Прикарпатський національний університет імені
Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математичного і функціонального аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
на тему “ Симетричні поліноми на просторі абсолютно сумовних послідовностей”

Виконав студент IV курсу,
групи М-41
спеціальності 111 Математика
Кашуба Олег Федорович
Керівник: д.ф.-м.н., проф.
Василишин Т.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц.
Марцінків М.В.

Івано-Франківськ, 2025

Зміст

Вступ

Симетричні поліноми — це спеціальний клас поліноміальних функцій, які не змінюють свого значення при довільній перестановці аргументів. У класичній алгебрі для скінченого набору змінних відомо, що такі поліноми виражаються через елементарні симетричні поліноми і широко використовуються у комбінаториці, теорії представлень та інших галузях. Натомість дослідження симетричних поліномів у нескінченновимірному контексті, зокрема на просторі ℓ_1, є менш розвиненим, але має власний математичний інтерес і перспективні застосування.

У цій роботі описано базові поняття, пов'язані із симетричними поліномами на ℓ_1. Зокрема, наведено визначення простору ℓ_1 та його основні властивості, пояснено, що таке поліноми на нескінченновимірних банахових просторах, а також зосереджено увагу на симетричних поліномах. Наприкінці розглянуто можливі сфери застосування симетричних поліномів у функціональному аналізі, комбінаториці.

Розділ 1

Простір ℓ_1

1.1 Означення простору ℓ_1

Простір ℓ_1 складається з усіх послідовностей дійсних або комплексних чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для яких виконується умова абсолютної сумовності:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty.$$

Елементи цього простору називають абсолютно сумовними послідовностями.

1.2 Приклади елементів простору ℓ_1

Розглянемо кілька прикладів елементів простору l_1:

1. $x = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.
2. $x = (7, 11, 5, 0, 0, 0, \ldots)$.
3. $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

1.3 Норма у просторі ℓ_1

У просторі l_1 введена норма, яка визначається як сума модулів елементів послідовності:

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

Розглянемо кілька прикладів обчислення норми для елементів, описаних вище:

1. Для елемента $x = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$:

$$\|x\|_{l_1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

2. Для елемента $x = (7, 11, 5, 0, 0, 0, \ldots)$:

$$\|x\|_{l_1} = 7 + 11 + 5 = 23.$$

3. Для елемента $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$:

$$\|x\|_{l_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Розділ 2

Поліноми на просторі ℓ_1

2.1 Означення полінома на просторі ℓ_1

Поліном на ℓ_1 — це функція, яка відображає вектор $x \in \ell_1$ у число (реальне чи комплексне) $P : \ell_1 \to R(C)$ і ця функція записується у вигляді скінченної суми однорідних поліномів:

$$P(x) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha x^\alpha$$

де:

$A = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(k)}\}$, k $< \infty$,

$\alpha^{(i)} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$, $\alpha_j \in N_0$ і лише скінченна кількість $\alpha_j \neq 0$,

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ...$,

$c_\alpha \in R$ або C — коефіцієнти,

Степінь полінома $\max\limits_{\alpha \in A}(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i)$

2.2 Приклади поліномів на просторі ℓ_1

1. Поліном степеня 1:

$A = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\}$

$\alpha^{(1)} = (1, 0, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(2)} = (0, 1, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(3)} = (0, 0, 1, 0, ...)$

$c_{\alpha^{(1)}} = 3$

$c_{\alpha^{(2)}} = -2$

$c_{\alpha^{(3)}} = 5$

$$P(x) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

2. Однорідний поліном степеня 2:

$A = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\}$

$\alpha^{(1)} = (2, 0, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(2)} = (0, 1, 1, 0, ...)$

$\alpha^{(3)} = (0, 0, 0, 2, ...)$

$c_{\alpha^{(1)}} = 1$

$c_{\alpha^{(2)}} = 4$

$c_{\alpha^{(3)}} = -5$

$$P(x) = x_1^2 + 4x_2x_3 - 5x_4^2$$

3. Неоднорідний поліном степеня 3:

$A = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\}$

$\alpha^{(1)} = (1, 0, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(2)} = (1, 1, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(3)} = (0, 0, 3, 0, ...)$

$c_{\alpha^{(1)}} = 1$

$c_{\alpha^{(2)}} = 1$

$c_{\alpha^{(3)}} = 2$

$$P(x) = x_1 + x_2x_3 + 2x_3^3$$

4. Неоднорідний поліном степеня 4:

$A = \{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}\}$

$\alpha^{(1)} = (0, 0, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(2)} = (0, 1, 0, 0, ...)$

