)$$

або

$$\xi = \varphi(\xi) \qquad (4.23).$$

Отже, границя послідовності ξ є розв’язком рівняння (4.20) і може бути знайдена з будь-яким заданим рівнем точності за допомогою формули (4.22).

Для ефективного використання методу ітерації необхідно встановити достатні умови збіжності ітераційної послідовності.

Теорема 1 (без доведення). Нехай функція $\varphi(x)$ задана та має похідну на відрізку $[a,b]$, причому її значення належать проміжку $\varphi(x) \in [a,b]$.

Якщо існує дійсне число q таке, що

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \qquad (4.24)$$

при $a < x < b$, то:

1) ітераційний процес

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1,2,...)$$

збігається для будь-якого початкового наближення $x_0 \in [a,b]$;

2) границя цієї послідовності

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$

існує і є єдиним коренем рівняння

$$x = \varphi(x).$$

Зауваження 1. Теорема зберігає свою справедливість у разі, якщо функція $\varphi(x)$ визначена й має похідну на нескінченному інтервалі $-\infty < x < +\infty$, і при цьому для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$ виконується нерівність (4.24).

Зауваження 2. За умовами теореми 1, ітераційний метод гарантує збіжність для будь-якого обраного початкового наближення $x_0 \in [a,b]$. Завдяки цій властивості метод є самокоригувальним: окрема похибка в обчисленнях, яка не виводить за межі відрізка $[a,b]$, не змінює кінцевий результат, оскільки отримане помилкове значення може бути розглянуте як нова початкова точка x_0. Можливим наслідком буде лише збільшення кількості обчислень. Самокоригувальна здатність методу робить його одним із найбільш надійних чисельних способів. Водночас систематичні помилки у процесі застосування ітераційного методу можуть перешкодити отриманню коректного результату.

Оцінка точності наближення. Ітераційний процес необхідно продовжувати до того моменту, поки для двох послідовних наближень x_{n-1} і x_n не буде не буде виконано умову:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon,$$

де ε - задана похибка кореня ξ, а q — оцінка максимальної абсолютної величини похідної $|\varphi'(x) \le q|$.

Якщо $q \le \frac{1}{2}$, то з вищенаведеної нерівності випливає спрощена оцінка $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

Приклад. Знайти з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$ один з коренів рівняння $f(x) \equiv x^3 - 12x + 5 = 0$.

Розв’язок.

$f(0) = 5 > 0$ $\quad f(1) = -6 < 0$. Отже, на відрізку $(0,1)$ функція має принаймні один корінь.

Представимо рівняння у вигляді $x = \frac{x^3+5}{12}$. У цьому випадку $\varphi(x) = \frac{x^3+5}{12}$.

Очевидно, що при $x \in [0,1]$ маємо також $\varphi(x) \in [0,1]$.

Похідна $\varphi'(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

$$\text{При } x \in [0,1] \text{ маємо } |\varphi'(x)| = \frac{x^2}{4} \le \frac{1}{4} = q < 1.$$

Умови теореми 1 дотримано. Ітераційний процес проводитимемо до того моменту, поки не буде виконано умову нерівності:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-4}.$$

Покладемо $x_0 = 0{,}5$. Послідовно обчислюємо:

$x_1 = \varphi(x_0) = \dfrac{0{,}5^3 + 5}{12} \approx 0{,}42708$; $x_2 = \varphi(x_1) = \dfrac{0{,}42708^3 + 5}{12} \approx 0{,}42316$;

$x_3 = \varphi(x_2) = \dfrac{0{,}42316^3 + 5}{12} \approx 0{,}42298$.

На цьому етапі ітераційний процес можна завершити, оскільки умова збіжності вже виконується $|x_3 - x_2| = 0{,}00018 < 3 \cdot 10^{-4}$.

Покладемо $\xi \approx 0{,}4230$.

Приклад 2. Знайти за допомогою ітераційного методу найбільший додатний корінь рівняння $f(x) \equiv x^3 + x - 1000 = 0$ з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

Розв’язок. Переконатися в тому, що шуканий корінь розташований на заданому інтервалі, не становить труднощів $(9{,}10)$. Справді, $f(9) = -262 < 0$; $f(10) = 10 > 0$ і $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ при $x > 10$.

Початкове рівняння зручно перетворити до наступного вигляду $x = 1000 - x^3$, або $x = \dfrac{1000 - x}{x^2}$, або $x = \sqrt[3]{1000 - x}$ тощо.

Найбільш зручним із цих способів є останній, оскільки, вибравши основний інтервал і поклавши початкове значення рівним певній точці з цього проміжку $[9{,}10]$, можна забезпечити швидку збіжність ітерацій.

$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$,

знайдемо, що похідна

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

за абсолютною величиною не перевищує $\dfrac{1}{300}$:

$$|\varphi'(x)| \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q\,.$$

Обчислюємо послідовні наближені значення x_n з одним додатковим знаком точності за формулою:

$$x_n = \sqrt[3]{1000 - x_{n-1}} \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

$$x_0 = 10;\ x_1 = \sqrt[3]{1000 - 10} \approx 9{,}96655;\ x_2 = \sqrt[3]{1000 - 9{,}96655} \approx 9{,}96666;$$

$$x_3 = \sqrt[3]{1000 - 9{,}96666} \approx 9{,}96667\,.$$

Адже $1 - q \approx 1$, то з заданою точністю 10^{-4} можна вважати $\xi = 9{,}9667$.

Приклад 3. Рівняння

$$f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0$$

Корінь складає $\xi \in (1;2)$, оскільки функція набуває значень різних знаків при відповідних значеннях аргументу $f(1) = -1 < 0$ та $f(2) = 5 > 0$.

Це рівняння можна переписати у такій формі

$$x = x^3 - 1.$$

Тут

$\varphi(x) = x^3 - 1$ та $\varphi'(x) = 3x^2$;

тому $\varphi'(x) \ge 3$ при $1 \le x \le 2$.

