Прикарпатський національний університет імені
Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математичного і функціонального аналізу

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
на тему “Застосування диференціального та інтегрального числення у економічних задачах”

Виконала студентка IV курсу,
групи М-41
спеціальності 111 Математика
Вівчар Тетяна Василівна
Керівник: к.ф.-м.н., доц.
Марцінків М.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц.
Кравців В.В.

Івано-Франківськ, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Математичний аналіз є фундаментальним інструментом дослідження економічних процесів та явищ, забезпечуючи можливість кількісного опису та прогнозування економічних закономірностей. Застосування інтегралів і похідних в економіці дозволяє формалізувати широкий спектр економічних концепцій, починаючи від граничного аналізу на мікрорівні й закінчуючи моделюванням макроекономічної динаміки.

Актуальність теми дослідження зумовлена необхідністю систематизації та поглиблення знань про математичні методи в економіці, що має вирішальне значення для підвищення точності економічних прогнозів, оптимізації бізнес-процесів та прийняття обґрунтованих управлінських рішень в умовах сучасної економіки.

Об'єктом дослідження є методи математичного аналізу, зокрема диференціальне та інтегральне числення, як інструменти дослідження економічних процесів. **Предметом** дослідження виступають теоретичні та прикладні аспекти застосування інтегралів і похідних для моделювання, аналізу та прогнозування економічних явищ.

Метою кваліфікаційної роботи є комплексне дослідження теоретичних основ та практичних застосувань диференціального та інтегрального числення в економічному аналізі для вдосконалення методології економіко-математичного моделювання.

Для досягнення поставленої мети визначено такі **завдання:**

- розкрити математичний апарат диференціального числення та його економічну інтерпретацію;

- дослідити інтегральне числення як метод аналізу економічних процесів;

- проаналізувати диференціальні методи в аналізі та моделюванні економічних процесів;

- систематизувати інтегральні методи для розрахунку економічних показників.

Теоретичне значення отриманих результатів полягає у систематизації та поглибленні знань про математичний апарат диференціального та інтегрального числення в контексті економічних досліджень, що сприяє розвитку методології економіко-математичного моделювання.

Практичне значення роботи визначається можливістю використання розглянутих методів для аналізу реальних економічних процесів, оптимізації економічних рішень та прогнозування економічних показників на різних рівнях господарювання.

У процесі дослідження використано такі **методи:** абстрактно-логічний метод (для формулювання теоретичних узагальнень та висновків); математичне моделювання (для формалізації економічних процесів за допомогою функцій, похідних та інтегралів); графічний метод (для візуалізації функціональних залежностей між економічними показниками); методи граничного аналізу (для дослідження поведінки економічних суб'єктів); методи оптимізації (для розв'язання задач максимізації прибутку та мінімізації витрат).

Структурно робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі розглядаються теоретичні основи диференціального та інтегрального числення в контексті економічних задач, зокрема математичний апарат диференціального числення та його економічна інтерпретація, а також інтегральне числення як метод дослідження економічних процесів. Другий розділ присвячено прикладним аспектам використання методів математичного аналізу в економіці, включаючи диференціальні методи в аналізі та моделюванні економічних процесів та інтегральні методи для розрахунку економічних показників.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В КОНТЕКСТІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

1.1. Математичний апарат диференціального числення та його економічна інтерпретація

Диференціальне числення становить фундаментальний розділ математичного аналізу, який знаходить широке застосування в економічних дослідженнях. В основі диференціального числення лежить поняття похідної функції, яка характеризує швидкість зміни цієї функції в певній точці. У контексті економічних задач похідна дозволяє кількісно оцінити граничні величини, що дає змогу аналізувати економічні процеси на мікрорівні та приймати оптимальні рішення щодо розподілу ресурсів [4]. Зокрема, похідна першого порядку використовується для знаходження екстремумів функцій, що відображають економічні показники, а похідні вищих порядків надають додаткову інформацію про характер цих екстремумів та динаміку змін досліджуваних показників.

Економічні моделі часто оперують функціями однієї змінної, які відображають залежність між двома економічними параметрами. Наприклад, функція попиту описує залежність між ціною товару та його кількістю, яку споживачі готові придбати; функція витрат показує залежність між обсягом виробництва та загальними витратами; функція корисності визначає залежність між кількістю спожитого блага та рівнем задоволення споживача. У таких випадках застосування диференціального числення дозволяє визначити граничні значення відповідних економічних показників: граничний дохід, граничні витрати, граничну корисність тощо. Математично ці граничні величини обчислюються як похідні відповідних функцій [12].

Для функції однієї змінної $f(x)$ похідна $f'(x)$ у точці $x = a$ визначається як границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля: $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(a+\Delta x) - f(a)]}{\Delta x}$. В економічному контексті значення похідної характеризує швидкість зміни економічного показника при інфінітезимальній зміні фактора, що впливає на цей показник. Наприклад, якщо $C(q)$ — функція загальних витрат від обсягу виробництва q, то $C'(q)$ — функція граничних витрат, яка показує, наскільки зміняться загальні витрати при збільшенні обсягу виробництва на одну одиницю.

У реальних економічних системах, однак, результативні показники часто залежать від декількох факторів, що призводить до необхідності аналізу функцій багатьох змінних. Наприклад, обсяг виробництва може бути функцією від кількості праці та капіталу, а корисність споживача — функцією від обсягів споживання різних товарів. Для таких функцій застосовуються частинні похідні, які показують швидкість зміни функції за одним із аргументів при фіксованих значеннях інших аргументів. Частинна похідна $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ функції $f(x, y)$ за змінною x обчислюється як границя відношення приросту функції до приросту х, коли приріст х прямує до нуля, а у залишається незмінним.

Частинні похідні функцій багатьох змінних в економіці інтерпретуються як граничні продукти факторів виробництва або граничні корисності благ. Для виробничої функції $Q(L, K)$, де Q — обсяг виробництва, L — кількість праці, K — кількість капіталу, частинні похідні $\partial Q/\partial L$ та $\partial Q/\partial K$ є граничними продуктами праці та капіталу відповідно. Вони показують, на скільки одиниць зміниться обсяг виробництва при збільшенні відповідного фактора на одну одиницю за умови незмінності інших факторів [5]. Аналогічно, для функції корисності $U(x, y)$, де x та y — кількості двох благ, частинні похідні $\partial U/\partial x$ та ∂U/∂y є граничними корисностями цих благ.

Повний диференціал функції $f(x, y)$ визначається як

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

і показує, як змінюється функція при одночасній зміні всіх її аргументів. В економічному контексті повний диференціал дозволяє оцінити загальну зміну економічного показника під впливом змін декількох факторів. Наприклад, повний диференціал функції корисності

$$dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$$

показує, як зміниться рівень корисності споживача при одночасній зміні обсягів споживання двох благ.

Похідні вищих порядків також знаходять застосування в економічному аналізі. Друга похідна функції $f''(x)$ характеризує швидкість зміни першої похідної, тобто прискорення зміни функції. В економіці друга похідна використовується для аналізу характеру екстремумів функцій економічних показників. Наприклад, якщо прибуток $P(q)$ досягає максимуму при певному обсязі виробництва $q *$, то $P'(q *) = 0$ і $P''(q *) < 0$. Друга похідна також використовується для визначення опуклості або увігнутості функцій економічних показників, що має значення для аналізу ризиків та прийняття рішень в умовах невизначеності.

Модель еластичності попиту описує, як змінюється кількість товару, який споживачі готові придбати, у відповідь на зміну ціни цього товару. Еластичність попиту є важливим економічним показником, який дозволяє оцінити чутливість попиту до змін у цінах і допомагає в прийнятті рішень про ціноутворення, прогнозуванні попиту та оцінці ефективності економічної політики.

Визначення еластичності попиту:

Еластичність попиту за ціною (Ed) визначається як відсоткова зміна кількості попиту (ΔQ) на товар у відповідь на відсоткову зміну ціни (ΔP). Формула виглядає так:

$$E_d = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P}$$

де: E_d — коефіцієнт еластичності попиту, $\%\Delta Q$ — відсоткова зміна кількості попиту, $\%\Delta P$ — відсоткова зміна ціни.