$\alpha^{(3)} = (0, 1, 1, 0, ...)$

$\alpha^{(4)} = (0, 2, 0, 2, ...)$

$c_{\alpha^{(1)}} = 1$

$c_{\alpha^{(2)}} = 1$

$c_{\alpha^{(3)}} = -1$

$c_{\alpha^{(4)}} = 1$

$$P(x) = 1 + x_2 - x_2 x_3 + x_2^2 x_4^2$$

Розділ 3

Симетричні поліноми на просторі ℓ_1

3.1 Означення симетриних поліномів на просторі ℓ_1

Поліном $P(x)$, заданий на ℓ_1, називається симетричним, якщо:

$$P(x_1, x_2, x_3, ...) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(2)}, ...)$$

для будь-якої перестановки $\sigma : N \to N$, що змінює лише скінченну кількість індексів.

3.2 Приклади симетриних поліномів на просторі ℓ_1

1.
$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

2.
$$P(x) = \sum_{1 \leq i < j < \infty}^{\infty} x_i x_j$$

3.
$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^4$$

Усі ці поліноми не змінюються при перестановці координат — отже, симетричні.

3.3 Приклади не симетриних поліномів на просторі ℓ_1

1.
$$P(x) = x_1$$

2.

$$P(x) = x_1^2 + 3x_2$$

3.

$$P(x) = x_1 x_2^2 + x_3$$

У всіх цих прикладах значення полінома змінюється при перестановці координат — отже, несиметричні.

Розділ 4

Квадратичні, білінійні та m-лінійні форми

4.1 Опис квадратичних і білінійних форм на лінійних просторах

Квадратичні та білінійні форми є важливими поняттями в аналізі лінійних просторів, оскільки вони описують фундаментальні взаємозв'язки між елементами цих просторів та їх властивості.

4.1.1 Білінійні форми

Визначення. Нехай V — лінійний простір над полем R або C. Білінійною формою на V називається відображення:

$$B : V \times V \to R\ (C),$$

яке є лінійним за кожним аргументом, тобто:

$$B(ax + by, z) = aB(x, z) + bB(y, z), \quad B(z, ax + by) = aB(z, x) + bB(z, y),$$

для всіх $x, y, z \in V$ та $a, b \in R\ (C)$.

4.1.2 Квадратичні форми

Визначення. Квадратична форма на лінійному просторі V — це відображення:

$$Q : V \to R\ (C),$$

яке може бути записане у вигляді:

$$Q(x) = B(x, x),$$

де B — симетрична білінійна форма.

4.1.3 Приклади білінійних та квадратичних форм

1. Білінійна форма у просторі R^n: Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Білінійна форма B на R^n може бути задана як:

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця.

Конкретні приклади білінійних форм:

$$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

$$B(x, y) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + x_1 y_2.$$

$$B(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 5x_3 y_3.$$

2. Квадратична форма у просторі R^n: Квадратична форма Q у R^n має вигляд:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

де $A = (a_{ij})$ — симетрична матриця. Якщо A є діагональною матрицею, то:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$

Конкретні приклади квадратичних форм:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1 x_2 + 3x_2^2.$$

$$Q(x) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2.$$

4.2 Поляризаційна формула та її доведення

Поляризаційна формула встановлює зв'язок між симетричною білінійною формою та квадратичною формою, що дозволяє виразити одну через іншу. Це фундаментальний інструмент у дослідженні властивостей квадратичних форм.

4.2.1 Поляризаційна формула

Нехай V — лінійний простір над полем R або C, $B(x, y)$ — симетрична білінійна форма, а $Q(x)$ — відповідна їй квадратична форма, тобто:

$$Q(x) = B(x, x), \quad \forall x \in V.$$

Поляризаційна формула дозволяє відновити $B(x, y)$ через $Q(x)$.:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right), \quad \forall x, y \in V.$$

4.2.2 Доведення поляризаційної формули для R

Для простору над R доведемо формулу:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right).$$

1. Розпишемо $Q(x + y)$ через $B(x, y)$:

$$Q(x + y) = B(x + y, x + y).$$

2. Використовуючи лінійність B, маємо:

$$B(x + y, x + y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y).$$

3. Звідси:

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2B(x, y).$$

4. Виразимо $2B(x, y)$:

$$2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

5. Поділивши на 2, отримуємо:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right).$$

Таким чином, формула доведена.

4.3 Норми квадратичних і білінійних форм

4.3.1 Квадратичні форми

Нехай $Q(x)$ — квадратична форма, задана як:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x_i x_j,$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots) \in V$, а a_{ij} — коефіцієнти форми.

