

Міністерство освіти та науки України
Карпатський національний університет імені Василя Стефаника

М.В. Семаньків

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ З ДИСЦИПЛІНИ
“ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ”**

Для студентів всіх форм навчання
галузі знань F Інформаційні технології

Івано-Франківськ
2025

УДК 519.6.
ББК – 22.161.2.

*Рекомендовано до друку Вченою радою факультету математики та інформатики
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника
(протокол № 9 від 22.10.2025р.).*

Рецензенти :

Соломко А.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент
(Карпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Іляш Ю.Ю., кандидат технічних наук, доцент (Карпатський національний університет імені Василя Стефаника)

Семаньків М.В. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Програмна реалізація чисельних методів”. – Івано-Франківськ: Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2025. – 70 с.

Методичні вказівки містять необхідні завдання лабораторних робіт, вимоги до оформлення та зразки виконання завдань лабораторних робіт; сприяють отримання навиків програміста-аналітика, здатного розробляти прикладні програмні продукти для обчислювальних задач.

Для студентів спеціальностей Комп’ютерні науки та Інформаційні системи та технології.

ЗМІСТ

Вступ

Лабораторна робота №1.	Елементи теорії похибок.
Лабораторна робота №2.	Дії над наближеними числами
Лабораторна робота №3.	Методи розв'язання нелінійних рівнянь з одним невідомим
Лабораторна робота №4.	Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Лабораторна робота №5.	Інтерполяція. Екстраполяція. Апроксимація
Лабораторна робота №6.	Чисельне диференціювання
Лабораторна робота №7.	Наближене інтегрування функцій
Лабораторна робота №8.	Звичайні диференціальні рівняння. Задача Коші

Перелік рекомендованих літературних джерел

ВСТУП

Наукова цінність вивчення курсу «Програмна реалізація чисельних методів» полягає у формуванні практичних компетентностей, спрямованих на застосування математичних алгоритмів для розв'язання прикладних задач із використанням сучасних мов програмування та бібліотек. Виконання завдань забезпечує оволодіння методами чисельної лінеаризації, інтерполяції, апроксимації, інтегрування та розв'язування диференціальних рівнянь, що дозволяє моделювати складні процеси у фізиці, інженерії, економіці та інформаційних технологіях. Особлива увага приділяється аналізу точності обчислень, оцінюванню похибок та стійкості методів, що сприяє формуванню критичного мислення і навичок оптимізації обчислювальних процедур. Таким чином, курс забезпечує синтез математичної теорії та програмної практики, створюючи базу для подальших наукових досліджень та розробки інноваційних програмних продуктів.

Мета лабораторного практикуму з курсу «Програмна реалізація чисельних методів» полягає у закріпленні теоретичних знань з чисельних методів через їх практичне застосування в програмуванні та формуванні навичок побудови ефективних обчислювальних алгоритмів. Студенти повинні навчитися реалізовувати методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь, інтерполяції, апроксимації, чисельного диференціювання й інтегрування, а також методів розв'язання диференціальних рівнянь у середовищі сучасних мов програмування. Лабораторний практикум спрямований на розвиток уміння аналізувати похибки обчислень, оцінювати стійкість алгоритмів і застосовувати чисельні методи для моделювання прикладних задач у науці та техніці.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
ТЕМА: ТЕОРІЯ ПОХИБОК

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	1	
Тема:	Теорія похибок	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Завдання 1	Гранична відносна похибка для x_1 :	
	Гранична відносна похибка для x_2 :	
	Точніша рівність для:	
Завдання 2	а) у вузькому розумінні;	
	б) у широкому розумінні	
Завдання 3	а) у вузькому розумінні:	
	Гранична абсолютна похибка	
	Гранична відносна похибка	
	б) у широкому розумінні	
	Гранична абсолютна похибка	
	Гранична відносна похибка	

ЗАВДАННЯ:

- Визначити, яка рівність точніша;
- Округлити сумнівні цифри числа, залишивши вірні знаки: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні;
- Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел, якщо вони мають лише вірні цифри: а) у вузькому розумінні; б) у широкому розумінні.

№1. 1) $\sqrt{44} = 6.63$; $19/41 = 0.463$.

- а) 22.553 (± 0.016);
б) 2.8546; $\delta = 0.3\%$.
- а) 0.2387; б) 42.884.

№2. 1) $\sqrt{73} = 8.54$; $7/15 = 0.467$.

- а) 6.4257 (± 0.0024);
б) 17.2834; $\delta = 0.3\%$.
- а) 3.751; б) 0.537.

№3. 1) $\sqrt{10.5} = 3.24$; $4/17 = 0.235$.

- а) 0.5748 (± 0.0034);
б) 34.834; $\delta = 0.1\%$.
- а) 11.445; б) 2.043.

№4. 1) $\sqrt{10} = 3.16$; $15/7 = 2.14$.

- а) 2.3485 (± 0.0042);
б) 0.34484; $\delta = 0.4\%$.

3) a) 2.3445; б) 0.745.

№5. 1) $\sqrt{4.8} = 2.19$; $6/7 = 0.857$.

2) a) 5.435 (± 0.0028);

б) 10.8441; $\delta = 0.5\%$.

3) a) 8.345; б) 0.288.

№6. 1) $\sqrt{74} = 8.60$; $12/11 = 1.091$.

2) a) 0.12356 (± 0.00036);

б) 8.24163; $\delta = 0.2\%$.

3) a) 12.45; б) 3.4453.

№7. 1) $\sqrt{22} = 4.69$; $2/21 = 0.095$.

2) a) 2.4543 (± 0.0032);

б) 24.5643; $\delta = 0.1\%$.

3) a) 0.374; б) 4.348.

№8. 1) $\sqrt{9.8} = 3.13$; $23/15 = 1.53$.

2) a) 8.3445 (± 0.0022);

б) 23.574; $\delta = 0.2\%$.

3) a) 20.43; б) 0.576.

№9. 1) $\sqrt{83} = 9.11$; $6/11 = 0.545$.

2) a) 3.7834 (± 0.0041);

б) 21.68563; $\delta = 0.3\%$.

3) a) 41.72; б) 0.678.

№10. 1) $\sqrt{52} = 7.21$; $17/19 = 0.895$.

2) a) 13.537 (± 0.0026);

б) 7.521; $\delta = 0.12\%$.

3) a) 5.634; б) 0.0748.

№11. 1) $\sqrt{21} = 4.58$; $21/29 = 0.723$.

2) a) 13.6253 (± 0.0021);

б) 0.3567; $\delta = 0.042\%$.

3) a) 18.357; б) 2.16.

№12. 1) $\sqrt{28} = 5.29$; $50/19 = 2.63$.

2) a) 1.784 (± 0.0063);

б) 0.85637; $\delta = 0.021\%$.

3) a) 0.5746; б) 236.58.

№13. 1) $\sqrt{61} = 7.81$; $13/17 = 0.764$.

2) a) 3.6878 (± 0.0013);

- 6) 15.873; $\delta = 0.042\%$.
 3) a) 14.862; 6) 8.73.
- №14.** 1) $\sqrt{62} = 7.87$; $7/22 = 0.318$.
 2) a) 27.1548 (± 0.0016);
 6) 0.3945; $\delta = 0.016\%$.
 3) a) 0.3648; 6) 21.7.
- №15.** 1) $\sqrt{18} = 4.24$; $17/11 = 1.545$.
 2) a) 0.8647 (± 0.0013);
 6) 24.3618; $\delta = 0.22\%$.
 3) a) 2.4516; 6) 0.863.
- №16.** 1) $\sqrt{38} = 6.16$; $5/3 = 1.667$.
 2) a) 0.98351 (± 0.00042);
 6) 3.7542; $\delta = 0.32\%$.
 3) a) 62.74; 6) 0.389.
- №17.** 1) $\sqrt{14} = 3.74$; $49/13 = 3.77$.
 2) a) 5.6483 (± 0.0017);
 6) 83.736; $\delta = 0.085\%$.
 3) a) 5.6432; 6) 0.00858.
- №18.** 1) $\sqrt{3} = 1.73$; $13/7 = 1.857$.
 2) a) 32.7486 (± 0.0012);
 6) 2.8867; $\delta = 0.043\%$.
 3) a) 0.0384; 6) 63.745.
- №19.** 1) $\sqrt{12} = 3.46$; $19/12 = 1.58$.
 2) a) 4.88445 (± 0.00052);
 6) 0.096835; $\delta = 0.32\%$.
 3) a) 12.688; 6) 4.636.
- №20.** 1) $\sqrt{75} = 8.66$; $51/11 = 4.64$.
 2) a) 38.4258 (± 0.0014);
 6) 0.66385; $\delta = 0.34\%$.
 3) a) 6.743; 6) 0.543.
- №21.** 1) $\sqrt{88} = 9.38$; $18/7 = 2.57$.
 2) a) 0.39642 (± 0.00022);
 6) 46.453; $\delta = 0.015\%$.
 3) a) 15.644; 6) 6.125.
- №22.** 1) $\sqrt{17} = 4.12$; $19/9 = 2.11$.
 2) a) 0.66385 (± 0.00042);