Типи еластичності попиту:

Еластичний попит **(**$E_d > 1$**):** Якщо попит є еластичним, це означає, що споживачі значно реагують на зміну ціни, і зниження ціни призведе до значного зростання попиту.

Нееластичний попит **(**$E_d < 1$**):** Якщо попит нееластичний, це означає, що зміна ціни не сильно впливає на кількість товару, який споживачі готові придбати. Наприклад, на основні товари чи ліки попит може бути нееластичним.

Одинична еластичність **(**$E_d = 1$**):** Це випадок, коли відсоткова зміна ціни точно компенсується відсотковою зміною попиту, тобто зміна ціни пропорційно змінює попит.

Абсолютно еластичний попит **(**$E_d = \infty$**):** Це теоретичний випадок, при якому навіть найменша зміна ціни призводить до нескінченно великої зміни попиту.

вигляд:

Абсолютно нееластичний попит **(**$E_d = 0$**):** У цьому випадку попит зовсім не змінюється незалежно від змін ціни, що характерно для товарів першої необхідності.

Фактори, що впливають на еластичність попиту:

Наявність замінників: Якщо є багато замінників товару, попит на нього буде еластичним. Навпаки, якщо замінників мало або немає, попит буде нееластичним.

Часовий фактор: Зазвичай попит є більш еластичним у довгостроковій перспективі, оскільки споживачі мають більше часу для адаптації.

Необхідність товару: Для товарів першої необхідності попит є нееластичним, оскільки споживачі повинні їх купувати незалежно від зміни ціни.

Вартість товару у загальному бюджеті споживача: Для товарів з високою ціною попит зазвичай є більш еластичним, оскільки зміна ціни має більший вплив на бюджет споживача.

Модель еластичності попиту допомагає підприємствам та урядам передбачати, як зміни в цінах впливатимуть на споживчі звички, а також на доходи від продажу товарів та послуг. Модель еластичності попиту в математичному вираженні дозволяє швидко оцінити чутливість попиту до зміни ціни, однак її обмеження полягають у тому, що вона не враховує зміни в інших факторах, таких як доходи споживачів, зміни в пропозиції або зовнішньоекономічні впливи. Сильним моментом є її простота, що дозволяє швидко обчислювати еластичність, але обмеженням є спрощення реальних економічних взаємозв'язків.

Модель виробничої функції – це економічна модель, яка описує залежність між кількістю використовуваних факторів виробництва (капіталу і праці) і обсягом виробленого продукту. Вона є однією з найбільш визнаних і використовуваних виробничих функцій в економічному аналізі [7].

Модель виробничої функції Кобба-Дугласа виражається наступним чином:

$$Q = AL^{\alpha}\mathrm{K}^{\beta}$$

де: Q – обсяг виробленої продукції (output), A – технологічний коефіцієнт або фективність виробництва, що відображає рівень технологій, L –

кількість праці (input), K – кількість капіталу (input), α, β – еластичності відповідно щодо праці і капіталу (параметри, що відображають вплив кожного фактора на продукцію).

Капітал (K) — це всі інвестиції в технічне оснащення, інфраструктуру, обладнання та інші матеріальні ресурси, які використовуються у виробництві.

Праця (L**)** — це людський ресурс, який використовують для виробництва товарів або послуг.

Технологічний коефіцієнт (A**)** — цей параметр показує, наскільки ефективно комбінуються капітал і праця в процесі виробництва. Вищі значення А відображають більш ефективні технології виробництва.

Еластичності (α, β**)** — це параметри, які показують, як змінюється обсяг виробництва при зміні одного з факторів при фіксованому значенні іншого.

Особливості моделі Кобба-Дугласа:

Постійні масштаби виробництва: Якщо сума параметрів α, β дорівнює 1 ($\alpha + \beta = 1$), це означає, що виробнича функція має постійні масштаби. Тобто, якщо всі фактори виробництва збільшуються на певний коефіцієнт, то і обсяг виробництва збільшиться на такий самий коефіцієнт.

Якщо $\alpha + \beta < 1$, це означає, що масштаби зменшуються (умовно знижена ефективність при збільшенні обсягів).

Якщо $\alpha + \beta > 1$, це вказує на збільшення масштабів (вища ефективність при збільшенні обсягів).

Еластичність заміщення**:** Модель передбачає, що капітал і праця можуть заміщувати один одного, але з певними обмеженнями. Наприклад, збільшення кількості праці може замістити частину капіталу, і навпаки, але цей ефект зазвичай не є нескінченним.

Сумісна продуктивність праці і капіталу**:** Визначення того, як зміна одного з факторів виробництва впливає на виробництво, залежить від значень параметрів α, β. Наприклад, якщо $\alpha > \beta$, це означає, що збільшення праці має більший ефект на продукцію порівняно з збільшенням капіталу.

Модель Кобба-Дугласа широко використовується для оцінки ефективності виробництва, прогнозування економічного зростання та визначення оптимальних інвестицій в капітал і працю. Вона дозволяє аналізувати:

Виробничу ефективність**:** Оцінюючи, як технології (A) і фактори виробництва $(L, \ K)$ взаємодіють, можна виявити можливості для підвищення продуктивності.

Зростання економіки**:** За допомогою цієї моделі можна прогнозувати зростання на основі зміни в капіталі, праці та технологіях.

Визначення еластичності факторів: Модель допомагає зрозуміти, як зміна одного з факторів впливає на загальний обсяг продукції.

Переваги моделі:

Простота: Модель є відносно простим способом аналізу виробництва і дозволяє легко визначати важливі економічні параметри.

Гнучкість: Модель дозволяє вводити різні значення параметрів для конкретних виробничих умов.

Застосовність у багатьох галузях: Від сільського господарства до виробництва товарів та послуг.

Недоліки моделі:

Спрощення реальності: Модель передбачає постійну технологічну ефективність (А), що не завжди відповідає реальному світу, де технології можуть змінюватися.

Неврахування зовнішніх факторів: Модель не враховує зміни в економічних умовах або зовнішніх шоках, таких як політичні зміни чи природні катастрофи.

Модель Кобба-Дугласа є важливим інструментом в економічному аналізі і допомагає зрозуміти, як оптимально використовувати ресурси для досягнення максимального виробництва. Модель виробничої функції Коба-Дугласа є класичною математичною моделлю, яка дозволяє аналізувати залежність між виробничими факторами, такими як капітал і праця, та обсягом виробництва. Її математична структура є простою та зручною для аналізу, однак модель передбачає сталу еластичність та технологічний прогрес, що обмежує її застосування в умовах динамічних змін. Вона не враховує змін у відносних цінах факторів виробництва, що може призвести до спрощення реальних виробничих процесів.

Одним із ключових застосувань диференціального числення в економіці є розв'язання оптимізаційних задач, які полягають у знаходженні екстремальних значень певних функцій за заданих умов. Необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної є рівність нулю її похідної, а достатньою умовою максимуму (мінімуму) є від'ємне (додатне) значення другої похідної в точці, де перша похідна дорівнює нулю. Для функцій багатьох змінних необхідною умовою екстремуму є рівність нулю всіх частинних похідних, а достатні умови пов'язані з визначенням знаків головних мінорів матриці Гессе [10].

У задачах умовної оптимізації потрібно знайти екстремум функції за наявності обмежень. Такі задачі розв'язуються методом множників Лагранжа, який полягає у введенні допоміжної функції, що включає вихідну функцію та обмеження з множниками Лагранжа. Необхідною умовою екстремуму цієї функції є рівність нулю її частинних похідних за всіма змінними, включаючи множники Лагранжа. Економічна інтерпретація множників Лагранжа полягає в тому, що вони показують, наскільки зміниться оптимальне значення цільової функції при зміні обмеження на одну одиницю. Наприклад, у задачі максимізації корисності за бюджетного обмеження множник Лагранжа показує граничну корисність доходу.

Застосування диференціального числення в економіці не обмежується статичними моделями. Воно також використовується для аналізу динамічних економічних процесів, які описуються диференціальними рівняннями. Такі рівняння встановлюють зв'язок між функцією та її похідними і дозволяють моделювати зміни економічних показників у часі.