Отже, умови, необхідні для збіжності ітераційного процесу, не виконуються, що унеможливлює гарантію наближення до розв’язку.

Якщо представити початкове рівняння у формі:

$$x = \sqrt[3]{x + 1},$$

то матимемо

$\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$ та $\varphi'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Звідси $0<\varphi'(x)<\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}<\dfrac{1}{4}$ при $1<x<2$, отже, процес ітерації є збіжним.

Нехай маємо систему з двох рівнянь з двома змінними, яку необхідно розв'язати:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0, \end{cases} \qquad (4.25)$$

дійсні корені якої слід знайти з наперед заданою точністю.

Припустимо, що система (4.25) має лише ізольовані (відокремлені) розв'язки. Щоб визначити їх кількість і отримати грубі наближення, доцільно побудувати графіки кривих $F_1(x,y)=0$ та $F_2(x,y)=0$, та наближено визначивши координати точок їхнього перетину.

Нехай $x=x_0$, $y=y_0$ - наближені значення розв'язків системи (4.25), отримані графічно або за допомогою іншого попереднього методу (наприклад, орієнтовної оцінки).

Визначимо ітераційний процес, що дає змогу, за певних умов, уточнити наявні наближення до коренів. Для цього перепишемо систему (4.25) у формі:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad (4.26)$$

і далі обчислюємо послідовні наближення за такими формулами:

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n). \end{cases} \qquad (4.27)$$

Якщо ітераційний процес є збіжним, тобто існують границі відповідних послідовностей $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ та $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, то отримані границі ξ та η є є розв'язками системи (4.25). Отже, виконавши достатню кількість ітерацій за формулами (4.27), отримаємо наближені значення x_n та y_n, які відрізняються від точних коренів $x=\xi$ та $y=\eta$ на довільно малу величину. Таким чином, задачу вважають розв'язаною, якщо ітераційна процедура (4.27) є збіжною. У протилежному випадку, коли спостерігається розбіжність, використання цього методу є недоцільним.

Умови збіжності ітераційного процесу (4.27) визначаються наступною теоремою.

Теорема 1 (без доведення). Нехай у деякій замкненій області

$R = \{(x, y): a \le x \le A, b \le y \le B\}$ (рис. 4.11) існує єдина пара розв'язків $x = \xi$ та $y = \eta$ системи, які є коренями заданої системи рівнянь (4.26).

Якщо:

1) функції $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ визначені, неперервно диференційовані у R;
2) початкові наближення x_0, y_0 та всі наступні наближення x_n, y_n $n = 1,2,...$ належать R;
3) у R виконані нерівності

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1,$$
$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1,$$

Тоді ітераційний процес (4.27) збігається до шуканої пари розв'язків $x = \xi$ та $y = \eta$ системи (4.26), тобто $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ та $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Зауваження. Теорема залишається справедливою і в тому випадку, якщо замість умови (4.27) розглядати умову.

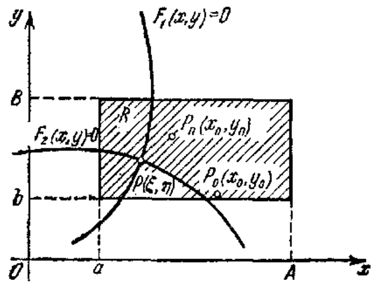


Рис. 4.11

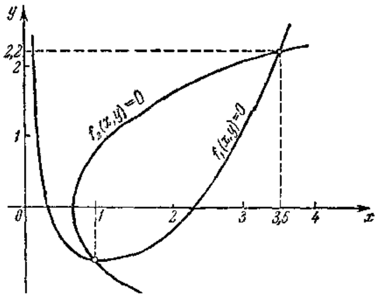


Рис. 4.12

Зразок. Для системи

$$\begin{cases} f_1(x, y) \equiv 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ f_2(x, y) \equiv x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$$

Знайти додатні корені рівняння з точністю до чотирьох значущих цифр.

Розв'язок. Будуємо графіки функцій $f_1(x, y) \equiv 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$ та $f_2(x, y) \equiv x + 3\lg x - y^2 = 0$ (рис. 4.12).

Наближені значення знайдених коренів мають вигляд: $x_0 = 3{,}5;\ y_0 = 2{,}2$

Для реалізації методу ітерації перетворимо задану систему рівнянь до такого вигляду:

$$x=\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}\equiv\varphi_1(x,y);\ y=\sqrt{x+3\lg x}\equiv\varphi_2(x,y).$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{y+5}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}};\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{1+\frac{3M}{x}}{2\sqrt{x+3\lg x}};\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{x}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}};\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0.$$

Тут $M=\lg e\approx 0{,}43429$.

Обмежуючись областю $R=\{(x,y):|x-3{,}5|\le 0{,}1;\ |y-2{,}2|\le 0{,}1\}$, будемо мати:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|\le\frac{2{,}3+5}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}}<0{,}54;\quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\le\frac{3{,}6}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}}<0{,}27;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|\le\frac{1+\frac{3\cdot 0{,}44}{3{,}4}}{2\sqrt{3{,}4+3\lg 3{,}4}}<0{,}42;\qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=0.$$

Звідси

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|<0{,}54+0{,}42=0{,}96<1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|<0{,}27+0=0{,}27<1.$$

Отже, якщо під час обчислень усі наближені значення (x_n,y_n) залишаються в межах області $R=\{(x,y):|x-3{,}5|\le 0{,}1;\ |y-2{,}2|\le 0{,}1\}$ то ітераційний процес є збіжним.

Обчислюємо послідовні наближення відповідно до наступних формул:

$$x_{n+1}=\sqrt{\frac{x_n(y_n+5)-1}{2}};\quad y_{n+1}=\sqrt{x_n+3\lg x_n};\quad n=0,1,2,\ldots$$

Результати обчислень відображені у таблиці:

n	x_n	y_n
0	3,5	2,2
1	3,479	2,259
2	3,481	2,260
3	3,484	2,261
4	3,486	2,261
5	3,487	2,262
6	3,487	2,262

Таким чином, можна прийняти $\xi=3{,}487;\quad \eta=2{,}262$.