- 6) 5.8425; $\delta = 0.23\%$.
 3) a) 0.3825; 6) 24.6.
- №23.** 1) $\sqrt{92} = 9.59$; $16/7 = 2.28$.
 2) a) 0.75244 (± 0.00013);
 6) 24.3872; $\delta = 0.34\%$.
 3) a) 16.383; 6) 5.734.
- №24.** 1) $\sqrt{55} = 7.41$; $20/13 = 1.54$.
 2) a) 2.3684 (± 0.0017);
 6) 45.7832; $\delta = 0.18\%$.
 3) a) 0.573; 6) 3.6761.
- №25.** 1) $\sqrt{65} = 8.06$; $12/7 = 1.71$.
 2) a) 0.38725 (± 0.00112);
 6) 72.354; $\delta = 0.24\%$.
 3) a) 18.275; 6) 0.00644.
- №26.** 1) $\sqrt{41} = 6.40$; $6/7 = 0.857$.
 2) a) 0.36127 (± 0.00034);
 6) 46.7843; $\delta = 0.32\%$.
 3) a) 3.425; 6) 7.38.
- №27.** 1) $\sqrt{56} = 7.48$; $23/9 = 2.56$.
 2) a) 4.57633 (± 0.00042);
 6) 23.7564; $\delta = 0.44\%$.
 3) a) 3.75; 6) 6.8343.
- №28.** 1) $\sqrt{42} = 6.48$; $27/31 = 0.872$.
 2) a) 15.8372 (± 0.0026);
 6) 0.088748; $\delta = 0.56\%$.
 3) a) 3.643; 6) 72.385.
- №29.** 1) $\sqrt{66} = 8.12$; $7/3 = 2.33$.
 2) a) 13.5726 (± 0.0072);
 6) 3.87683; $\delta = 0.33\%$.
 3) a) 26.3; 6) 4.8556.
- №30.** 1) $\sqrt{53} = 7.28$; $14/17 = 0.823$.
 2) a) 0.66835 (± 0.00115);
 6) 23.3748; $\delta = 0.27\%$.
 3) a) 43.813; 6) 0.64

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ:

Завдання: 1) Визначити, яка рівність точніша: $\sqrt{18} \approx 4.24$ чи

$$\frac{9}{11} \approx 0.818$$

Розв'язання:

1) Знаходимо значення даних виразів із більшою кількістю десяткових знаків, ніж наявні наближення:

$$x_1 \approx \sqrt{18} \approx 4.2426$$

$$x_2 \approx \frac{9}{11} = 0.81818$$

Python:

```
import math

x1 = math.sqrt(18)
print(x1)
```

Обчислюємо граничні абсолютні похибки, округляючи їх із надлишком:

$$\Delta x_1 = |4.24 - 4.2426| \leq 0.0027 = \overline{\Delta x_1},$$

$$\Delta x_2 = |0.818 - 0.81818| \leq 0.00019 = \overline{\Delta x_2}.$$

Python:

```
absolute1 = math.fabs(x1 - 4.24)
```

Граничні відносні похибки становитимуть:

$$\overline{\delta x_1} = \left| \frac{\overline{\Delta x_1}}{x_1} \right| = \frac{0.0027}{4.24} \approx 0.0006367 \approx 0.00064 (0.064\%)$$

$$\overline{\delta x_2} = \left| \frac{\overline{\Delta x_2}}{x_2} \right| = \frac{0.00019}{0.818} \approx 0.0002322 \approx 0.00024 (0.024\%)$$

Python:

```
relative1 = absolute1*100/4.24
```

Оскільки $\frac{9}{11} \approx 0.818$ є більш точною.

Відповідь: Рівність $\frac{9}{11} \approx 0.818$ точніша.

Завдання: 2) Округлити сумнівні цифри, залишивши вірні знаки: а) числа 72.353 ± 0.026 у вузькому розумінні; б) числа 2.3544 ; $\delta=0.2\%$ у широкому розумінні;

Розв'язання:

а) Нехай $72.353 \pm 0.026 = x$.

Проведемо порівняння для абсолютної похибки 0.026

$$0.026 < 0.5$$

$$0.026 < 0.05$$

$$0.026 > 0.005$$

За умовою $\Delta x = 0.026 < 0.05$. Отже, у **вузькому розумінні** обираємо наступні розряди: 0.05.

Це означає, що у числі 72.353 вірними у вузькому розумінні є три цифри 7, 2, 3.

За правилом округлення знайдемо наближене значення числа:

$$x^* = 72.4.$$

б) Нехай $x=2.3544$; $\delta x=0.2\%$.

Обчислимо абсолютну похибку $\Delta x = x \cdot \delta x = 2.3544 \cdot 0.002 = 0.00471$.

$$0.00471 < 0.1$$

$$0.00471 < 0.01$$

$$0.00471 > 0.001$$

$\Delta x < 0.01$. Отже, у **широкому розумінні** обираємо наступні розряди: 0.01.

Це означає, що у числі 2.3544 вірними у широкому розумінні є три цифри, тому округлюємо його, залишаючи ці три цифри: $x^*=2.35$.

Завдання: 3) Обчислити значення X та визначити абсолютну та відносну похибку результату

Розв'язання:

$$X = \frac{(a+b)e}{\sqrt{c^2 - d^2}}$$

$$a = 3,87 \pm 0,03$$

$$b = 1,767 \pm 0,004$$

$$c = 3,663 \pm 0,005$$

$$d = 0,117 \pm 0,007$$

$$e = 2,47 \pm 0,06$$

Заповнимо таблицю в Excel згідно вказаних даних

	A	B	C	D
1		Значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
2	a	3,87	0,03	
3	b	1,767	0,004	
4	c	3,663	0,005	
5	d	0,117	0,007	
6	e	2,47	0,06	

Обчислимо відносні похибки за формулою

	Значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
a	3,87	0,03	$= C2 * 100 / B2$

Розіб'ємо формули на окремі операції

	A	B	C	D
1		Значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
2	a	3,87	0,03	0,775193798
3	b	1,767	0,004	0,226372383
4	c	3,663	0,005	0,136500137
5	d	0,117	0,007	5,982905983
6	e	2,47	0,06	2,429149798
7	a+b			
8	(a+b)*e			
9	c^2			
10	d^2			
11	c^2-d^2			
12	sqrt(c^2-d^2)			
13	(a+b)*e / sqrt(c^2-d^2)			

Проводимо обчислення в кожному рядку наступним чином:

1. Обчислюємо результат виконання операції

	Значення
a	3,87
b	1,767
c	3,663
d	0,117
e	2,47
a+b	$= B2 + B3$

2. Згідно похибок арифметичних операцій для операції додавання $a+b$ необхідно спочатку обчислити абсолютну похибку, та використати її для другого обчислення - обчислення відносної похибки