Модель економічного зростання Домара

Модель економічного зростання Домара була розроблена економістом Домаром у 1946 році та є варіантом більш загальної теорії економічного зростання. Вона ґрунтується на простій залежності між заощадженнями, інвестиціями та зростанням національного доходу.

Модель Домара спирається на кілька основних ідей:

Збереження пропорцій**:** Вона передбачає, що всі інвестиції спрямовуються на розширення капіталу.

Відсутність технологічного прогресу: У найпростішому варіанті модель не враховує зміни в технологіях і продуктивності праці.

Постійна норма заощаджень: Передбачається, що частина національного доходу, яка заощаджується, є сталою.

Модель може бути виражена у вигляді наступного рівняння:

$$Y = C + I$$

де Y – національний дохід (обсяг виробництва), C –споживчі витрати, I – інвестиції.

Норма заощаджень s є частиною доходу, яку економіка заощаджує, тобто:

$$S = sY$$

Загальна інвестиційна функція виглядає так:

$$I = S = sY$$

Тепер, якщо припустити, що збільшення капіталу K залежить від інвестицій, ми можемо виразити рівняння зростання як:

$$\overline{K} = I - \delta K$$

де: K — капітал, I — інвестиції, δ— норма амортизації капіталу.

Тепер можемо визначити, що темпи економічного зростання g можна виразити як $g = \frac{s}{\delta}$ Тобто, темпи економічного зростання прямо пропорційні нормі заощаджень s і обернено пропорційні нормі амортизації капіталу δ.

Ключові висновки з моделі Домара:

Основним фактором економічного зростання є рівень заощаджень, які стають інвестиціями, що дозволяють збільшити капітальний фонд.

Для стабільного зростання важливо мати високий рівень інвестицій, оскільки вони прямо впливають на капітальний фонд, що необхідний для виробництва.

Модель економічного зростання Солоу

Модель економічного зростання Роберта Солоу була розроблена в 1956 році і є більш комплексною та реалістичною, оскільки включає не тільки заощадження та інвестиції, а й технологічний прогрес і зміни в продуктивності праці. Це значно покращує здатність моделі описувати реальні економічні процеси.

Основні припущення та структура:

Технологічний прогрес**:** Модель Солоу передбачає, що економіка може зростати завдяки не тільки збільшенню капіталу, а й через покращення технологій, які дозволяють використовувати ресурси ефективніше. Технології ростуть за законом

$$A(t) = A_0 e^{gt}$$

де g — темп зростання технології.

Накопичення капіталу:
Капітал у моделі збільшується за рахунок інвестицій, які становлять частку від виробленого випуску. Ставка накопичення капіталу (або заощаджень) дорівнює s. Математично це записується так:

$$\overline{K} = sY - \delta K$$

де $\overline{K}^{\cdot}$ — зміна капіталу, sY — інвестиції (заощадження), δ — ставка амортизації капіталу.

Зростання робочої сили (L):

Чисельність робочої сили зростає з постійним темпом n, тобто:

$$L(t) = L_0 e^{nt}$$

Стійкість (усталений стан): Модель Солоу передбачає, що в довгостроковій перспективі економіка досягає сталого стану, у якому темпи зростання капіталу, праці та випуску стабілізуються. Це означає, що економіка врешті-решт припиняє рости через спадаючу віддачу від капіталу, і зростання на душу населення та на душу капіталу буде можливим лише за рахунок технологічного прогресу.

Виробнича функція Кобба-Дугласа (уточнена)**:** Це стандартне припущення для моделі Солоу, де обсяг виробництва Y залежить від капіталу K і праці L

$$Y = AL^{1-\alpha} K^{\alpha}$$

де: A — рівень технологічного прогресу, K — капітал, L — праця, α — коефіцієнт еластичності.
Амортизація капіталу: Знову ж таки, капітал зношується, тому потрібно постійно інвестувати для його оновлення.

Динаміка капіталу**:**

$$\overline{K} = I - \delta K,$$

де I— інвестиції, а δK — амортизація капіталу.

Довгострокова рівновага:
В довгостроковій перспективі темп зростання випуску і капіталу на душу населення буде залежати лише від темпу зростання технологій і чисельності робочої сили:

$$g_Y = g_A + n$$

де g_Y — темп зростання випуску на душу населення, g_A — темп зростання технологій, n — темп зростання робочої сили.

Основні висновки з моделі Солоу:

Короткостроковий ефект від збільшення заощаджень:
Збільшення норми заощаджень призводить до зростання капіталу і випуску в короткостроковій перспективі. Однак через закон спадної віддачі ефект від цього зростання поступово зменшується.

Довгостроковий ріст через технологічний прогрес:
В довгостроковій перспективі сталий економічний ріст можливий лише за рахунок технологічного прогресу, оскільки після досягнення сталого стану капітал на душу населення і випуск на душу населення стабілізуються.

Роль накопичення капіталу:
На початкових етапах економічного розвитку збільшення інвестицій (накопичення капіталу) відіграє ключову роль, але в довгостроковій перспективі його вплив на ріст економіки стає менш значущим.

Стан сталого зростання:
Економіка прагне до стану сталого зростання, де всі основні економічні змінні (випуск, капітал, робоча сила) зростають з темпом, визначеним технологічним прогресом та зростанням робочої сили.

Негативні сторони моделі

Відсутність урахування людського капіталу:
Модель не враховує людський капітал, який також відіграє важливу роль в економічному зростанні.

Не враховує інституційні фактори:

Модель не пояснює, як економічні інститути, державна політика або міжнародна торгівля впливають на довгостроковий ріст.

Моделює технології як зовнішній фактор**:**

Технологічний прогрес у моделі розглядається як екзогенний процес (який не залежить від інших факторів), хоча на практиці технологічні зміни часто залежать від інвестицій у науку та інновації.

Порівняння моделей Домара та Солоу:

Технологічний прогрес**:** Модель Солоу включає технологічний прогрес, що робить її більш динамічною в довгостроковій перспективі. Модель Домара не враховує змін у технологіях.

Роль капіталу**:** У моделі Домара капітал є основним фактором зростання, тоді як у моделі Солоу, хоча капітал також важливий, але є ефект спадної доходності, і з часом основним фактором стає технологічний прогрес.

Стаціонарний стан**:** Модель Солоу передбачає досягнення стаціонарного стану, тоді як модель Домара вказує на постійне зростання, залежне від інвестицій.

Модель Солоу є більш складною і враховує більше факторів, що дозволяє отримати більш точне уявлення про довгострокове економічне зростання, ніж модель Домара.

Моделі економічного зростання Домара та Солоу є класичними підходами до аналізу довгострокового економічного зростання, і кожна з них фокусується на різних аспектах розвитку економіки, зокрема на факторах, що впливають на темпи зростання виробництва.

Моделі економічного зростання Домара і Солоу використовуються для вивчення динаміки економічного зростання на основі інвестицій і накопичення капіталу. Математичні вирази цих моделей дозволяють оцінити, як зміни в інвестиціях або заощадженнях можуть вплинути на економічне зростання. Модель Домара, зокрема, має значну простоту, що дозволяє легко здійснювати розрахунки, однак вона не враховує технологічний прогрес, що є суттєвим недоліком у сучасних економічних умовах. Модель Солоу, в свою чергу, додає параметр технологічного прогресу, але її використання обмежене припущенням про постійну відносну ефективність факторів виробництва, що може не відповідати реальним умовам.

Методи диференціального числення також застосовуються для аналізу економічних процесів в умовах невизначеності та ризику. Зокрема, за допомогою похідних можна визначити оптимальні стратегії інвестування та хеджування ризиків, а також оцінити вартість фінансових деривативів. Наприклад, в моделі ціноутворення опціонів Блека-Шоулза вартість опціону визначається шляхом розв'язання диференціального рівняння в частинних похідних, яке пов'язує зміну вартості опціону зі зміною ціни базового активу та зі зміною часу до експірації опціону.