Зауваження. Замість описаного ітераційного процесу (4.27) іноді зручно застосовувати так званий «процес Зейделя», який передбачає використання новоотриманого значення змінної вже в поточному кроці обчислень.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n), \\ n = 0,1,2,.... \end{cases}$$

2.3 Методи для рівнянь вищих степенів

Для алгебраїчних рівнянь вищих степенів не існує універсального методу розв'язання. Застосовувані методи ґрунтуються на загальній ідеї поступової заміни початкового рівняння на більш просте.

Під час побудови послідовності рівносильних рівнянь важливу роль відіграє транзитивна властивість відношення рівносильності: якщо рівняння (1) еквівалентне рівнянню (2), а рівняння (2) — рівносильне рівнянню (3), то рівняння (1) також рівносильне рівнянню (3).

Одним з найбільш доступних та доречних методів розв'язування рівнянь є метод розкладання на множники.

1. Метод розкладання на множники

Застосування цього методу спирається на таку теорему:

Теорема. Якщо функцію f(x) визначену на множині I, то можна подати у вигляді $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots f_n(x)$, де кожна з функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, …,$f_n(x)$ також визначена на I, то множина розв'язків рівняння $f(x) = 0$ збігається з об'єднанням множин розв'язків рівнянь $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$;… $f_n(x) = 0$.

Доведення: припустимо, що $x = a$ - розв'язок рівняння (1). З огляду на те, що $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots f_n(x)$, одержуємо $f(a) = f_1(a)\cdot f_2(a)\cdot \ldots f_n(a) = 0$. Це можливо лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю. Отже, якщо *a* є коренем рівняння $f(x) = 0$, то він обов'язково є коренем хоча б одного з рівнянь: $f_1(x)=0$; $f_2(x) =0$; … $f_n(x) =0$.

І навпаки, якщо $x = a_1$ є розв'язком одного з рівнянь $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$; … $f_n(x) = 0$, тоді маємо $f(a_1) = f_1(a_1)\cdot f_2(a_1)\cdot \ldots f_n(a_1) = 0$. Отже, кожен корінь будь-якого з рівнянь $f_1(a_1) = 0$… $f_n(a_1) = 0$ автоматично є коренем рівняння $f(x) =0$.

Застосовуючи цю теорему під час розв'язання складних рівнянь, слід уважно стежити за тим, щоб розкладання на множники не змінило область визначення початкового рівняння. Контроль за цим передбачає попереднє визначення області допустимих значень, однак часто ця процедура є складнішою за саме розв'язання. Тому доцільно спочатку виписати всі обмеження, а після отримання розв'язків перевірити їх відповідність заданим умовам. Найзручніше об'єднати ці обмеження разом із рівнянням у вигляді системи.

Приклад 1. Розв'язати рівняння : $x^6 – 1 = 0$.

Розв'язання. Застосуємо формулу різниці квадратів $(x^3)^2 - 1 = 0$,

$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$.

Далі скористаємося формулами різниці та суми кубів: $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2 - x+1) = 0$, тоді

$x – 1 = 0$ або $x^2 + x+1= 0$ або $x+1= 0$ або $x^2 - x+1= 0$, тоді

$x_1 = 1$ $D=1 - 4= -3 = 3i^2$ $x_4 = -1$ $D= 1 - 4= -3 = 3i^2$

$x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $x_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ $x_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Відповідь: $x_{1,2} =\pm1$, $x_{3,4} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{5,6} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Якщо ліву частину рівняння не вдається розкласти на множники за допомогою стандартних методів, відомих зі шкільного курсу, але вона є многочленом, тоді доцільно скористатися теоремою Безу, а далі — застосувати схему Горнера або виконати ділення многочлена «кутом».

Якщо ж для многочленів $P_n(x)$, $Q_m(x)$ і$K_e(x)$, де $(n,m,e) \in N$ – їхні степені, виконується рівність $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_e(x)$; $n = m + e$, то кажуть, що кожен з многочленів $Q_m(x)$ і$K_e(x)$ є дільником многочлена $P_n(x)$. Аналогічно до множини цілих чисел, у множині многочленів також не завжди можливе ділення націло. Саме тому для многочленів вводиться поняття ділення з остачею.

Поділити з остачею многочлен $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ – означає знайти єдині многочлени, для яких справджується тотожність $K_e(x)$ і $R_e(x)$, що $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_e(x) + R_к(x)$.

а) поділ «кутом».

Це алгоритм, аналогічний до ділення чисел у стовпчик, який дозволяє розділити многочлен на інший многочлен, покроково зменшуючи степінь діленого. У процесі ділення визначається головний член частки та відповідно — остача.

Якщо в заданих многочленах відсутні одночлени з певним степенем змінної *x*, то перед виконанням ділення слід доповнити ці многочлени відповідними одночленами з нульовими коефіцієнтами. Це дозволяє зберегти правильну послідовність степенів і уникнути помилок під час ділення, особливо при застосуванні методу «кутом» або схеми Горнера.

Приклад 2. Поділити $x^3 + 4x^2 + 7x + 10$ на $x + 1$

Розв'язання. $x^3 + 4x^2 + 7x + 10 = (x + 1)(x^2 + 3x + 4) + 6$.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & +\,3x & +\,4 & \\
\hline
x+1\,\big) & x^3 & +\,4x^2 & +\,7x & +\,10 \\
 & x^3 & +\,x^2 & & \\
 & & 3x^2 & +\,7x & \\
 & & 3x^2 & +\,3x & \\
 & & & 4x & +\,10 \\
 & & & 4x & +\,4 \\
 & & & & \mathbf{6}
\end{array}
$$

Приклад 3. $(3x^2 + 5x - 6) / (x - 1) = ?$

Розв’язання: $\frac{3x2\ +5x - 6}{x - 1}$

Виконуємо ділення:

$$
\begin{array}{r|lll}
 & 3x & +\,8 & \\
\hline
x-1\,\big) & 3x^2 & +\,5x & -6 \\
 & 3x^2 & -\,3x & \\
 & & 8x & -6 \\
 & & 8x & -8 \\
 & & & \mathbf{2}
\end{array}
$$

Відповідь: $3x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(3x + 8) + 2$

б) Метод підстановки невідомих коефіцієнтів.