Норма квадратичної форми.

$$\|Q\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|.$$

Приклади:

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad \|Q\| = 1.$$

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2, \quad \|Q\| = 4.$$

$$Q(x) = 5x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2, \quad \|Q\| = 7.$$

4.3.2 Білінійні форми

Нехай $B(x, y)$ — білінійна форма, задана як:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x_i y_j,$$

де $x, y \in V$, а a_{ij} — коефіцієнти форми.

Норма білінійної форми.

$$\|B\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|.$$

Приклади:

$$B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2, \quad \|B\| = 1.$$

$$B(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_1y_2, \quad \|B\| = 3.$$

$$B(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3, \quad \|B\| = 5.$$

4.4 m-лінійні форми, їх узагальнення та поляризаційна формула

4.4.1 m-лінійні форми

Нехай V — n-вимірний векторний простір над полем K ($K = R$ або C). m-лінійна форма A задається виразом:

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_m}^{(m)},$$

де $v_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ — вектори з простору V, а $a_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in K$ — коефіцієнти, що визначають форму A.

Приклад: - Для $m = 2$ маємо білінійну форму:

$$A(v_1, v_2) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 i_2} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)}.$$

Приклад: - Для $m = 3$:

$$A(v_1, v_2, v_3) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} x_{i_3}^{(3)}.$$

4.4.2 Поляризаційна формула

Поляризаційна формула дозволяє відновити m-лінійну форму A через її значення на сумах векторів. Формула має вигляд:

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \frac{1}{m! \cdot 2^m} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m \, A \left(v_0 + \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j v_j \right)^m ,$$

де $v_1, \ldots, v_m \in V$, а сума береться по всіх можливих наборах $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$.

Приклад для $m = 2$:

$$A(v_1, v_2) = \frac{1}{8} \left(A(v_1 + v_2) - A(v_1 - v_2) - A(v_1 + v_2) + A(v_1 - v_2) \right).$$

Приклад для $m = 3$:

$$A(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{48} \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 = \pm 1} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \, A \left(\epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 + \epsilon_3 v_3 \right)^3 .$$

4.4.3 Узагальнення квадратичної форми

m-лінійна форма A породжує узагальнену квадратичну форму Q_m, якщо всі аргументи однакові:

$$Q_m(v) = A(\underbrace{v, v, \ldots, v}_{m}).$$

Приклад для $m = 2$ (квадратична форма):

$$Q_2(v) = A(v, v) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2}.$$

Приклад для $m = 3$:

$$Q_3(v) = A(v, v, v) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_3=1}^{n} a_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}.$$

Розділ 5

S-Симетричні m-лінійні форми

5.1 Означення S-Симетричних m-лінійних форм

Нехай $V = R^n$ — скінченновимірний векторний простір над R з базисом $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, де $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ — стандартний базисний вектор.
Нехай $A_0 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — множина базисних векторів.
Визначимо групу $B_{A_0}(R^n)$ як множину всіх лінійних операторів $f : R^n \to R^n$, які зберігають множину A_0, тобто $f(A_0) = A_0$.
Нехай $S \subset B_{A_0}(R^n)$ — підгрупа лінійних операторів, які переставляють базисні вектори $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.
Визначимо відношення еквівалентності $\sim$ на множині N^m, де кожний елемент має вигляд $i = (i_1, i_2, ..., i_m)$, $i_k \in \{1, 2, ..., n\}$.
Для $i = (i_1, i_2, ..., i_m)$ та $j = (j_1, j_2, ..., j_m)$ кажемо, що $i \sim j$ якщо існує такий оператор $f \in S$, що для всіх $k, h \in \{1, 2, ..., m\}$ виконується $f(e_{i_k}) = e_{i_h}$.
Це відношення є еквівалентним, а $N^m/\sim$ — це множина класів еквівалентності, позначених як $\{M\}$.
Нехай $A : (R^n)^m \to R$ m-лінійна форма, яка є S-симетричною, тобто $A(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_m)) = A(v_1, v_2, ..., v_m)$ для всіх $f \in S$ і всіх $v_1, v_2, ..., v_m \in R^n$.
Крім того, A є симетричною щодо перестановок аргументів, тобто для будь-якої перестановки σ :

$$A(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(m)}) = A(v_1, v_2, ..., v_m)$$

Кожна неперервна m-лінійна S-симетрична форма А на $(R^n)^m$ може бути представлена у вигляді:

$$A(v_1, v_2, ..., v_m) = \sum_{M \in N^m/\sim} YM \sum_{i \in M} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} ... x_{i_m}^{(m)},$$

де:

$v_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \in R^n$.