1.2. Інтегральне числення як метод дослідження економічних процесів

Інтегральне числення — один із найважливіших розділів математичного аналізу, що широко застосовується в економіці. Воно дозволяє аналізувати **накопичені величини**: витрати, доходи, прибутки, потоки ресурсів, сукупні значення економічних показників. На відміну від похідної, яка відображає миттєву зміну, інтеграл враховує **всю динаміку змін на проміжку часу або обсягу**.

Визначений інтеграл

Форма:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

- a, b — межі інтегрування (наприклад, початковий і кінцевий обсяг продукції або проміжок часу).
- f(x) — щільність або граничне значення (наприклад, витрати на одиницю).
- Вираз обчислює **загальне (накопичене)** значення на проміжку [a,b].

Сукупні витрати та дохід

$$TC(x) = \int_0^x MC(x)\, dx$$
$$TR(x) = \int_0^x MR(x)\, dx$$

- x— обсяг виробництва (кількість виробленої продукції).
- $MC(x)$— граничні витрати: додаткові витрати на виготовлення ще однієї одиниці продукції при обсязі x.
- $TC(x)$ — загальні (сукупні) витрати.
- $MR(x)$ — граничний дохід: додатковий дохід від ще однієї одиниці продукції.
- $TR(x)$ — сукупний дохід.

Інтегрування дозволяє перейти від **граничного значення** до **загального ефекту**.

Споживчий надлишок

$$CS = \int_0^{x_0} D(x)\, dx - p \cdot x_0$$

- $x0$ — обсяг продукції, який купує споживач.
- $D(x)$ — функція попиту: максимальна ціна, яку готовий заплатити споживач за x-ту одиницю товару.
- p — фактична ціна на ринку.

- CS — **споживчий надлишок**, тобто вигода, яку споживач отримує, купуючи товар дешевше, ніж був готовий заплатити.

Чиста теперішня вартість (NPV)

$$NPV = \int_0^T f(t) \cdot e^{-rt} dt$$

- T— горизонт планування (кінець періоду інвестування).
- t— час (змінна інтегрування).
- $f(t)$ — грошовий потік у момент часу ttt (наприклад, щорічний прибуток).
- r — ставка дисконтування (виражає втрату вартості грошей у часі).
- e^{-rt} — **дисконтний множник**, що переводить майбутні доходи в теперішню вартість.
- NPV — **чиста теперішня вартість** інвестиційного проєкту.

Середнє значення економічного показника

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

- $f(x)$ — економічна величина, яка змінюється (наприклад, ціна, попит, курс).
- a, b — межі проміжку, на якому обчислюється середнє.
- $\bar{f}$ — **середнє значення** функції f(x)f(x)f(x) на відрізку [a,b][a, b][a,b].

Застосування: середня зарплата, середній курс валюти, середній рівень продуктивності.

Висновки до розділу 1

Диференціальне числення є потужним інструментом математичного аналізу, що дозволяє формалізувати та досліджувати економічні процеси як на мікро-, так і на макрорівні. Воно забезпечує кількісне визначення граничних величин, таких як граничний дохід, витрати чи корисність, що є критичним для прийняття ефективних управлінських рішень та оптимізації економічних процесів. Похідні функцій однієї змінної допомагають знаходити екстремуми економічних показників, а функції багатьох змінних разом із частинними похідними дозволяють аналізувати залежності між декількома економічними параметрами.

Другі та вищі похідні дають змогу аналізувати характер змін функцій, що має особливе значення для дослідження стійкості та ризиків економічних систем. Повний диференціал дозволяє враховувати одночасний вплив кількох факторів на економічні показники. Важливе місце в аналізі займає поняття еластичності, що дозволяє оцінювати чутливість економічних показників до змін факторів впливу. Еластичність попиту, пропозиції, доходу та перехресна еластичність слугують основою для формування стратегій ціноутворення та виробничих рішень.

Методи диференціального числення застосовуються не лише у статичних моделях, але й у дослідженні динамічних економічних процесів, що описуються диференціальними рівняннями. Це забезпечує можливість моделювання розвитку економічних систем у часі та прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Зокрема, застосування похідних у фінансовій математиці, наприклад в моделі Блека-Шоулза, дозволяє оцінювати вартість фінансових інструментів.

Загалом, диференціальне числення забезпечує основу для маржинального аналізу, оптимізації, прогнозування та моделювання економічних процесів, що робить його незамінним інструментом сучасної економічної теорії та практики.

РОЗДІЛ 2

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ЕКОНОМІЦІ

2.1. Диференціальні методи в аналізі та моделюванні економічних процесів

Диференціальні методи математичного аналізу є фундаментальним інструментарієм для дослідження економічних процесів та явищ на мікро- та макрорівнях. Ці методи дозволяють здійснювати кількісне моделювання динаміки економічних показників, аналізувати їх чутливість до змін факторів впливу, визначати оптимальні значення економічних параметрів та прогнозувати поведінку економічних систем. Основою застосування диференціальних методів в економіці є концепція похідної, яка математично формалізує поняття граничних величин, що мають ключове значення в економічному аналізі.

Аналіз функцій витрат є однією з найпоширеніших сфер застосування диференціальних методів в економіці. Функція загальних витрат виробництва $TC(Q)$ відображає залежність сукупних витрат від обсягу випуску продукції Q. Похідна цієї функції $TC'(Q) = dTC(Q)/dQ$ визначає граничні витрати, які показують, наскільки зростуть загальні витрати при збільшенні обсягу виробництва на одну додаткову одиницю. Графічно граничні витрати відповідають тангенсу кута нахилу дотичної до кривої загальних витрат у відповідній точці. Знання функції граничних витрат дозволяє виробнику оптимізувати виробництво та приймати обґрунтовані рішення щодо обсягів випуску продукції.

Середні витрати виробництва, які обчислюються як

$$AC(Q) = TC(Q)/Q,$$

також досліджуються за допомогою диференціальних методів. Зокрема, для визначення мінімуму середніх витрат необхідно знайти точку, в якій похідна функції $AC(Q)$ дорівнює нулю: $AC'(Q) = d(TC(Q)/Q)/dQ = 0$. Ця умова рівносильна рівності граничних та середніх витрат: $MC(Q) = AC(Q)$. Отже, мінімум середніх витрат досягається в точці перетину кривих граничних та середніх витрат [7]. Цей факт має принципове значення для оптимізації виробництва та підвищення його ефективності, оскільки випуск продукції з мінімальними середніми витратами забезпечує максимальну економічну ефективність використання ресурсів.

Функція доходу $TR(Q) = P(Q) \cdot Q$, де $P(Q)$ — ціна одиниці продукції, також піддається аналізу за допомогою диференціальних методів. Похідна функції доходу $TR'(Q) = dTR(Q)/dQ$ визначає граничний дохід, який показує, наскільки зміниться загальний дохід при зміні обсягу продажів на одну одиницю. В умовах досконалої конкуренції граничний дохід дорівнює ціні товару $(MR = P)$, оскільки ціна не залежить від обсягу продажів окремого виробника. Проте в умовах монополії та монополістичної конкуренції граничний дохід менший за ціну $(MR < P)$, оскільки для збільшення обсягу продажів виробник повинен знижувати ціну. Математично це відображається формулою $MR = P + Q \cdot (dP/dQ)$, де $dP/dQ < 0$ — похідна функції ціни за обсягом продажів.

Функція прибутку $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$ є різницею між функціями доходу та витрат. Для максимізації прибутку необхідно знайти точку, в якій похідна функції прибутку дорівнює нулю:

$\Pi'(Q) = d\Pi(Q)/dQ = TR'(Q) - TC'(Q) = MR(Q) - MC(Q) = 0$. Отже, максимум прибутку досягається при рівності граничного доходу та граничних витрат: $MR(Q) = MC(Q)$. Достатньою умовою максимуму прибутку є від'ємне значення другої похідної функції прибутку: $\Pi''(Q) = d^2\Pi(Q)/dQ^2 < 0$. Це правило є універсальним для всіх типів ринкових структур і служить основою для прийняття рішень щодо оптимального обсягу виробництва.