Нехай задані два многочлени

$P_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$ — (1)
$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_{m-1}x + q_m$, де $m \leq n$ — (2)

При діленні $P_n(x)$ на $Q_m(x)$ отримаємо частку у вигляді:

$$K_{n-m}(x) = \frac{p_0}{q_0}x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \cdots + c_{n-m}$$

та остачу:

$$R_{m-1}(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \cdots + d_{m-1}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}, d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ — невідомі коефіцієнти.

Записуємо тотожність

$$P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_{n-m}(x) + R_{m-1}(x) \text{ — (3)}$$

Далі виконуємо кроки:

1. Перемножуємо $Q_m(x)$ і $K_{n-m}(x)$ алгебраїчно.
2. У правій частині рівності (3) групуємо подібні доданки.
3. Записуємо отриманий результат у вигляді з упорядкованими степенями.
4. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях зліва і справа рівності $P_n(x)$.
5. Складена система рівнянь дає змогу обчислити невідомі c_1, c_2,…,c_{n-m} і d_0, d_1, d_{m-1}.
6. Якщо всі $d_0 = d_1 = \ldots = d_{m-1} = 0$, то $P_n(x)$ то ділення виконано без остачі.
7. Якщо хоча б один із (d_0, d_1,…, d_{m-1}) $\neq 0$, у результаті утворюється остача, степінь якої відповідає найвищому степеню одночлена з виразу (2), для якого коефіцієнт є відмінним від нуля

в) схема Горнера.

Під час ділення многочлена

$$A_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

на двочлен вигляду (x-α) для знаходження коефіцієнтів частки використовується схема, розроблена видатним англійським математиком Вільямом Горнером. Цей алгоритм обчислень базується на застосуванні методу невизначених коефіцієнтів.

Припустімо, що під час ділення многочлена степеня n

$$A_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

на двочлен (x - α) отримано многочлен-частку

$$B_{n-1}(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1},$$

що має степінь n-1, а остача — деяке число. Відповідно до методу невизначених коефіцієнтів, маємо таке представлення:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = (a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - \alpha) + r = a_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x - a_0\alpha x^{n-1} - b_1\alpha x^{n-2} - \dots - b_{n-2}\alpha x - b_{n-1}\alpha + r$$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x у лівій та правій частинах рівності, отримуємо систему співвідношень:

$$a_1 = b_1 - \alpha a_0, \quad a_2 = b_2 - \alpha b_1, \quad \dots, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \quad a_n = r - \alpha b_{n-1}$$

Звідки, виражаючи коефіцієнти b_i та a_i маємо:

$$b_1 = a_1 + \alpha a_0, \quad b_2 = a_2 + \alpha b_1, \quad \dots, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \quad r = a_n + \alpha b_{n-1}$$

Алгоритм обчислення коефіцієнтів многочлена-частки B_{n-1} (x) та остачі r доцільно подати у формі схеми:

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
	↓	αa_0	αb_1	…	αb_{n-2}	αb_{n-1}
α	a_0	$b_1 b_2$	…	$b_{n-1} r$		

Приклад 4. Визначимо частку та остачу при діленні многочлена

$5x^3 - 10x^2 + 8x - 4$ на двочлен (x - 2).

Розв'язання.

				a_0	a_1	a_2	a_3
5	-10	8		-4			
				↓	10	20	56
			α = 2	5	10	18	54

Отже, часткою є многочлен $5x^3 - 10x^2 + 8x - 4$, а остача 54. Тоді $5x^3 - 10x^2 + 8x - 4 = (5x^2 + 10x + 18x)(x - 2) + 54$. Знайдемо значення многочлена при x=2, тоді $5 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 54$.

Кожного разу, коли ми ділимо многочлен $P_n(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$ і знаходимо остачу r, можемо записати рівність:

$$Pn(x) = (x - \alpha)\bullet Kn\text{-}1(x) + r,$$

яка є вірною, а при $x = \alpha$, ця рівність набуває вигляду $P_n(\alpha) = r$.

Така властивість дозволяє не тільки отримати залишок, але й перевірити коректність ділення. Це може бути корисним інструментом для перевірки результатів та спрощення подальших обчислень.

Цим самим ми підтверджуємо правильність твердження, відомого в математиці як теорема Безу. Згідно з цією теоремою, остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $(x\text{-}\alpha)$ дорівнює значенню самого многочлена в точці $x = \alpha$, тобто залишок r від ділення дорівнює значенню многочлена $r = P_n(\alpha)$.

Приклад 5. Визначимо залишок від ділення многочлена $B(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ на двочлен $(x - 2)$. Відповідно до теореми Безу маємо $r = B(2)$. Підставимо x-2 у вираз для B(x):

$$r = B(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 5(2) – 6 = 8\text{-}8\text{+}10\text{-}6 = 4.$$

2.4 Метод заміни змінних

Цей спосіб дозволяє спростити розв'язання різноманітних алгебраїчних рівнянь вищих степенів. Особливу увагу варто приділити симетричним і зворотним рівнянням.

Симетричними називають рівняння такого типу $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + +a_{n-1} x + a_n=0$.