$M \in N^m/\sim$ — класи еквівалентності,

$YM = A(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_m})$, для будь-якого $(i_1, i_2, ..., i_m) \in M$.

5.2 Приклади S-Симетричних m-лінійних форм

5.2.1 Для $m = 1$

$$A(v) = \sum_{M \in N/\sim} YM \sum_{i \in M} x_i$$

1.

$M = \{1, 2, ..., n\}$

$N/\sim = \{M\}$

$$A(v) = YM \sum_{i \in M} x_i$$

2.

$M_i = \{i\}, i \in \{1, 2, ..., n\}$

$N/\sim = \{M_1, M_2, ..., M_{n-2}\}$

$$A(v) = \sum_{i=1}^{n} YM_i x_i$$

3.

$M_1 = \{1, 2, 3\}$

$M_{i-2} = \{i\}, i \in \{4, 5, ..., n\}$

$N/\sim = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$

$$A(v) = YM_1(x_1 + x_2 + x_3) + \sum_{i=4}^{n} YM_{i-2} x_i$$

5.2.2 Для $m = 2$

$$A(v_1, v_2) = \sum_{M \in N^m/\sim} YM \sum_{i \in M} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)}$$

1.

$M = \{(i_1, i_2) : i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., n\}\}$

$N/\sim = \{M\}$

$$A(v_1, v_2) = YM \sum_{i \in M} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)}$$

2.

$M_{(i_1-1)*n+i_2} = \{(i_1, i_2) : i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., n\}\}$

$N/\sim = \{M_1, M_2, ..., M_{n*n}\}$

$$A(v_1, v_2) = \sum_{M \in N^m/\sim} YM x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)}$$

Розділ 6

Застосування симетричних поліномів на просторі ℓ_1

6.1 Функціональний аналіз і нескінченновимірні простори

У нескінченновимірних просторах, зокрема ℓ_1, симетричні поліноми використовуються як простий клас функцій для:

1. Аналізу властивостей функціональних просторів

2. Побудови базисів у просторах аналітичних або голоморфних функцій

3. Вивчення топологічних алгебр, де елементи описуються через симетричні функції

Приклад: вивчення потенціально аналітичних функцій на ℓ_1, які наближуються симетричними поліномами.

6.2 Теорія симетричних функцій і нескінченна змінність

Симетричні поліноми часто вивчають як частину теорії симетричних функцій. Ця теорія класично стосується скінченного числа змінних, але в сучасному формалізмі:

1. Розглядають формальні симетричні поліноми на нескінченному числі змінних

2. Обмежуються такими, що кожен моном має скінченно багато змінних

В цьому сенсі, ℓ_1 — природне середовище, бо вектори в ℓ_1, мають нескінченно багато координат, але з абсолютною сумою, що сходиться.

6.3 Теорія тензорних алгебр і симетричних тензорів

У функціональному аналізі та теорії тензорів:

1. Симетричні поліноми на ℓ_1 можна інтерпретувати як елементи симетричних тензорних степенів ℓ_1

2. Це важливо в контексті побудови алгебраїчних структур на нескінченновимірних просторах

6.4 У статистиці, квантовій фізиці, теорії випадкових матриць

Хоча це менш безпосередньо, у деяких галузях теоретичної фізики чи статистики:

1. Аналіз симетричних функцій на нескінченному числі змінних (особливо при граничних переходах)

2. Дослідження спектральних властивостей операторів, де симетрія відіграє ключову роль

Висновок

У даній роботі було досліджено симетричні поліноми на просторі абсолютно сумовних послідовностей. Розглянуто основні властивості простора ℓ_1 , включаючи їх структури, норми та лінійні функціонали. Розглянуто означення поліномів на просторі ℓ_1 та їх симетричність. Детально проаналізовано квадратичні, білінійні та m-лінійні форми, зокрема їх узагальнення та поляризаційну формулу. Розглянуто S-симетричні m-лінійні форми. Отримані результати сприяють подальшому розвитку теорії симетричних поліномів та їх застосуванню у функціональному аналізі.

Бібліографія

[1] Колмогоров А. Н., Фомін С. В. Элементи теорії функцій и функціонального анализу. – Москва, 1978. – 542 с.

[2] Муджика Х. Комплексний аналіз у просторах Банаха. – Амстердам: North-Holland, 1986. – 434 с.

[3] Никорович С. І., Василишин Т. В. Симетричні лінійні функціонали на банаховому просторі, породженому псевдометриками - Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2024. - 12 с.