Приклад

Нехай задано такі функції:

Функція загальних витрат:

$$TC(Q) = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10$$

Функція ціни (тобто залежність ціни від обсягу продажів):

$$P(Q) = 40 - Q$$

Знайдемо граничні витрати (MC)

Граничні витрати — це перша похідна від загальних витрат:

$$MC(Q) = TC'(Q) = \frac{d}{dQ}(Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10) = 3Q^2 - 12Q + 15$$

Знайдемо функцію загального доходу (TR)

Загальний дохід:

$$TR(Q) = P(Q) \cdot Q = (40 - Q) \cdot Q = 40Q - Q^2$$

Знайдемо граничний дохід (MR)

Граничний дохід — це похідна від $TR(Q)$:

$$MR(Q) = TR'(Q) = \frac{d}{dQ}(40Q - Q^2) = 40 - 2Q$$

Знайдемо функцію середніх витрат (AC)

Середні витрати — це:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10}{Q} = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{10}{Q}$$

Визначимо обсяг виробництва, який мінімізує середні витрати

Для мінімуму AC потрібно:

$$AC'(Q) = 0$$

Знайдемо похідну:

$$AC'(Q) = \frac{d}{dQ}(Q^2 - 6Q + 15 + \frac{10}{Q}) = 2Q - 6 - \frac{10}{Q^2}$$

$$2Q - 6 - \frac{10}{Q^2} = 0 \Rightarrow 2Q - 6 = \frac{10}{Q^2} \Rightarrow (2Q - 6)Q^2 = 10 \Rightarrow 2Q^3 - 6Q^2 = 10 \Rightarrow 2Q^3 - 6Q^2 - 10 = 0$$

Це кубічне рівняння — його можна розв’язати чисельно (наприклад, метод Ньютона) або наближено знайти корінь $Q \approx 2.38$.

Знайдемо обсяг, що максимізує прибуток

Прибуток:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = (40Q - Q^2) - (Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 10)$$
$$\Pi(Q) = -Q^3 + 5Q^2 + 25Q - 10$$

Граничний прибуток:

$$\Pi'(Q) = -3Q^2 + 10Q + 25$$

Для максимуму:

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow -3Q^2 + 10Q + 25 = 0 \Rightarrow Q = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 300}}{-6} = \frac{-10 \pm \sqrt{400}}{-6} = \frac{-10 \pm 20}{-6}$$

Маємо два розв’язки:

$Q_1 = \frac{-10+20}{-6} = \frac{10}{-6} = -1.67$

$Q_2 = \frac{-10-20}{-6} = \frac{-30}{-6} = 5$

Отже, максимум прибутку досягається при $Q = 5$

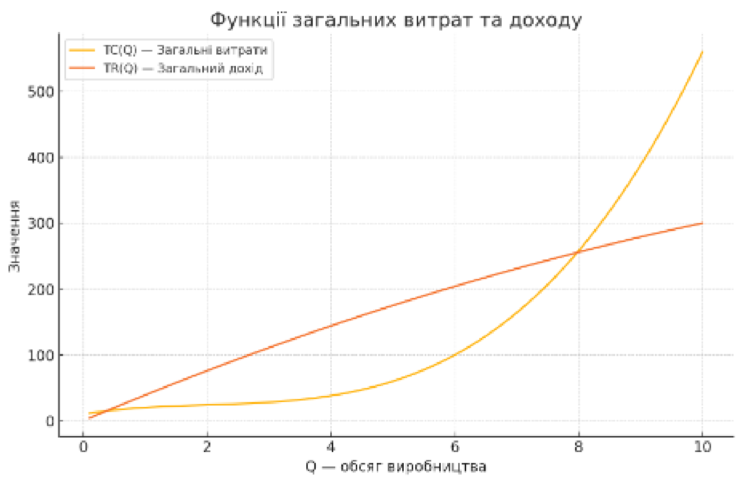
Перевірка другої похідної:

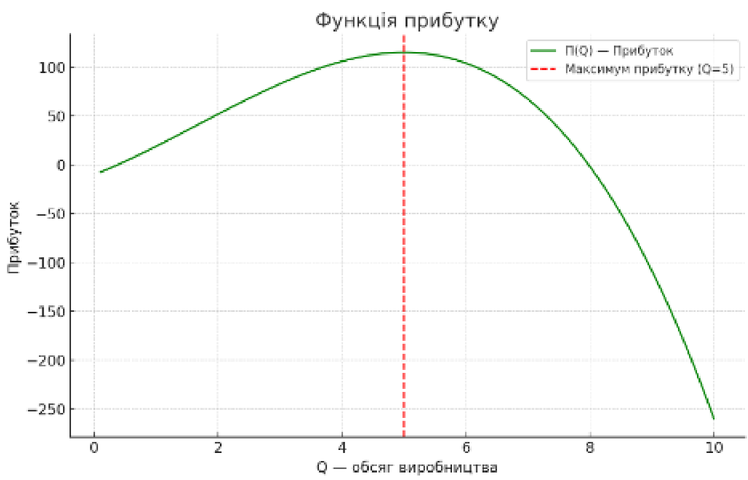
$$\Pi''(Q) = \frac{d^2\Pi}{dQ^2} = -6Q + 10$$

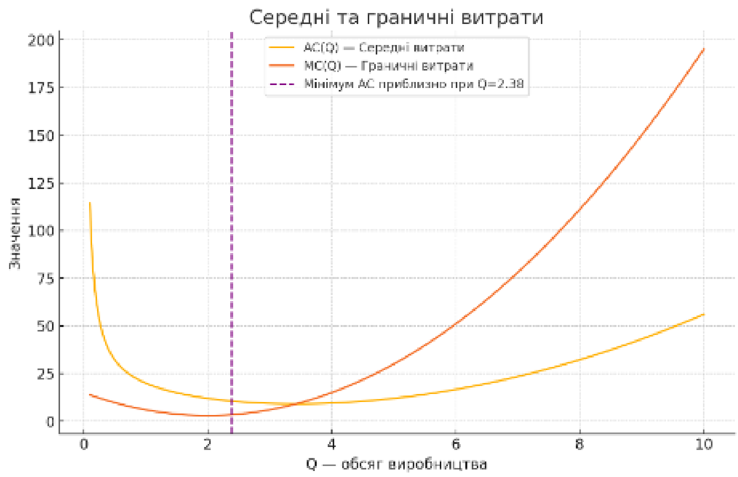
При $Q = 5$:

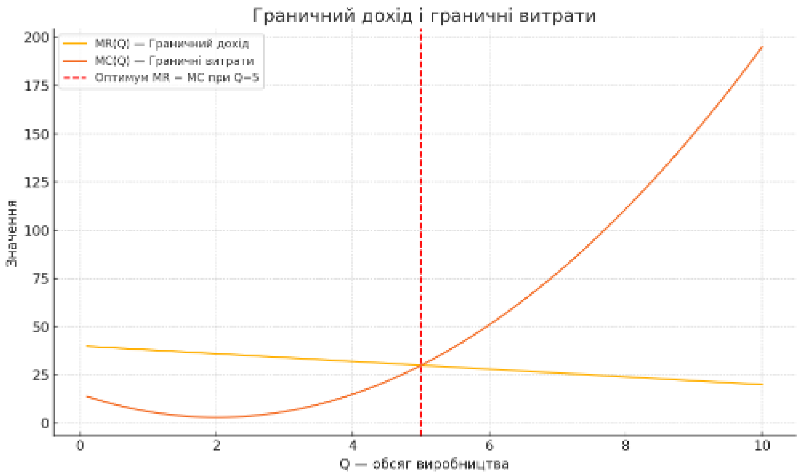
$$\Pi''(5) = -30 + 10 = -20 < 0$$

Дійсно максимум.









Граничний аналіз широко застосовується для визначення оптимальних стратегій поведінки економічних суб'єктів. Принцип граничності полягає в тому, що рішення приймаються на основі порівняння граничних вигод з граничними витратами. Математично це означає пошук точки, в якій похідні відповідних функцій вигод та витрат є рівними. Наприклад, оптимальний рівень забруднення навколишнього середовища визначається рівністю граничних вигод від забруднення (економія на витратах на очищення) та граничних суспільних витрат, пов'язаних із забрудненням. Аналогічно, оптимальний рівень оподаткування визначається рівністю граничних суспільних вигод від державних видатків та граничних суспільних витрат, пов'язаних із оподаткуванням.