№	Дія	Перше обчислення	Друге обчислення
		Абсолютна/відносна похибка	Абсолютна/відносна похибка
1	додавання $u = a_1 + a_2 + \dots + a_n$	$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_n}$	$\delta_u = \frac{\Delta_u}{ u }$
2	віднімання $u = a_1 - a_2$	$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}$	$\delta_u = \frac{\Delta_u}{ u }$
3	множення $u = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$	$\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_n}$	$\Delta_u = \delta_u u $
4	ділення $u = a_1 / a_2$	$\delta_u = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$	$\Delta_u = \delta_u u $
5	піднесення до степеня $u = a^n$ $u = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\delta_u = n \cdot \delta_a$ $\delta_u = \frac{1}{n} \cdot \delta_a$	$\Delta_u = \delta_u u $

	Значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
a	3,87	0,03	0,775193798
b	1,767	0,004	0,226372383
c	3,663	0,005	0,136500137
d	0,117	0,007	5,982905983
e	2,47	0,06	2,429149798
a+b	5,637	= C2 + C3	

	Значення	Абсолютна похибка	Відносна похибка
a	3,87	0,03	0,775193798
b	1,767	0,004	0,226372383
c	3,663	0,005	0,136500137
d	0,117	0,007	5,982905983
e	2,47	0,06	2,429149798
a+b	5,637	0,034	= C7 * 100 / B7

3. Для наступного рядка при обчисленні добутку згідно таблиці перше обчислення повинно бути - відносна похибка, а вже за її допомогою абсолютна

e	2,47	0,06	2,429149798
a+b	5,637	0,034	0,603157708
(a+b)*e	13,92339		= D7 + D6

e	2,47	0,06	2,429149798
a+b	5,637	0,034	0,603157708
(a+b)*e	13,92339	= D8 * B8 / 100	3,032307506

4. Завершити всі обчислення

Завдання: 4) Обчислити, користуючись правилом підрахунку цифр

Правила підрахунку цифр

- 1) При додаванні та відніманні в результаті слід зберегти **стільки знаків після коми**, скільки їх має наближене значення з **найменшою** кількістю таких знаків:

$$23,2 + 0,442 + 7,247 \approx 23,2 + 0,44 + 7,25 \approx 30,9.$$

- 2) При множенні та діленні в результаті слід зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближене значення з **найменшою** кількістю **значущих цифр**:

$$30,9 \cdot 1,8367 \approx 30,9 \cdot 1,84 \approx 56,856 \approx 56,9.$$

$$56,9 : 2,412 \approx 56,9 : 2,41 \approx 23,609 \approx 23,6.$$

- 3) При піднесенні до степеня в результаті слід зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має наближене число, яке підноситься до степеня:

$$11,38^2 = 129,5044 \approx 129,9.$$

- 4) При добуванні коренів у результаті слід зберегти стільки значущих цифр, скільки їх має підкореневе число:

$$\sqrt{2,97} \approx 1,724 \approx 1,72.$$

- 5) При визначенні логарифма наближеного числа треба брати стільки значущих цифр, скільки їх має число, від якого знаходять логарифм:

$$\lg(77,23) \approx 1,8878 \approx 1,888.$$

- 6) Якщо серед чисел, над якими виконується математична дія, є точні числа, то кількість значущих цифр цих чисел при заокругленні результату не береться до уваги:

$$\pi / 2 = 3,14 / 2 = 1,57.$$

- 7) Всі обчислення проміжних результатів слід виконувати з кількістю значущих **цифр на одиницю більшою**, ніж отримано при вимірах. В остаточному результаті ця зайва цифра **відкидається**.

Обчислити значення $(a - b) \cdot c^2 / (a + b)$ якщо $a \approx 9,31$, $b \approx 3,1$, $c \approx 2,33$.

Розв'язання:

$$a - b = 9,31 - 3,1 = 6,21 \text{ (згідно пункту 1 і 7);}$$

$$c^2 = 2,33^2 = 5,4289 \approx 5,43 \text{ (згідно пункту 3)}$$

$$(a - b) \cdot c^2 = 6,21 \cdot 5,43 = 33,7203 \approx 33,7 \text{ (згідно пункту 2);}$$

$$a + b = 9,31 + 3,1 = 12,4 \text{ (згідно пункту 1);}$$

$$x = 33,7 : 12,4 = 2,7177 \approx 2,7 \text{ (згідно пункту 2 і 7).}$$

Відповідь: $x \approx 2,7$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
ТЕМА: НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	2	
тема:	Наближене розв'язання нелінійних рівнянь	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Відокремлення коренів	(графік)	
Інтервал	a =	b =
Уточнення кореня методом половинного ділення		
Програмна реалізація	Значення кореня =	
	Кількість ітерацій=	
Обчислювальна перевірка	Значення кореня =	
Уточнення кореня методом дотичних		
	Нерухома точка =	
	Значення кореня =	
	Кількість кроків =	

ЗАВДАННЯ:

Розв'язати нелінійне алгебраїчне рівняння $f(x)=0$ з точністю до 0.001.

1. Відокремлення коренів виконати графічно.

2. (два методи) Уточнення коренів провести методом половинного ділення та методом Ньютона (дотичних).

<i>Вар.</i>	<i>Рівняння</i>	<i>Вар.</i>	<i>Рівняння</i>
1	$9x^4 + 8x^3 + 1.5x^2 + 2x - 10 = 0$	2	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
3	$6x^4 + 4x^3 + x^2 + x - 10 = 0$	4	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$
5	$4.5x^4 - 4x^3 + 1.5x^2 - 2x - 7 = 0$	6	$6x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 7 = 0$
7	$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 5 = 0$	8	$x^4 - 12x^3 - 9 = 0$
9	$6x^4 + 4x^3 - x^2 - x - 10 = 0$	10	$x^4 - 108x + 7 = 0$
11	$3x^4 + 2x^3 + x^2 + x - 5 = 0$	12	$9x^4 + 12x^3 - 36x^2 - 2 = 0$
13	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 5 = 0$	14	$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0$
15	$3x^4 - 10x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0$	16	$2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 5 = 0$

17	$4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 9 = 0$	18	$2x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 1 = 0$
19	$3x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x - 3 = 0$	20	$4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1 = 0$
21	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$	22	$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3 = 0$
23	$2x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 6 = 0$	24	$3x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 4 = 0$
25	$6x^4 - 4x^3 - x^2 + x - 7 = 0$	26	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 1 = 0$
27	$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = 0$	28	$3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$
29	$2x^4 + 4x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$	30	$x^4 - 4x - 1 = 0$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ:

Розв'язання:

Завдання 1. Відокремлення коренів рівняння проводимо графічно (оберіть один з вказаних способів).

Приклад показано для функції $f(x) = x^3 - 2.002x^2 + 1.277x - 0.240$

<https://www.codabrainy.com/en/python-compiler/>

Або

https://www.tutorialspoint.com/execute_matplotlib_online.php

Або

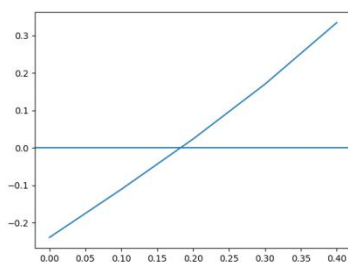
<https://www.mycompiler.io/new/python>

Код побудови:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
x = np.arange(-100, 100, 0.1)
plt.plot(x, x**3-2.002*x**2+1.277*x-0.24)
plt.axhline(y=0)
plt.show()
```

Значення проміжків змінити на менші для відокремлення одного кореня. Оберіть межі проміжку $[a; b]$ ($b-a < 1$) та впишіть у результуючу таблицю.



Завдання 2. Корінь з проміжку $[a; b]$ **уточнимо** методом половинного ділення.

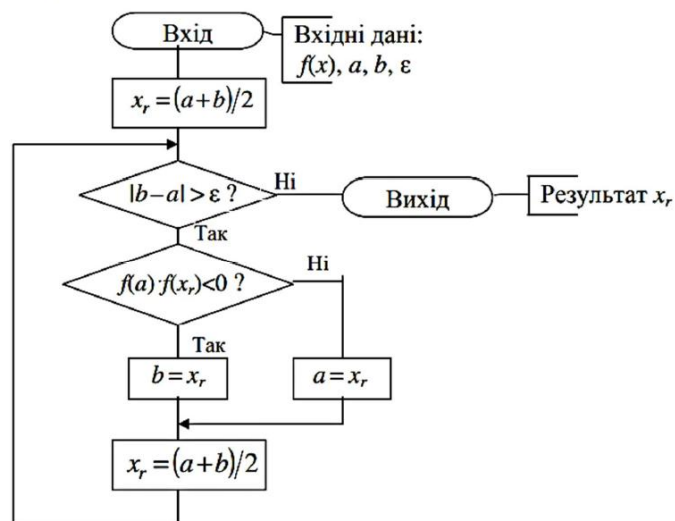


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритму методу дихотомії

Зверніть увагу яку точність необхідно для Вашої задачі.

Приклад показано для точності 0,001 та функції $f(x)=x^3-2.002x^2+1.277x-0.240$ на проміжку $[0, 0.5]$