Розглянемо рівняння $a_0 x^4 + a_1 x^3 +a_2 x^2 +a_3 x+ a_4=0$ – рівняння парного ступеня, яке має симетричну структуру. Виконаємо ділення обох частин рівняння наx^2 $(x\neq0)$. У результаті матимемо рівносильне рівняння:

$a_0 x^2 + a_1 x+a_2 + + = 0$, тоді

$a_0 (x^2 +)+ a_1 (x+ \frac{1}{x}) + a_2 = 0$. Запровадимо таке позначення: $x+ \frac{1}{x} = y$, тоді

$y^2 = (x+ \frac{1}{x})^2 = x^2+2+$, отже

$x^2+\frac{1}{x^2}= y^2 -2$. Отримаємо рівняння щодо нової змінної *y*.

$a_0(y^2 - 2) + a_1y + a_2 = 0$,

$a_0y^2 + a_1y - (2a_0 - a_2) = 0$.

Після розв’язання нового рівняння початкове зводиться до пари рівнянь:

$x + \frac{1}{x} = y_1$ та $x + \frac{1}{x} = y_2$.

Приклад 5. Вирішити рівняння: $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

Розв'язання: Розділимо обидві сторони рівняння на x^2. У результаті отримаємо: $6(x^2 +) + 5(x + \frac{1}{x}) - 38 = 0$.

Тоді $x + \frac{1}{x} = y$, а $x^2 + \ = y^2 - 2$, отримаємо

$6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$,

$6y^2 - 12 + 5y - 38 = 0$,

$6y^2 + 5y - 50 = 0$.

Звідси $y_1 = \frac{5}{2}$; $y_2 = -\frac{10}{3}$. Після підстановки маємо:

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$

$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$.

$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_3 = -\frac{1}{3}$

$x_2 = 2$ $x_4 = -3$.

Відповідь: $-\frac{1}{3}$, 2, - 3.

Приклад 6. Вирішити рівняння: $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3 = 0$.

Розв'язання: Розділимо обидві сторони рівняння на x^2. Отримаємо

$3x^2 + 2x + 5 + \frac{2}{x} + \ = 0$, тоді

$3(x^2 +) + 2(x + \frac{1}{x}) + 5 = 0$.

Нехай $x + \frac{1}{x} = c$, тоді

$x^2 + \ = c^2 - 2$.

$3(c^2 - 2) + 5c + 5 = 0$,

$3c^2 + 2c - 1 = 0$

$c_1 = \frac{1}{3}$; $c_2 = -1$. Отже,

$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$ і $x+$

$x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0$ $x^2 + x + 1 = 0.$

$x_{1,2} = \frac{1\pm i\sqrt{35}}{6}$, $x_{3,4} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Відповідь: $\frac{1\pm i\sqrt{35}}{6}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 7. Вирішити рівняння: $\frac{a^2-a}{a^2-a+1} - \frac{a^2-a+2}{a^2-a-2} = 1.$

Розв'язання: Запровадимо нову змінну = x, отримаємо

$\frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} = 1.$

Здійснимо перетворення лівої частини рівняння:

$\frac{x^2-2x-x^2-3x-2}{x^2-x-2} = 1,$

$-1 = 0$. Звідси

$-x^2 - 4x = 0$ $x^2 - x - 2 \neq 0$

$x_1 = 0, x_2 = -4$ $x_1 \neq 2, \ x_2 \neq -1$.Скористаємося підстановкою

$a^2 - a = 0$ і $a^2 - a = -4$ отримаємо

$a_1 = 0, \ a_2 = 1$ $D = -15$

$$a_{3,4} = \frac{1\pm i\sqrt{15}}{2} \quad .$$

Відповідь: 0; 1;$\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$

Приклад 8. Вирішити рівняння: $5x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + x + 4 = 0$ – Симетричне алгебраїчне рівняння непарного ступеня.

Розв'язання: Об'єднаємо симетричні члени. Отримаємо:

$4(x^5+1) + x(x^3+1) - 5x^2(x+1) = 0,$

$4(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + (x+1)(x^3 - x^2 + x) - 5x^2(x+1),$

$(x+1)(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 0,$

Звідки $x_1 = -1$, $4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$ –рівняння четвертого порядку, що є симетричним $x_2 = x_3 = 1$, $x_{4,5} = \frac{-5\pm i\sqrt{39}}{8}$.

Відповідь: ±1; $\frac{-5\pm i\sqrt{39}}{8}$.

3. Дослідження числових властивостей.

Часто традиційні методи не працюють для нестандартних рівнянь. Тоді варто звернути увагу на властивості чисел, з яких складається рівняння, щоб знайти розв'язки.

Приклад 9. Вирішити рівняння: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

Розв'язання. Аналіз числових компонентів дозволяє зробити такі висновки:

1) $16 = 2^4$;
2) $(x + \ )^4 = 2^4$, коли $x = - 5$, тоді $(x + 5)^4 = 0$;
3) $(x + 5)^4 = 2^4$, коли $x = - 3$ тоді $(x + 3)^4 = 0$;

Тому, числа -3 і -5 є розв'язками цього рівняння.

Нехай $x + 4 = y$, маємо рівняння $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$ отримаємо

$(y – 1)^4 + (y + 1)^4 = 16$, тому

$y^4 - 4y^3 + 6y^2 – 4y +1 + y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y +1 = 16$,

$y^4 + 6y^2 – 7 = 0$, тоді

$y^2 = 1$; $y^2 = -7$.

Беручи до уваги зроблену підстановку $x + 4 = y$, отримаємо

$(x + 4)^2 = 1$ і $(x + 4)^2 = -7$

$x^2 + 8x + 15 = 0$ $x^2 + 8x + 23 = 0$

$x_1 = -5$; $x_2 = -3$ $D = -28$

$$x_{3,4} = \frac{-8 \pm 2i\sqrt{7}}{2} = -4 \pm i\sqrt{7}$$

Відповідь: -5; -3; $-4 \pm i\sqrt{7}$

Приклад 10. Вирішити рівняння: $x^6(1 – x) – x^3 (1 – x^2) + x – x^2 = 0$.