Еластичність як безрозмірний показник чутливості однієї економічної величини до зміни іншої також обчислюється за допомогою диференціальних методів. Еластичність попиту за ціною $E = (dQ/dP) \cdot (P/Q)$ показує відносну зміну обсягу попиту при відносній зміні ціни. Залежно від значення еластичності попит класифікується як еластичний ($|E| > 1$), нееластичний ($|E| < 1$) або з одиничною еластичністю ($|E| = 1$). Знання еластичності попиту дозволяє виробникам оптимізувати цінову політику. Якщо попит є еластичним, то зниження ціни приводить до збільшення виручки, а якщо нееластичним — до її зменшення. Максимальна виручка досягається при одиничній еластичності попиту, коли |E| = 1.

Перехресна еластичність попиту $E\_xy = (dQ\_x/dP\_y) \cdot (P\_y/Q\_x)$ характеризує чутливість попиту на товар x до зміни ціни товару y. Знак перехресної еластичності залежить від характеру взаємозв'язку між товарами: для товарів-субститутів $E\_xy > 0$, для комплементарних товарів $E\_xy < 0$, для незалежних товарів $E\_xy = 0$. Еластичність попиту за доходом $E\_I = (dQ/dI) \cdot (I/Q)$ показує відносну зміну обсягу попиту при відносній зміні доходу споживачів. За допомогою цього показника товари класифікуються як нормальні ($E\_I > 0$) або неповноцінні ($E\_I < 0$), товари першої необхідності ($0 < E\_I < 1$) або предмети розкоші ($E\_I > 1$).

Приклад Нехай попит на товар описується функцією:

$$Q_x(P, I, P_y) = 100 - 2P + 0.5I + 1.5P_y$$

де:

- Qx — кількість попиту на товар x,
- P — ціна товару x,
- I — середній дохід споживача,
- Py— ціна товару y (можливого субституту чи комплемента).

Нехай:

- $P = 10$
- $I = 20,$
- $Py = 12$

Тоді:

$$Q_x = 100 - 2 \cdot 10 + 0.5 \cdot 20 + 1.5 \cdot 12 = 100 - 20 + 10 + 18 = 108$$

Еластичність попиту за ціною

$$E_P = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

- $dQ/dP = -2$ (з похідної функції попиту за PPP),
- P=10,
- Q=108

$$E_P = (-2) \cdot \frac{10}{108} \approx -0.185$$

- Оскільки |EP|<1|E_P| < 1|EP|<1, попит **нееластичний**.
- Зниження ціни збільшить обсяг продажу, але виручка **зменшиться**.Еластичність попиту за доходом

Формула:

$$E_I = \frac{dQ}{dI} \cdot \frac{I}{Q}$$

- $\frac{dQ}{dI} = 0.5,$
- $I = 20,$
- $Q = 108$

$$E_I = 0.5 \cdot \frac{20}{108} \approx 0.093$$

- 0<EI<1 — товар є **товаром першої необхідності**.
- Попит зростає із доходом, але **непропорційно**.

Перехресна еластичність попиту

$$E_{xy} = \frac{dQ_x}{dP_y} \cdot \frac{P_y}{Q_x}$$

- $\frac{dQ_x}{dP_y} = 1.5$,
- $P_y = 12$,
- $Q_x = 108$

$$E_{xy} = 1.5 \cdot \frac{12}{108} = \frac{18}{108} = 0.167$$

- $Exy > 0$, товари x і y є **субститутами** (взаємозамінні).
- Підвищення ціни товару y призводить до **зростання попиту** на товар x.

Моделі фінансової математики також базуються на диференціальних методах. Зокрема, модель ціноутворення опціонів Блека-Шоулза описується диференціальним рівнянням у частинних похідних $\partial V/\partial t + (1/2) \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \cdot (\partial^2 V/\partial S^2) + r \cdot S \cdot (\partial V/\partial S) - r \cdot V = 0$, де V — вартість опціону, S — ціна базового активу, t — час, σ — волатильність базового активу, r — безризикова відсоткова ставка. Розв'язання цього рівняння дозволяє визначити справедливу вартість опціону та розробити стратегії хеджування фінансових ризиків.

Приклад: Оцінка вартості європейського кол-опціону

Нехай маємо такі вхідні дані:

Поточна ціна акції (S): **$100**

Страйк (ціна виконання) опціону (K): **$105**

Час до погашення (T): **0.5 роки**

Безризикова ставка (r): **5% річних (0.05)**

Волатильність акції (σ): **20% річних (0.2)**

Тип опціону: **європейський кол-опціон** (право купити)

Розв'язання через формулу Блека-Шоулза для кол-опціону

Аналітичне розв’язання згаданого диференціального рівняння (ПДР) призводить до формули:

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

де

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

а N(x) — функція розподілу стандартного нормального розподілу (квантиль нормальної кумулятивної функції).

Розрахунок d_1

$$d_1 = \frac{\ln(100/105) + (0.05 + 0.2^2/2) \cdot 0.5}{0.2 \cdot \sqrt{0.5}} \approx \frac{-0.04879 + 0.035}{0.1414} \approx -0.0977$$

Розрахунок d_2

$$d_2 = d_1 - 0.2 \cdot \sqrt{0.5} \approx -0.0977 - 0.1414 \approx -0.2391$$

Знаходимо $N(d_1)$ і $N(d_2)$

$$N(d_1) \approx N(-0.0977) \approx 0.4611, \quad N(d_2) \approx N(-0.2391) \approx 0.4054$$

Підставляємо у формулу:

$$C = 100 \cdot 0.4611 - 105 \cdot e^{-0.05 \cdot 0.5} \cdot 0.4054$$

$$C \approx 46.11 - 105 \cdot 0.9753 \cdot 0.4054 \approx 46.11 - 41.51 \approx 4.60$$

2.2. Інтегральні методи для розрахунку економічних показників

Інтегральне числення є потужним математичним інструментом для розрахунку та аналізу економічних показників. Невизначений інтеграл функції $f(x)$, що позначається як $\int f(x)dx$, представляє сукупність всіх первісних функцій F(x) таких, що F'(x) = f(x). Визначений інтеграл ∫[a,b]f(x)dx обчислює площу під кривою функції f(x) на інтервалі [a, b]. В економічному контексті інтегрування дозволяє розраховувати сукупні величини на основі їх граничних значень, агрегувати економічні показники за певними параметрами, визначати сумарні ефекти від економічних процесів та моделювати їх динаміку. Застосування інтегралів в економіці ґрунтується на фундаментальному зв'язку між диференціальним та інтегральним численнями, що визначається основною теоремою математичного аналізу.

Обчислення споживчого надлишку є класичним прикладом застосування визначеного інтеграла в економіці. Споживчий надлишок визначається як різниця між максимальною сумою, яку споживачі готові заплатити за певний обсяг товару, та сумою, яку вони фактично сплачують [6]. Математично споживчий надлишок CS для обсягу товару Q за ринкової ціни $P*$ обчислюється за формулою $CS = \int [0, Q]P(q)dq$, де $P(q)$ — обернена функція попиту, яка показує максимальну ціну, яку споживачі готові заплатити за кожну додаткову одиницю товару. Графічно споживчий надлишок відповідає площі між кривою попиту та горизонтальною лінією ринкової ціни. Аналіз споживчого надлишку дозволяє оцінювати вплив різних економічних політик на добробут споживачів та ефективність ринкових механізмів.

Виробничий надлишок, аналогічно до споживчого, визначається як різниця між сумою, яку виробники фактично отримують за реалізацію своєї продукції, та мінімальною сумою, за яку вони готові були б цю продукцію продати. Математично виробничий надлишок PS для обсягу товару Q за ринкової ціни $P*$ обчислюється за формулою

$PS = P *\cdot Q - \int [0, Q] MC(q)dq$, де $MC(q)$ — функція граничних витрат, яка показує мінімальну ціну, за яку виробники готові запропонувати кожну додаткову одиницю товару. Графічно виробничий надлишок відповідає площі між горизонтальною лінією ринкової ціни та кривою пропозиції. Сума споживчого та виробничого надлишків становить загальний суспільний виграш від ринкової рівноваги, який максимізується за умов досконалої конкуренції [11].