```

a = 0
b = 0.5
y = lambda x: x**3-2.002*x**2+1.277*x-0.24
c = (a+b)/2
while (b-a)>0.001:
    if y(a)*y(c)>0:
        a = c
    else:
        b = c
    c = (a+b)/2
print(f'{c=}')
  
```

У програмній реалізації задати обчислення **кількості проходження циклу**, що необхідні були для обчислення результату:

2 спосіб. Обчислювальна перевірка. Excel

приймає значення різних знаків на кінцях відрізка

проміжок [0.3; 0.35]

Пошук точки поділу та значення функції в цій точці

крок	a	b	f(a)	f(b)	b-a	c=(a+b)/2	f(c)
1	0,3	0,35	-0,01008	0,00458	0,05	0,325	-0,002108
2	0,325	0,35	-0,00211	0,00458	0,025	0,3375	0,001391
3	0,325	0,3375	-0,00211	0,00139	0,0125	0,33125	-0,000319
4	0,33125	0,3375	-0,00032	0,00139	0,00625	0,334375	0,000545
5	0,33125	0,334375	-0,00032	0,00055	0,003125	0,3328125	0,000115
6	0,33125	0,3328125	-0,00032	0,00012	0,0015625	0,33203125	-0,000101
7	0,33203125	0,3328125	-0,00010	0,00012	0,00078125	0,33242188	0,000007

Обчислення точності та порівняння з 0.001

f(a) і f(c) однакового знаку, отже, на наступному кроці замість точки "a" буде значення точки "c"

$$x^3 - 2,002x^2 + 1,277x - 0,240 = 0$$

Завдання 3. уточнити корінь на обраному проміжку методом Ньютона (дотичних)

Практична реалізація

Визначення рухомої точки

1. Обчислити значення функції в точках a, b
2. Знайти першу похідну. Обчислити значення першої похідної в точках a, b
3. Знайти другу похідну. Обчислити значення другої похідної в точках a, b
4. Обрати нерухому точку (Якщо знак функції на кінці відрізка співпадає зі знаком другої похідної, то цей кінець відрізка є рухомим)

ПРИКЛАД: Функція $f(x)=x^3-2.002x^2+1.277x-0.240$ проміжок $[0.3; 0.35]$

1. Обчислити значення функції в точках a, b

$$f(a)=f(0.3)=-0,0108<0$$

$$f(b)=f(0.35)=0,00458>0$$

2. Знайти першу похідну. Обчислити значення першої похідної в точках a, b

$$d1(x)=3x^2-4.004x+1.277$$

$$d1(a)=d1(0.3)=0.3458>0$$

$$d1(b)=d1(0.35)=0,2431>0$$

3. Знайти другу похідну. Обчислити значення другої похідної в точках a, b

$$d2(x)=6x-4.004$$

$$d2(a)=d2(0.3)=-2.204<0$$

$$d2(b)=d2(0.3)=-1.904<0$$

4. Обрати нерухому точку

Оскільки $f(a)*d2(a)>0$, то a - рухомий кінець $x_0=a$.

1 спосіб. створити програму реалізації методу на основі блок-схеми

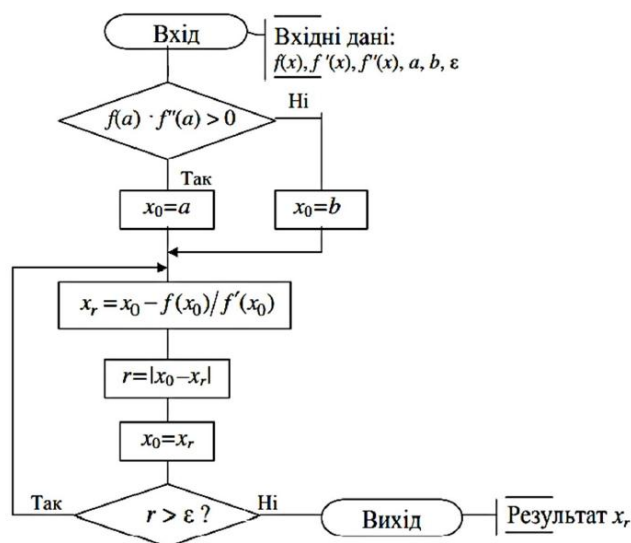


Рис.2.7. Блок-схема алгоритму розв'язання нелінійного рівняння методом Ньютона

2 спосіб.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4														
5		a	b	f(a)	f(b)	f'(a)	f'(b)	f''(a)	f''(b)					
6		0,3	0,35	-0,01008	0,00458	0,34580	0,24310	-2,20400	-1,90400					
7														
8														
9														
10														
11														
12			x0	f(x0)	f'(x0)	xr=x0-f(x0)/f'(x0)	x0-xr							
13		1	0,3	-0,01008	0,3458	0,329149798	0,0291498							
14		2	0,32915	-0,000912	0,284103	0,332358537	0,0032087							
15		3	0,33236	-1,04E-05	0,277623	0,332396043	3,751E-05							
16														
17														

Обчислення
точності та
порівняння
з 0.001

$$x^3 - 2,002x^2 + 1,277x - 0,240 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4.004x + 1.277,$$

$$f''(x) = 6x - 4.004.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3
ТЕМА: НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	3	
Тема:	Наближений розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Завдання 1	<i>Точні методи розв'язування СЛАР :</i>	
	Через вбудовану функцію	X ₁ = X ₂ = X ₃ =
	Результат матричним способом	X ₁ = X ₂ = X ₃ =
	Результат методом Крамера	X ₁ = X ₂ = X ₃ =
Завдання 2	<i>метод простої ітерації:</i>	
	розв'язок	X ₁ = X ₂ = X ₃ =
	кількість кроків ітерації	
Завдання 3	<i>метод Зейделя:</i>	
	розв'язок	X ₁ = X ₂ = X ₃ =
	кількість кроків ітерації	

ЗАВДАННЯ:

Знайти для системи лінійних рівнянь розв'язки:

X ₁	X ₂	X ₃	B
54+K	15	-17	40
34	63+K	30	75
17	-64	78+K	34

K - номер варіанту

точність 0,001

1. Точними (прямими методами)

2. Методом простої ітерації

3. Методом Зейделя

ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ:

Розв'язати систему рівнянь прямими методами:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР :

1 СПОСІБ. ЧЕРЕЗ ВБУДОВАНУ ФУНКЦІЮ

https://www.tutorialspoint.com/execute_numpy_online.php

Або

<https://onecompiler.com/python/425thaup3>

```
import numpy as np
# коефіцієнти системи
a = np.matrix([
    [4, 0.24, -0.08],
    [0.09, 3, -0.15],
    [0.04, -0.08, 4]
])
# права частина
b = [8, 9, 20]
```

1 спосіб - через функцію

```
x1 = np.linalg.solve(a,b)
print(f'{x1=}')

```

2 СПОСІБ. ЧЕРЕЗ ОБЕРНЕНУ МАТРИЦЮ

2 спосіб - метод оберненої матриці

```
x2 = np.linalg.inv(a).dot(b)
print(f'{x2=}')

```

3 СПОСІБ. МЕТОД КРАМЕРА

Формування матриці з підставленими вільними членами