Розв'язання: Виконаємо розклад лівої частини на множники:

$x^6(1 – x) – x^3 (1 – x)(1 + x) + x(1 – x) = 0$,

$x(1 – x)(x^5 – x^2(1 + x) + 1) = 0$,

$x_1 = 0$ або $1 – x = 0$ або $x^5 – x^2 – x^3 + 1 = 0$.

$x_2 = 1$

Аналіз ступенів і числових коефіцієнтів дозволяє стверджувати, що рівнянням $x^5 – x^2 – x^3 + 1 = 0$ має корені $x = \pm 1$.

Отже, $x^5 – x^2 – x^3 + 1 = (x – 1) (x – 1) (x^2 + x + 1)$

$x^2 + x + 1 = 0$ при $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Відповідь: 0 ; ± 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Завдяки методу спостереження можна розв’язувати рівняння вищих порядків, які містять модуль.

Приклад 11. Вирішити рівняння: $3\,|x^7| + 6x^4 + 4|x|^3 + 7x^2 + 13|\,x| = 0$.

Розв'язання: Адже $|x|^n \geq 0$, при x , Тож єдиним значенням, при якому рівняння виконується, є 0. Коли $x \neq 0$, Таким чином, значення лівої частини перевищує нуль.

Відповідь: 0.

4. Рівняння з параметром.

У деяких випадках для розв’язування нетипових рівнянь доцільно вводити параметр. Такий підхід дозволяє розширити можливості аналізу й дати загальні рекомендації для пошуку розв’язків.

Для рівнянь із параметрами можна сформулювати низку загальних положень, дотримання яких забезпечує структурований підхід:

1. Визначення області допустимих значень (ОДЗ) — спочатку встановлюють область визначення змінної, а також допустимі значення самого параметра.
2. Побудова виразів — намагаються виразити змінну через параметр або навпаки.
3. Аналіз множини коренів — для кожного допустимого значення параметра знаходять усі можливі корені рівняння.
4. Дослідження особливих випадків — виявляють значення параметра, для яких розв’язки існують, але не підпадають під загальну формулу, отриману раніше.

Приклад 18. Вирішити рівняння: $x^3 - (\sqrt{7} + 1)x^2 + 7 = 0$ використовуючи параметр як допоміжну змінну.

Розв'язок: Бодай$\sqrt{7} = a$, відтак

$x^3 - (a + 1)x^2 + a^2 = 0$,

$x^3 - ax^2 - x^2 + a^2 = 0$,

$a^2 - ax^2 - (x^3 - x^2) = 0$,

Рівняння зводиться до квадратного відносно a.

$D = x^4 - 4(x^3 - x^2) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 = (x^2 - 2x)^2$

$a_1 = \frac{x^2 + x^2 - 2x}{2} = x^2 - x$; $\quad a_2 = \frac{x^2 - x^2 + 2x}{2} = x$.

Отож, $a^2 - ax^2 - (x^3 - x^2) = (a - x^2 + x)(a - x) = 0$.

Підставимо значення параметра:

$(\sqrt{7} - x^2 + x)(\sqrt{7} - x) = 0$,

$\sqrt{7} - x^2 + x = 0$ або $\sqrt{7} - x = 0$

$D = 1+28 = 29$ $x = \sqrt{7}$

$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Відповідь: $\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$, $\sqrt{7}$

Приклад 12. Вирішити рівняння: $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + a)x - (a^2 - a) = 0$

Розв'язання: Запишемо рівняння у виді

$x^3 - 2ax^2 - x^2 + a^2x + ax - a^2 + a = 0$, тоді

$a^2(x - 1) - a(2x^2 - x - 1) + x^2(x - 1) = 0$,

$a^2(x - 1) - a(x - 1)(2x + 1) + x^2(x - 1) = 0$, отож

$(x - 1)(a^2 - (2x + 1)a + x^2) = 0$

Звідсіль $x - 1 = 0$ або $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$

$x = 1$

Підставимо конкретне значення параметра у рівняння х:

а) коли $a \geq 0$, то $x_1 = a + \sqrt{a}$, $x_2 = a - \sqrt{a}$;

б) коли $a < 0$, то рівняння вийде

$x^2 + 2ax + a^2 + a = 0$

$D = -4a$, звідсіля

$x_1 = -a + i\sqrt{a}$, $x_2 = -a - i\sqrt{a}$.

Відповідь: коли $a \geq 0$, т $x_1 = 1$, $x_2 = a + \sqrt{a}$, $x_3 = a - \sqrt{a}$

коли $a < 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -a + i\sqrt{a}$, $x_3 = -a - i\sqrt{a}$

Приклад 13. Вирішити рівняння: $z^3 - (2p + 1)z^2 + (p^2 + 2p - q)z - (p^2 - q) = 0$

Розв'язок: Напишемо рівняння

$z^3 - 2pz^2 - z^2 + p^2z + 2pz - qz - p^2 + q = 0$, тоді

$p^2(z - 1) - 2pz(z - 1 + z^2(z - 1) - q(z - 1) = 0$,

$(z - 1)(p^2 - 2pz + z^2 - q) = 0$,

$z - 1 = 0$ або $p^2 - 2pz + z^2 - q = 0$

$z = 1$ $(p - z)^2 = q$

$(p - z) = \pm \sqrt{q}$

$z = p \pm \sqrt{q}$

а) коли $q > 0$, то $z_1 = 0$, $z_2 = p + \sqrt{q}$, $z_3 = p - \sqrt{q}$;

б) коли $q < 0$, то $z_1 = 0$, $z_2 = p + i\sqrt{q}$, $z_3 = p - i\sqrt{q}$.

Відповідь: коли $q > 0$, то $z_1 = 0$, $z_{2,3} = p \pm \sqrt{q}$

Коли $q < 0$, то $z_1 = 0$, $z_{2,3} = p \pm i\sqrt{q}$.