Капітал як накопичений запас вартості може бути обчислений на основі потоку інвестицій за допомогою інтегрування. Якщо $I(t)$ — функція, що описує потік інвестицій у момент часу t, то капітал $K(T)$ у момент часу T обчислюється як визначений інтеграл K(T) = ∫[0,T]I(t)dt..

Приклад

Нехай витрати на рекламу змінюються протягом року за законом

$$\mathrm{C}(t) = 1000 + 200\sin(\frac{\pi t}{6}).$$

де t –місяць.Загальні витрати за рік

$$\int_0^{12}\left(1000 + 200\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)dt = 1000 \cdot 12 + 200\int_0^{12}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)dt = 12000.$$

Дисконтування грошових потоків є ключовим елементом фінансового аналізу, де інтегральне числення відіграє суттєву роль. Якщо $C(t)$ — функція, що описує грошовий потік у момент часу t, а r — ставка дисконтування, то поточна вартість PV майбутніх грошових потоків на інтервалі $[0, T]$ обчислюється за формулою $PV = \int [0, T] C(t) \cdot e\hat{}(-r \cdot t)dt$. У випадку дискретних грошових потоків $C_1, C_2, \ldots, C_\mathrm{n}$, які надходять у моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_\mathrm{n}$ відповідно, поточна вартість обчислюється як сума $PV = \Sigma[i = 1, n] C_\mathrm{i} \cdot e\hat{}(-r \cdot t_\mathrm{i})$. Метод дисконтування дозволяє порівнювати грошові потоки, які виникають у різні моменти часу, та оцінювати ефективність інвестиційних проектів.

Приклад Оцінка поточної вартості безперервного грошового потоку

Нехай компанія очікує **безперервний грошовий потік**, описаний функцією:

$$C(t) = 100 \cdot e^{0.02t}$$

де: $C(t)$ — грошовий потік у момент часу t, у доларах за рік, t — час у роках, $0 \leq t \leq 50$, $r = 0.05$— річна ставка дисконту (5%).

Обчислити **поточну вартість** цього грошового потоку на проміжку від 0 до 5 років.

$$PV = \int_0^5 C(t) \cdot e^{-rt} dt = \int_0^5 100 \cdot e^{0.02t} \cdot e^{-0.05t} dt$$

Знайдемо невизначений інтеграл:

$$\int e^{-0.03t} dt = \frac{e^{-0.03t}}{-0.03}$$

Тоді

$$PV = 100 \cdot \left[\frac{e^{-0.03t}}{-0.03}\right]_0^5 = \frac{100}{0.03} \cdot (1 - e^{-0.15})$$

Чисельно це буде дорівнювати

$$e^{-0.15} \approx 0.8607 \Rightarrow 1 - e^{-0.15} \approx 0.1393$$

$$PV \approx \frac{100}{0.03} \cdot 0.1393 \approx 3333.33 \cdot 0.1393 \approx 464.3$$

Коефіцієнт Джині, який вимірює нерівність розподілу доходів у суспільстві, також обчислюється за допомогою інтегрального числення. Якщо $L(p)$ — крива Лоренца, яка показує, яку частку сукупного доходу отримують найбідніші $p \cdot 100\%$ населення, то коефіцієнт Джині G обчислюється за формулою $G = 1 - 2 \cdot \int [0,1] L(p) dp$. Значення G змінюється від 0 (абсолютна рівність, коли всі особи мають однаковий дохід) до 1 (абсолютна нерівність, коли весь дохід отримує одна особа). Коефіцієнт Джині дозволяє порівнювати різні країни за рівнем економічної нерівності та аналізувати ефективність соціальної політики держави.

Приклад Припустимо, крива Лоренца для певної країни описується функцією: $L(p) = p^2$, де: L(p) — частка сукупного доходу, яку отримують $p \cdot 100\%$p найбіднішого населення, p∈[0,1] — частка населення, починаючи з найбідніших.

Формула коефіцієнта Джині:

$$G = 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(p)\, dp$$

У нашому випадку отримаємо

$$G = 1 - 2 \cdot \int_0^1 p^2\, dp$$

$$\int_0^1 p^2\, dp = \left[\frac{p^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$G = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

G≈0.333→ **помірно рівномірний розподіл**, але з наявною соціальною стратифікацією.

У макроекономічному аналізі інтегральне числення застосовується для розрахунку агрегованих показників. Наприклад, валовий внутрішній продукт (ВВП) можна обчислити як інтеграл від функції доданої вартості за всіма секторами економіки: $GDP = \int [0,1] VA(s)ds$, де $VA(s)$ — функція доданої вартості сектора s. Аналогічно, загальний обсяг інвестицій, споживання, експорту, імпорту та інших макроекономічних показників може бути обчислений за допомогою відповідних інтегралів. Такий підхід дозволяє аналізувати структуру економіки, вивчати міжгалузеві зв'язки та прогнозувати макроекономічну динаміку.

Приклад: Обчислення ВВП через додану вартість секторів економіки

Нехай економіка країни умовно поділена на сектори, і функція **доданої вартості** кожного сектора s на інтервалі $s \in [0,1]$ задана так:

$$VA(s) = 500 + 300s$$

де: $VA(s)$ — додана вартість сектора sss у мільйонах доларів, s — безрозмірний показник, який представляє сектори (наприклад, від сільського господарства $s = 0$ до фінансових послуг $s = 1$).

$$GDP = \int_0^1 VA(s)\, ds = \int_0^1 (500 + 300s)\, ds$$

$$\int_0^1 (500 + 300s)\, ds = \left[500s + 150s^2\right]_0^1 = 500 \cdot 1 + 150 \cdot 1^2 = 500 + 150 = 650$$

Інтеграл дає **сумарну додану вартість** усіх секторів економіки — тобто **ВВП**. Якщо форма $VA(s)$ зміниться (наприклад, деякі сектори стають продуктивнішими), це негайно вплине на результат інтегрування, і отже — на ВВП. □ Такий підхід дозволяє **моделювати економічну структуру** та оцінювати, як зміни в окремих секторах впливають на загальну економіку.

В еколого-економічному аналізі інтеграли використовуються для оцінки сукупних екологічних збитків від економічної діяльності. Якщо $D(E)$ — функція граничних екологічних збитків, що залежить від рівня забруднення E, то сукупні екологічні збитки від забруднення в діапазоні від E_1 до E_2 обчислюються як $TD = \int [E_1, E_2] D(E) dE$. Аналогічно, якщо $A(E)$ — функція граничних витрат на зменшення забруднення, то сукупні витрати на зменшення забруднення від рівня E_2 до рівня E_1 обчислюються як $TC = \int [E_1, E_2] A(E) dE$. Оптимальний рівень забруднення досягається, коли граничні екологічні збитки дорівнюють граничним витратам на зменшення забруднення: $D(E) = A(E)$. Цей підхід дозволяє розробляти ефективні механізми екологічного регулювання та оцінювати економічні наслідки екологічної політики [8].

Приклад

Нехай:

Функція граничних екологічних збитків має вигляд:

$$D(E) = 3E^2$$

Функція граничних витрат на зменшення забруднення:

$$A(E) = 60 - E^2$$

де E — рівень викидів (одиниці забруднення), а $D(E)$ і $A(E)$ вимірюються в тис. грн.

1. Знайти **сукупні екологічні збитки (TD)** при зростанні забруднення з $E_1 = 2$ до $E_2 = 4$.
2. Знайти **сукупні витрати на зменшення забруднення (TC)** з $E_2 = 4$ до $E_1 = 2$.
3. Визначити **оптимальний рівень забруднення**, за якого $D(E) = A(E)$.