```
d = np.linalg.det(a)
a1 = np.matrix([
    [8, 0.24, -0.08],
    [9, 3, -0.15],
    [20, -0.08, 4]
])
d1 = np.linalg.det(a1)
print('перший корінь=',d1/d)

```

... другий корінь

... третій корінь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Або задати через цикли алгоритм підстановки елементів у відповідні позиції

Розв'язати рівняння наближеними методами:

- метод простої ітерації:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \quad (7)$$

Зведемо систему до нормального вигляду

Залишимо з одного боку в першому рівнянні x_1 , в другому x_2 , в третьому x_3 , всі інші елементи перенесемо в іншу сторону.

$$\begin{cases} 4x_1 = 8 - 0,24x_2 + 0,08x_3 \\ 3x_2 = 9 - 0,09x_1 + 0,15x_3 \\ 4x_3 = 20 - 0,04x_1 + 0,08x_2 \end{cases}$$

Зробимо біля x_1, x_2, x_3 коефіцієнт одиницю, поділивши кожне з рівнянь на відповідне число. Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}, \quad (8)$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

За нульові наближення коренів системи приймаємо

$$x_1^{(0)} = 2; \quad x_2^{(0)} = 3; \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Підставляємо ці значення в праві частини рівняння (8). Одержимо перші наближення коренів

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92;$$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19;$$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04.$$

Далі знаходимо другі і треті наближення коренів

$$x_1^{(2)} = 1,9094; \quad x_2^{(2)} = 3,1944; \quad x_3^{(2)} = 5,0446,$$

$$x_1^{(3)} = 1,9023; \quad x_2^{(3)} = 3,19495; \quad x_3^{(3)} = 5,04485.$$

Таким чином, $x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}$, $(i = \overline{1, n})$ – метод простої ітерації.

0 наближення	2	3	5
1 наближення	1,92	3,19	5,04
2 наближення	1,9094	3,1944	5,0446
3 наближення	1,90923	3,19495	5,04479
4 наближення	1,909199	3,194963	5,044807

ВИКОНАННЯ

Розпочнемо з перетвореної системи, яка утворилась при переході початкової до нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}$$

Згідно неї задамо початкове нульове наближення

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	0	2	3	5
3	1			
4	2			

Обчислимо перше наближення зі системи (8)

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	0	2	3	5
3	1	$= 2 - 0,06 \cdot C2 + 0,02 \cdot D2$		
4	2			

$$x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3$$

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	0	2	3	5
3	1	1,92	$= 3 - 0,03 \cdot B2 + 0,05 \cdot D2$	
4	2			

$$x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3$$

	A	B	C	D	E
1		x1	x2	x3	
2	0	2	3	5	
3	1	1,92	3,19	=5-0,01*B2+0,02*C2	
4	2				

$$x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2$$

Наступні наближення скопіювати в рядках та обчислити похибки

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	x3				
2	0	2	3	5		похибка для x1	похибка для x2	похибка для x3
3	1	1,92	3,19	5,04		=ABS(B3-B2)		
4	2	1,9094	3,1944	5,0446				
5	3	1,909228	3,194948	5,044794				
6	4	1,909199	3,19496286	5,04480668				

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		x1	x2	x3				
2	0	2	3	5		похибка для x1	похибка для x2	похибка для x3
3	1	1,92	3,19	5,04		0,08	0,19	0,04
4	2	1,9094	3,1944	5,0446		0,0106	0,0044	0,0046
5	3	1,909228	3,194948	5,044794		0,000172	0,000548	0,000194
6								

Для похибки меншої ніж 0,001 необхідно взяти чотири наближення (від 0 до 3)

- метод Зейделя:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \quad (10)$$

Зведемо систему до нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases} \quad (11)$$

Нульове наближення таке ж як при простій ітерації

За нульові наближення коренів системи приймаємо

$$x_1^{(0)} = 2; \quad x_2^{(0)} = 3; \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Підставляємо ці значення в праві частини тільки першого рівняння (11).

Одержимо перше наближення кореня $x_1^{(1)}$

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92;$$

В друге рівняння замість x_1 вже підставимо нове знайдене значення $x_1^{(1)}$, а замість x_3 підставимо значення з нульового наближення $x_3^{(0)}$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 1,92 + 0,05 \cdot 5 = 3,1924;$$