Поняття рівняння — одне з основоположних у алгебрі, адже саме рівняння є вираженням аналітичного способу мислення. Багато задач з геометрії, фізики, хімії зводяться до побудови математичної моделі, яка часто набуває вигляду рівняння, розв'язання якого є ключем до розв'язання самої задачі. Отже, рівняння можна розглядати як символічну форму відображення реальних явищ.

Розв'язуючи рівняння, ми не лише шукаємо числові відповіді, а й розвиваємо логічне мислення: навчаємося аналізувати, порівнювати, узагальнювати, зіставляти нові задачі з уже відомими, виявляти спільні та відмінні риси. Таким чином, робота з рівняннями сприяє формуванню глибших аналітичних навичок і вмінню застосовувати математичні знання у різних сферах.

Розв'язок рівнянь вищих степенів дає змогу комплексно застосовувати всі відомі нам методи перетворення многочленів. У процесі такого аналізу виникає також потреба у розширенні множини дійсних чисел і переході до поля комплексних чисел [8].

РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Алгоритми для розв'язання квадратних рівнянь

Алгоритми на основі дискримінанту

```
if a == 0:
   if b == 0:
      if c == 0:
         Всі числа — рішення (хаос).
      else:
         Немає рішень (плач).
   else:
      Розв'язуємо лінійне рівняння: x = -c/b
else:
   Обчислюємо D = b² - 4ac
if D > 0:
      Два корені
   elif D == 0:
      Один корінь
   else:
      Немає дійсних коренів
```

Програмні реалізації для розв'язування квадратних рівнянь

Python

```
import math

def solve_quadratic(a, b, c):
   if a == 0:
      if b == 0:
         return "Рішення: нескінченно багато" if c == 0 else "Рішення немає"
      else:
         return f"Один корінь: x = {-c / b}"
```

```
  D = b**2 - 4*a*c

   if D > 0:
x1 = (-b + math.sqrt(D)) / (2*a)
x2 = (-b - math.sqrt(D)) / (2*a)
      return f"Два корені: x1 = {x1}, x2 = {x2}"
   elif D == 0:
      x = -b / (2*a)
      return f"Один корінь: x = {x}"
   else:
return "Дійсних коренів немає"

# Приклад використання
print(solve_quadratic(1, -3, 2))  # Два корені: x1 = 2.0, x2 = 1.0
```

C++

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
void solveQuadratic(double a, double b, double c) {
   if (a == 0) {
      if (b == 0) {
         if (c == 0)
            cout << "Нескінченна кількість рішень\n";
         else
            cout << "Немає рішень\n";
      } else {
         cout << "Один корінь: x = " << -c / b << endl;
      }
      return;
   }
```

```
    double D = b*b - 4*a*c;

    if (D > 0) {
        double x1 = (-b + sqrt(D)) / (2*a);
        double x2 = (-b - sqrt(D)) / (2*a);
        cout<< "Два корені: x1 = " <<x1 << ", x2 = " <<x2 <<endl;
} else if (D == 0) {
        double x = -b / (2*a);
        cout << "Один корінь: x = " << x << endl;
    } else {
        cout << "Дійсних коренів немає\n";
    }
}