Сукупні екологічні збитки (Total Damage)

$$TD = \int_2^4 3E^2\,dE = 3\int_2^4 E^2\,dE = 3\left[\frac{E^3}{3}\right]_2^4 = \left[E^3\right]_2^4 = 64 - 8 = 56$$

2.2. Сукупні витрати на зменшення забруднення (Total Cost)

$$TC = \int_2^4 (60 - E^2)\,dE = \left[60E - \frac{E^3}{3}\right]_2^4$$

Розрахунок:

- $60 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} = 240 - \frac{64}{3} = 240 - 21.\overline{3} = 218.\overline{6}$
- $60 \cdot 2 - \frac{8}{3} = 120 - \frac{8}{3} = 117.\overline{3}$

Тоді:

$$TC = 218.\overline{6} - 117.\overline{3} = 101.\overline{3}$$

Сукупні витрати на зменшення забруднення — **приблизно 101.33 тис. грн**

Оптимальний рівень забруднення (E)*

Знаходимо точку, де:

$$D(E) = A(E) \Rightarrow 3E^2 = 60 - E^2 \Rightarrow 4E^2 = 60 \Rightarrow E^2 = 15 \Rightarrow E = \sqrt{15} \approx 3.87$$

Відповідь:

Оптимальний рівень забруднення становить **приблизно 3.87 одиниці**.

Отже, Якщо дозволити забруднення понад $E = 3.87$, збитки переважають економію, тобто доцільно регулювати обсяг викидів.

Якщо зменшувати забруднення нижче цієї межі — витрати на очищення перевищують екологічний ефект, і це економічно недоцільно.

Таким чином, точка $D(E) = A(E)$ дає основу для економічно збалансованої екологічної політики.

Висновки до розділу 2

У другому розділі було продемонстровано, що методи математичного аналізу — диференціальні та інтегральні — є ключовими інструментами кількісного моделювання економічних процесів. Їх широке застосування охоплює аналіз витрат і доходів, визначення оптимального обсягу виробництва, оцінювання еластичності попиту, побудову фінансових моделей, екологічне регулювання та макроекономічне планування.

Зокрема: Диференціальні методи дозволяють оцінювати граничні економічні величини (витрати, дохід, прибуток) і визначати точки оптимуму — наприклад, такі, де граничні витрати дорівнюють граничному доходу. Це є основою прийняття ефективних виробничих рішень.

Аналіз еластичності за допомогою похідних показує чутливість попиту до зміни ціни, доходу чи цін інших товарів, що дозволяє формувати раціональну цінову політику і правильно класифікувати товари (як предмети розкоші, товари першої необхідності чи субститути).

Інтегральні методи застосовуються для визначення сукупних економічних ефектів: споживчого і виробничого надлишків, сукупного капіталу, поточної вартості грошових потоків, чистої приведеної вартості інвестицій. Вони також є базою для оцінювання нерівності (коефіцієнт Джині) та побудови складних фінансових моделей, таких як модель Блека-Шоулза.

Важливою прикладною сферою є еколого-економічне моделювання, де інтеграли дозволяють обчислити сукупні екологічні збитки та витрати на очищення довкілля. Рівність граничних збитків і граничних витрат визначає оптимальний рівень забруднення, що є основою ефективної екологічної політики.

Таким чином, застосування математичного аналізу в економіці не лише підвищує точність розрахунків, а й сприяє науково обґрунтованому прийняттю управлінських рішень, формуванню раціональної економічної поведінки суб’єктів ринку та розробці ефективних економічних стратегій на мікро- та макрорівнях.

ВИСНОВКИ

Отже, у роботі було досліджено теоретичні та практичні аспекти застосування інтегралів і похідних в економіці, що продемонструвало фундаментальну роль математичного аналізу в моделюванні економічних процесів. Диференціальне числення дозволяє формалізувати поняття граничних величин, які є ключовими для сучасної економічної теорії. На їх основі здійснюється дослідження функцій витрат, доходу та прибутку, аналізується поведінка споживача через граничну корисність, розв'язуються задачі оптимізації виробництва та розподілу ресурсів, а також обчислюються різні показники еластичності, які характеризують чутливість економічних величин до змін відповідних факторів.

Інтегральне числення, як протилежна операція до диференціювання, знаходить широке застосування в економіці для обчислення сукупних величин на основі їх граничних значень. Це надає можливість розраховувати такі економічні показники, як споживчий і виробничий надлишки, вартість капіталу на основі потоку інвестицій, поточну та чисту приведену вартість майбутніх грошових потоків, коефіцієнт Джині для оцінки нерівності розподілу доходів, а також різноманітні макроекономічні агреговані показники. Особливого значення інтегральне числення набуває у фінансовому аналізі, зокрема для ціноутворення деривативів та управління ризиками.

Методи математичного аналізу забезпечують не лише кількісну оцінку економічних показників, але й поглиблене розуміння причинно-наслідкових зв'язків в економічних системах. Диференціальні рівняння та їх системи дозволяють моделювати динаміку економічних процесів, аналізувати умови їх стабільності та прогнозувати майбутній розвиток. Математичний апарат умовної оптимізації, зокрема метод множників Лагранжа, уможливлює пошук оптимальних рішень за наявності ресурсних, технологічних, бюджетних та інших обмежень, що відповідає реальним умовам функціонування економічних суб'єктів.

Тож, практичне застосування диференціального та інтегрального числення в економіці демонструє потужність математичного підходу до розв'язання економічних задач різного рівня складності. Математичний аналіз надає інструменти для обґрунтування економічних рішень на мікро- та макрорівнях, забезпечує розробку ефективних стратегій поведінки економічних суб'єктів, дозволяє оцінювати наслідки економічної політики та аналізувати взаємозв'язки між різними секторами економіки. Таким чином, методи математичного аналізу є невід'ємною складовою сучасної економічної науки, забезпечуючи її точність, логічну послідовність та здатність до кількісного вимірювання економічних явищ і процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Базилевич В. Д. Економічна теорія: Політекономія: підручник. Київ: Знання-Прес, 2019. 719 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика: підручник. Київ: НАУ, 2019. 448 с.
3. Блауг М. Економічна теорія в ретроспективі / пер. з англ. І. Дзюби. Київ: Основи, 2001. 670 с.
4. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: підручник. К.: Знання, 2007. 534 с. 3.
5. Вітлінський В. В. Моделювання економіки: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2018. 408 с.
6. Григорків В. С. Економетрика: лінійні моделі парної та множинної регресії: навч. посіб. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. 224 с.
7. Дрозд В. Д. Математичні методи в економіці та підприємництві: навч. посіб. Тернопіль: ТНЕУ, 2020. 298 с.
8. Економіко-математичне моделювання: навч. посіб. / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2018. 704 с.
9. Лавренчук В. П. Вища математика. Частина 2. Диференціальне та інтегральне числення: навч. посіб. Чернівці: Рута, 2017. 312 с.
10. Лотоцький В. А., Івасишен С. Д. Диференціальні рівняння та їх застосування в економіці: навч. посіб. Київ: Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2022. 240 с.
11. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: навчальний посібник. Видавництво: Знання, 2008. 520 с.
12. Малярець Л. М. Економіко-математичне моделювання: навч. посіб. Харків: ХНЕУ, 2019. 288 с.
13. Мацкул В.М. Вища математика для економістів: підручник. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472 с. 5.

14. Фартушний І.Д. Математика для економістів: Конспект лекцій: навчальний посібник. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 109 с.
15. Mankiw N. G. Principles of Economics. 8th edition. Cengage Learning, 2018. 836 p.
16. Narayanan V., Fahey L. Macroenvironmental Analysis for Strategic Management. Long Range Planning. 2017. Vol. 50, no. 2. P. 66-79.
17. Peterson S. L. Construction of The Mathematical Model. University of Chicago Press, 2020. 324 p.
18. Shone R. Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Application. Cambridge University Press, 2002. 708 p.
19. Sydsæter K., Hammond P. J., Strøm A., Carvajal A. Essential Mathematics for Economic Analysis. 5th edition. Pearson, 2016. 744 p.
20. Varian H. R. Intermediate Microeconomics: A Modern Approach. 9th edition. W. W. Norton & Company, 2019. 758 p.