В третє рівняння замість x_1 і x_2 вже підставимо нове знайдені значення $x_1^{(1)}$ і $x_2^{(1)}$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 1,92 + 0,02 \cdot 3,1924 = 5,0446.$$

Далі знаходимо другі і треті наближення коренів

$$x_1^{(2)} = 1,90939; x_2^{(2)} = 3,194951; x_3^{(2)} = 5,04481,$$

0 наближення	2	3	5
1 наближення	1,92	3,1924	5,0446
2 наближення	1,90939	3,194951	5,04481
3 наближення	1,90920	3,19496	5,04481

ВИКОНАННЯ

Розпочнемо з перетвореної системи, яка утворилась при переході початкової до нормального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3 \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3 \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2 \end{cases}$$

Згідно неї задамо початкове нульове наближення так само як в простій ітерації

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	0	2	3	5
3	1			
4	2			

Обчислимо перше наближення

	A	B	C	D
1		x1	x2	x3
2	0	2	3	5
3	1	$= 2 - 0,06 * C2 + 0,02 * D2$		
4	2			

$$x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3$$

Перше наближення для x1 буде таким самим як для простої ітерації

Для x2 вже буде використовуватись перше наближення x1 (нове) та нульову наближення x3 (старе)

		x1	x2	x3
8				
9	0	2	3	5
10	1	1,92	$= 3 - 0,03 * B10 + 0,05 * D9$	
11	2			
12				

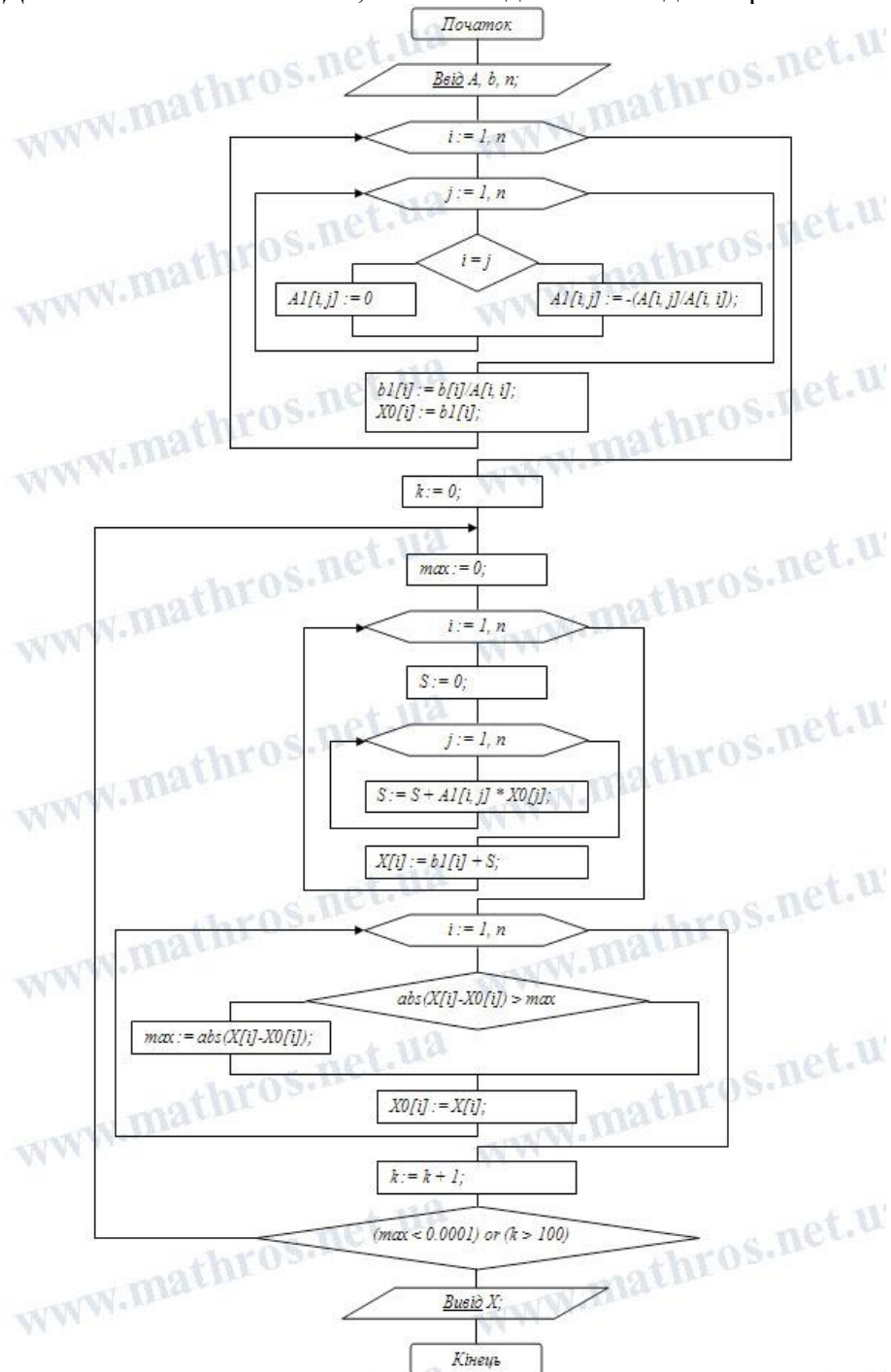
Для x3 вже будуть використовуватись перші наближення x1 (нове) та x2 (нове)

8		x1	x2	x3
9	0	2	3	5
10	1	1,92	=5-0,01* B10 +0,02* C10	
11	2			
12	3			

Похибки обчислюються аналогічно

8		x1	x2	x3			
9	0	2	3	5	похибка для x1	похибка для x2	похибка для x3
10	1	1,92	3,1924	5,044648	0,08	0,1924	0,044648
11	2	1,90934896	3,194951931	5,044805549	0,01065104	0,002551931	0,000157549
12		1,909198995	3,194964308	5,044807296	0,000149965	1,23764E-05	1,74718E-06
13							

Для похибки меншої ніж 0,001 необхідно взяти від чотири наближення



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4
ТЕМА: ІНТЕРПОЛЯЦІЯ. ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ. АПРОКСИМАЦІЯ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	4									
Тема:	Інтерполяція. Екстраполяція. Апроксимація									
Прізвище та ім'я:										
Номер групи:										
Варіант										
Крок 1: Лінійна інтерполяція	діаграма	рівняння								
Крок 2: Квадратична інтерполяція	діаграма	рівняння								
Крок 3: Поліном Лагранжа	діаграма	рівняння								
Збірна всіх типів: зображення										
Крок 4: <u>Апроксимація</u>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">Тип</th> <th style="width: 50%;">Величина достовірності апроксимації R^2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>лінійна</td> <td></td> </tr> <tr> <td>параболічна</td> <td></td> </tr> <tr> <td>кубічна</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Тип	Величина достовірності апроксимації R^2	лінійна		параболічна		кубічна	
Тип	Величина достовірності апроксимації R^2									
лінійна										
параболічна										
кубічна										
Крок 5: Значення функції у заданих точках	Інтерполяція									
	Задані точки									
	Значення функції									
	Екстраполяція									
	Задані точки									
	Значення функції									
Функція Лагранжа	Код або формула									

ЗАВДАННЯ:

Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_n(x)$ для функції $f(x)$, що задана таблицею, та обчислити значення функції у заданих точках.

Варіант	Задана таблиця значень функції					Задані точки			
№1	x_i	-2	-1	0	1	-3	-1,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-7	4	1	2	?	?	?	?
№2	x_i	-1	0	2	3	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-16	-7	-1	20	?	?	?	?
№3	x_i	-2	-1	1	2	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-26	-5	1	10	?	?	?	?
№4	x_i	-1	0	1	2	-0,5	0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-20	-5	6	25	?	?	?	?
№5	x_i	-2	-1	2	3	-1,5	-0,5	1,5	2,5
	$f(x_i)$	-22	-10	-10	-2	?	?	?	?
№6	x_i	-2	0	1	2	-1,5	-0,5	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-11	-3	-11	5	?	?	?	?
№7	x_i	-3	-2	1	3	-1,5	0,5	1,5	2
	$f(x_i)$	-4	19	-8	14	?	?	?	?
№8	x_i	-3	-2	0	2	-4	-1,5	-1	1,5
	$f(x_i)$	-22	-13	-7	23	?	?	?	?
№9	x_i	-2	0	1	2	-1,5	-1	-0,5	1,5
	$f(x_i)$	30	-4	3	18	?	?	?	?
№10	x_i	-1	0	1	5	-0,5	2	3	4,5
	$f(x_i)$	11	4	7	-1	?	?	?	?
№11	x_i	-1	0	1	3	-0,5	1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	1	-8	-3	25	?	?	?	?