int main() {
solveQuadratic(1, -3, 2);
    return 0;
}
```

3.2 Числові алгоритми для розв'язування складних рівнянь

У багатьох випадках рівняння настільки складні, що розв'язати їх аналітично (тобто "вручну", через прості перетворення) неможливо або дуже незручно.

Для таких ситуацій використовують числові методи — способи, що дозволяють знайти приблизне значення кореня за допомогою обчислень.

Головна ідея цих методів — поступово наближатися до правильного розв'язку, поки похибка не стане мінімальною.

Метод бісекції, або метод ділення навпіл, працює дуже просто:

- Ми беремо два числа, між якими функція змінює знак (наприклад, в одному значенні результат негативний, у другому — позитивний).

- Потім ділимо цей проміжок навпіл і перевіряємо середню точку:
  - Якщо у середині знак змінився, продовжуємо шукати там.
  - Якщо ні — беремо іншу половину.
- Повторюємо ділення доти, поки інтервал не стане настільки маленьким, що можна вважати знайдений корінь достатньо точним.

Метод Ньютона (метод дотичних). Цей метод використовує властивість, що функція в якійсь точці має певний нахил (тобто пряму, яка її торкається).

1) Починаємо з якоїсь стартової точки.
2) Проводимо дотичну до графіка функції в цій точці.
3) Дивимося, де ця дотична перетинає вісь X — це і буде наступне наближення до кореня.
4) І так повторюємо, кожного разу обираючи нову точку.

Метод хорд — це спрощена версія методу Ньютона:

1) Беремо дві точки.
2) З'єднуємо їх прямою (це і є хорда).
3) Дивимося, де ця пряма перетне вісь X.
4) Далі оновлюємо точки і повторюємо.

3.3 Застосування алгоритмів в науці та техніці

Алгоритми є основою сучасної науки та техніки, оскільки вони дозволяють автоматизувати процеси обробки даних, прийняття рішень і оптимізації систем. Вони застосовуються в різних галузях, від інформатики і робототехніки до біотехнологій і астрономії. У цьому підрозділі ми розглянемо кілька основних напрямків застосування алгоритмів у науці та техніці.

Алгоритми є основою для всіх операцій у комп'ютерних системах. Вони використовуються для обробки даних, пошуку, сортування і фільтрації. Наприклад, алгоритм сортування швидким методом (QuickSort) або пошук найкоротшого шляху в графах за допомогою алгоритму Дейкстри. Алгоритми ШІ, зокрема нейронні мережі та глибинне навчання, дозволяють машинам розпізнавати патерни, класифікувати об'єкти, прогнозувати події та приймати рішення. Одним із прикладів є алгоритми для обробки зображень, які використовуються в медицині для діагностики, таких як системи автоматичного розпізнавання раку. Алгоритми шифрування і дешифрування, такі як алгоритм RSA, використовуються для забезпечення безпеки передачі інформації в Інтернеті, зберігання даних, а також для фінансових транзакцій.

У сфері обчислювальної техніки алгоритми використовуються для обчислювальної фізики, чисельного моделювання фізичних процесів, таких як рух частинок, взаємодія об'єктів в рідинах чи газах, атмосферні процеси. Алгоритми, що використовуються в методах скінченних елементів (Finite Element Method, FEM), дозволяють точно моделювати складні матеріали та структури. В обчислювальній хімії та біології алгоритми моделювання молекул і молекулярних структур використовуються для вивчення взаємодії між атомами та молекулами, що допомагає в розробці нових лікарських засобів. Один із таких методів — молекулярна динаміка, що дозволяє вивчати рух молекул під впливом сил. Алгоритми для аналізу структур, розрахунку механічних властивостей матеріалів, оптимізації конструкцій та розподілу навантажень використовуються в інженерних розрахунках.

В робототехніці алгоритми використовуються для навігації і планування траєкторій. Алгоритми для пошуку оптимальних маршрутів, такі як алгоритм A* або методи глибокого навчання для розпізнавання та уникнення перешкод в реальному часі. Алгоритми для управління рухом роботів, маніпуляторами, а також для координації роботи групи роботів у складних умовах. Алгоритми машинного навчання, які дозволяють роботам адаптуватися до змінюваних умов, розпізнавати об'єкти, взаємодіяти з людьми і виконувати складні завдання в реальному світі.

У медицині та біотехнології алгоритми відіграють ключову роль у медичній діагностиці, обробці медичних зображень, наприклад, в рентгенографії або МРТ. Алгоритми машинного навчання здатні допомогти лікарям виявити аномалії на зображеннях, що покращує точність діагностики. Алгоритми для аналізу ДНК, пошуку генетичних маркерів, створення моделі функціонування біологічних систем використовуються в геноміці та біоінформатиці. Алгоритми допомагають розробляти медичні імплантати, а також у роботизованих хірургічних системах, де точність і швидкість виконання операцій має вирішальне значення.

Алгоритми в астрономії використовуються для аналізу астрономічних даних, обробки зображень з телескопів і пошуку небесних тіл, таких як екзопланети чи астероїди. Алгоритми машинного навчання використовуються для класифікації космічних об'єктів за їхніми характеристиками. Алгоритми для моделювання руху планет, зірок і галактик дозволяють вивчати взаємодію космічних об'єктів і передбачати їхню поведінку на великих масштабах. Алгоритми для аналізу радіосигналів, що надходять з космосу, використовуються в рамках проектів, таких як пошук позаземного розуму (SETI).

Алгоритми мають значне застосування в науці та техніці, і їх роль буде тільки зростати з розвитком новітніх технологій. Вони використовуються для обробки даних, оптимізації процесів, автоматизації різних систем і полегшення складних розрахунків у різних галузях, від інформатики до астрономії та медицини. Застосування алгоритмів дозволяє значно підвищити ефективність, точність і швидкість вирішення завдань, що має критичне значення для розвитку сучасних технологій та наукових досліджень.

ВИСНОВКИ

У процесі виконання дослідження було розглянуто основні теоретичні та практичні аспекти розв'язування алгебраїчних рівнянь, що є важливими для розвитку математичних та інженерних наук. Основну увагу було приділено класичним методам розв'язання рівнянь, числовим методам для розв'язування нелінійних рівнянь, а також застосуванню алгоритмів у технічних і наукових розрахунках.

Дослідження показало, що правильне вибрання методу розв'язування рівнянь, зокрема числових і ітераційних, має вирішальне значення для отримання точних та швидких результатів у різноманітних галузях науки і техніки. Алгоритми, застосовувані для розв'язування квадратних, нелінійних та складних рівнянь, активно використовуються в наукових дослідженнях, інженерії та розробках нових технологій.

Розроблені та вивчені алгоритми можуть значно підвищити ефективність вирішення складних математичних завдань, автоматизуючи обчислювальні процеси, знижуючи ймовірність помилок і скорочуючи час, необхідний для отримання результатів. Застосування цих методів дозволяє розв'язувати не тільки класичні математичні задачі, а й надавати ефективні рішення для сучасних інженерних та наукових проблем.

Таким чином, дослідження показало важливість алгоритмів та числових методів у вирішенні складних задач, що сприяє розвитку точних наук і технологій у різних сферах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебраїчні рівняння. URL: https://uk.economy-pedia.com/11040934-algebraic-equations

2. Що таке лінійні рівняння та як їх розв’язувати. URL: https://mukachevo.net/news/shcho-take-liniyni-rivniannia-ta-iak-yikh-rozviazuvaty_6266744.html

3. Квадратні рівняння. URL: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/tema17.htm

4. Як розв'язувати кубічні рівняння та рівняння четвертого степеня. URL: https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/alhebra/rivnyannya-ta-nerivnosti/rivnyannya/dilennya-mnohochleniv-stovpchykom/yak-rozvyazuvaty-kubichni-rivnyannya-ta-rivnyannya-chetvertoho-stepenya

5. Знаходження раціональних коренів многочленів з раціональними (цілими) коефіцієнтами. URL: https://studfile.net/preview/5465835/page:8/

6. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння: електронний посібник для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика» вищих навчальних закладів / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2022. – Електронний ресурс. – Режим доступу: https://shron1.chtyvo.org.ua/Hoi_Taras/Dyferentsialni_ta_intehralni_rivniannia.pdf?PHPSESSID=l8kg0quntd8k7ua07rhco383m3

7.Розв’язування нелінійних алгебраїчних та трансцендентних рівнянь. URL: https://studfile.net/preview/9982537/page:7/

8. Методи для рівнянь вищих степенів. URL:https://urok.osvita.ua/materials/edu_technology/44592/attachment-download/14650/