№12	x_i	-1	0	1	2	-2	-0,5	0,5	1,5
	$f(x_i)$	5	-11	-3	23	?	?	?	?
№13	x_i	-4	-3	0	1	-2	-0,5	0,5	2
	$f(x_i)$	-7	10	-11	-22	?	?	?	?
№14	x_i	-4	0	3	4	-3	-2	2	3,5
	$f(x_i)$	-15	-11	-8	25	?	?	?	?
№15	x_i	-4	-3	-1	3	-3,5	-2	1,5	2
	$f(x_i)$	-15	5	3	-1	?	?	?	?
№16	x_i	-3	-1	0	2	-2,5	-2	-0,5	1
	$f(x_i)$	5	3	-7	-15	?	?	?	?
№17	x_i	-4	-2	0	3	-3,5	-3	-0,5	2
	$f(x_i)$	-18	8	-6	3	?	?	?	?

№18	x_i	-3	-1	1	2	-4	-2	-1,5	0,5
	$f(x_i)$	3	3	-13	-12	?	?	?	?
№19	x_i	-4	-1	1	2	-3	-2	-0,5	2,5
	$f(x_i)$	-6	3	-11	-6	?	?	?	?
№20	x_i	-3	-2	0	3	-4	-1,5	2	2,5
	$f(x_i)$	9	10	-6	15	?	?	?	?
№21	x_i	-4	-2	1	3	-3	-1	0,5	2,5
	$f(x_i)$	-8	10	-8	20	?	?	?	?
№22	x_i	-3	-1	0	2	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	8	4	-4	-2	?	?	?	?
№23	x_i	-2	0	2	4	-1,5	-1	3	3,5
	$f(x_i)$	-5	1	-9	13	?	?	?	?
№24	x_i	-2	-1	0	3	-1,5	-0,5	1	2
	$f(x_i)$	-4	3	2	11	?	?	?	?
№25	x_i	-3	-2	0	2	-2,5	-1	1,5	3
	$f(x_i)$	-13	3	5	7	?	?	?	?
№26	x_i	-2	0	2	3	-1,5	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	-5	7	11	25	?	?	?	?
№27	x_i	-2	1	2	3	-3	-1	0,5	1,5
	$f(x_i)$	11	-4	-1	26	?	?	?	?
№28	x_i	-3	-1	0	2	-2	-1,5	-0,5	1
	$f(x_i)$	-16	14	5	-1	?	?	?	?
№29	x_i	-4	-2	0	1	-3	-1,5	-1	1,5
	$f(x_i)$	-6	4	-2	4	?	?	?	?
№30	x_i	-3	-2	-1	0	-4	-3,5	0,5	1
	$f(x_i)$	4	4	0	-2	?	?	?	?

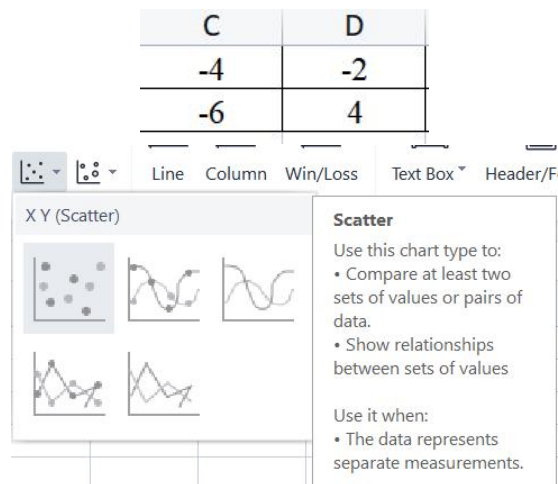
ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ:

Формуємо таблицю даних Вашого варіанту

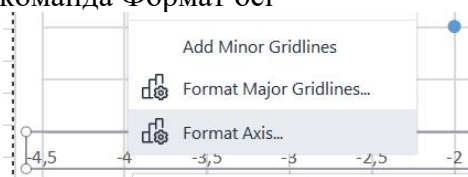
	A	B	C	D	E	F
1	№29	x_i	-4	-2	0	1
2		$f(x_i)$	-6	4	-2	4

КРОК 1: ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

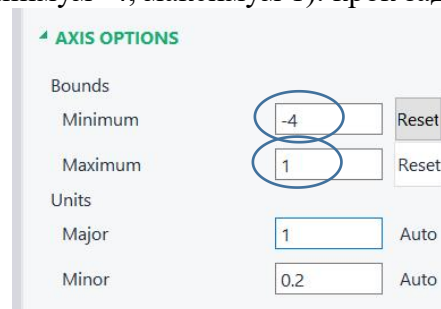
1. Оберіть дві перші точки та побудуйте точковий графік для них



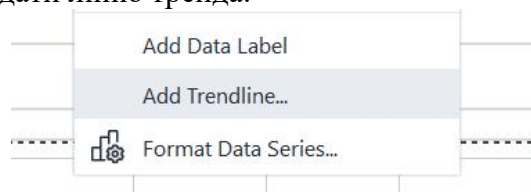
2. Змінити область для осі абсцис: права кнопка на будь-якому числовому значенні з осі абсцис - команда **Формат осі**



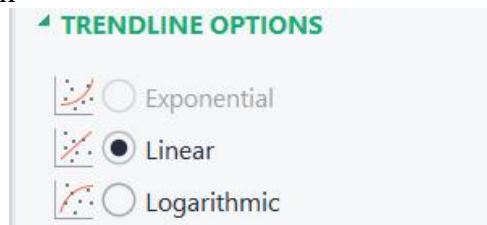
3. Задати мінімальне та максимальне значення для x з усієї Вашої початкової таблиці (у варіанті 29 мінімум -4, максимум 1). крок задайте 1



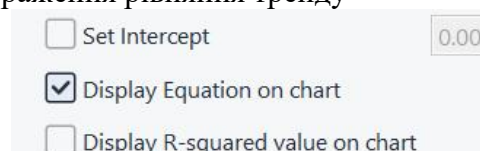
4. У діаграмі показано дві точки даних. Клацнути правою кнопкою на **одній з цих двох точок** і додати лінію тренда.



5. Тип обрати лінійний

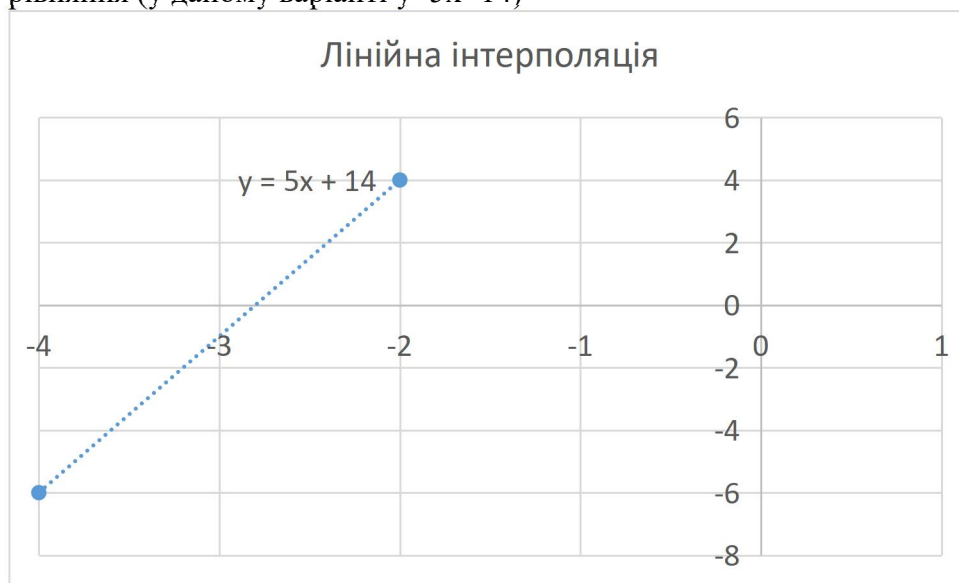


6. Тут же задати відображення рівняння тренду



7. Задати заголовок для діаграми “Лінійна інтерполяція”

8. Діаграму скопіювати в таблицю оформлення результатів та занести туди рівняння (у даному варіанті $y=5x+14$)



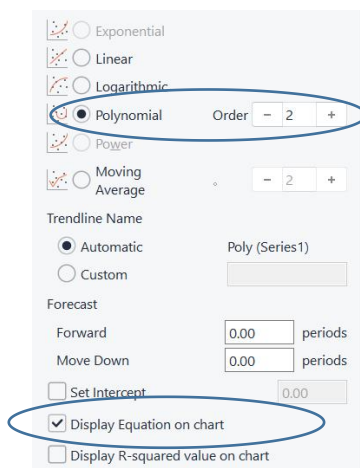
КРОК 2: КВАДРАТИЧНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

9. Обираємо три перші точки та будуємо точковий графік для них

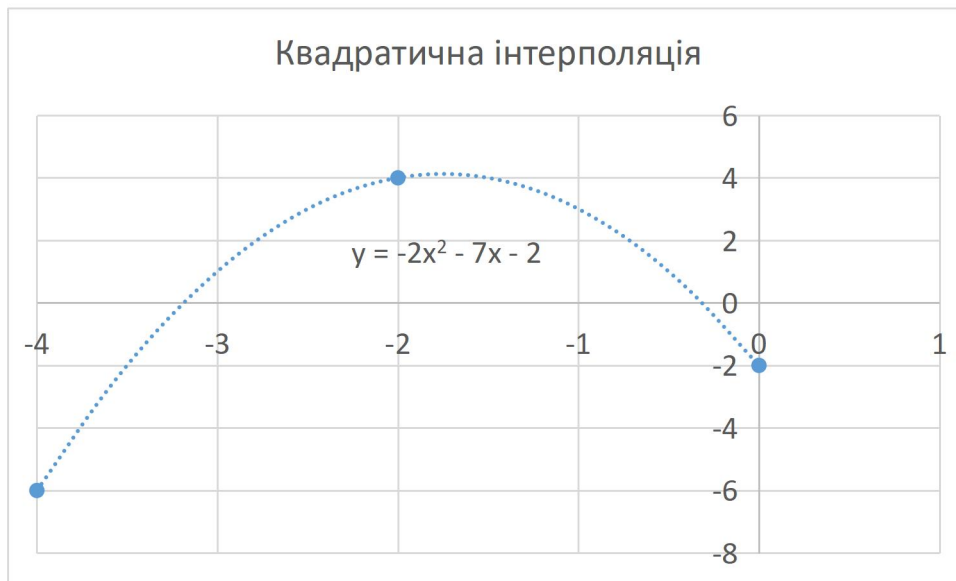
C	D	E
-4	-2	0
-6	4	-2

10. Так само задати мінімальне та максимальне значення для x з Вашої початкової таблиці (у варіанті 29 мінімум -4, максимум 1). крок задайте 1

11. Додати лінію тренда. Задати поліноміальний тип зі степенем 2 і відображення рівняння

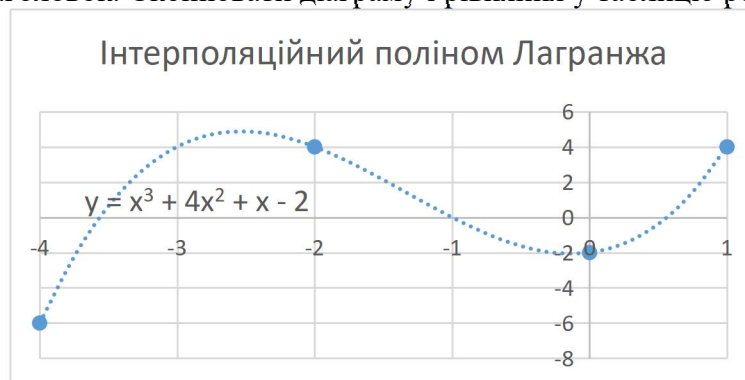


12. Задати заголовок. Скопіювати діаграму і рівняння у таблицю результатів



КРОК 3: ПОЛІНОМ ЛАГРАНЖА

13. Обираємо всі точки та будуємо точковий графік для даних таблиці
14. Так само задати мінімальне та максимальне значення для x з Вашої початкової таблиці (у варіанті 29 мінімум -4, максимум 1). крок задайте 1
15. Додати лінію тренда. Задати поліноміальний зі степенем 3 (кількість точок 4, то степінь має бути 4-1=3) і відображення рівняння
16. Задати заголовок. Скопіювати діаграму і рівняння у таблицю результатів



Збірна всіх типів

https://www.tutorialspoint.com/execute_matplotlib_online.php

<https://www.codabrainy.com/en/python-compiler/>

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.interpolate
```

```
x = [-4, -2, 0, 1]
y = [-6, 4, -2, 4]
plt.plot(x, y, 'o', color='black', markersize=10)
```

```
int = np.linspace(-4, 1, 50)
```

```

y_linear = scipy.interpolate.interp1d (x, y)

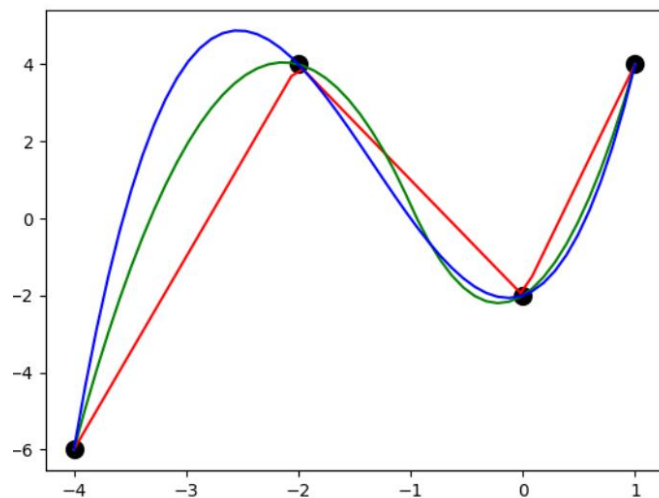
y_quadratic = scipy.interpolate.interp1d (x, y, kind='quadratic')

y_cubic = scipy.interpolate.interp1d (x, y, kind='cubic')

plt.plot (int, y_linear(int), color='red')
plt.plot (int, y_quadratic(int), color='green')
plt.plot (int, y_cubic(int), color='blue')

plt.show()

```



КРОК 4: АПРОКСИМАЦІЯ

	A	B	C	D	E	F
1	№29	x_i	-4	-2	0	1
2		$f(x_i)$	-6	4	-2	4

17. Excel (продовження) Обираємо всі точки та будуємо точковий графік для даних таблиці

18. Так само задати мінімальне та максимальне значення для x з Вашої початкової таблиці (у варіанті 29 мінімум -4, максимум 1). крок задайте 1

19. Додати лінію тренда. Обрати тип лінійний та відображення величини достовірності апроксимації R^2 (наскільки лінія відповідає даним)

☐ Exponential
☒ Linear
☐ Logarithmic
☐ Polynomial
☐ Power
☐ Moving Average

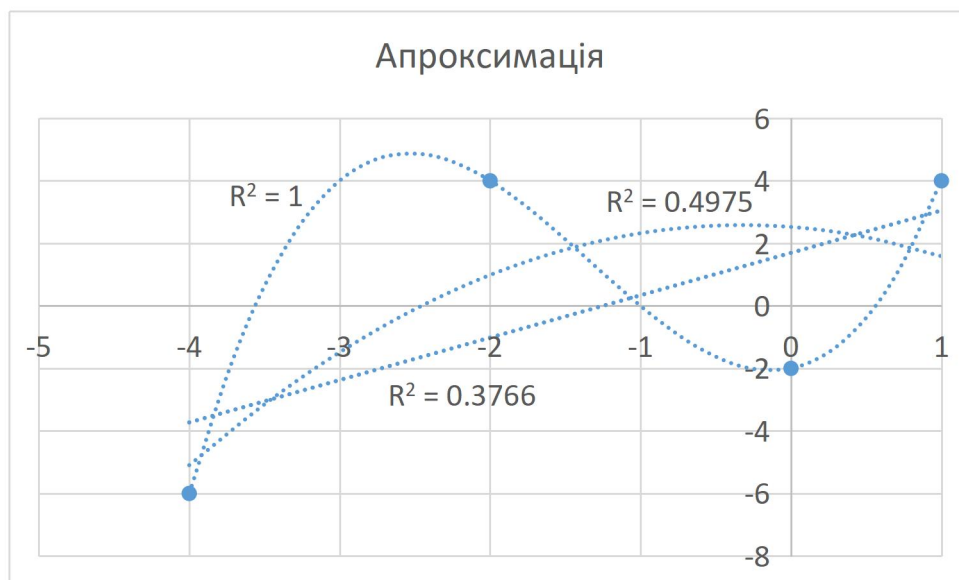
Order: - 2 +

Trendline Name: Automatic (Linear (Series1))

Forecast: Forward 0.00 periods, Move Down 0.00 periods

☐ Set Intercept 0.00
☐ Display Equation on chart
☒ Display R-squared value on chart

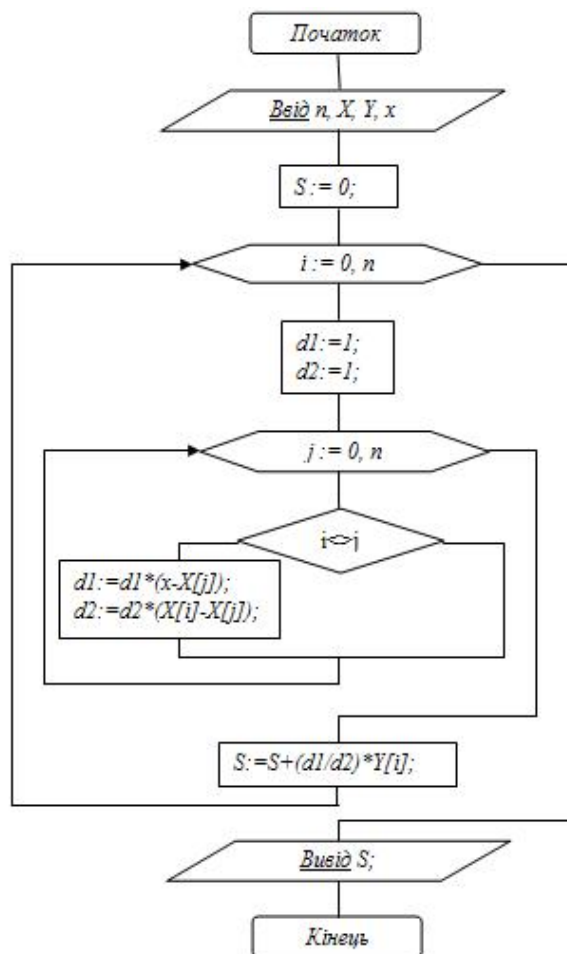
20. Дані R^2 занести в таблицю результатів.
21. Додати лінію тренду та вказати поліноміальний тип зі степенем 2 і величину достовірності апроксимації. Дані R^2 занести в таблицю результатів.
22. Додати лінію тренду та вказати поліноміальний тип зі степенем 3 і величину достовірності апроксимації. Дані R^2 занести в таблицю результатів.



Тип	Величина достовірності апроксимації R^2
лінійна	$R^2=0.3766$
параболічна	$R^2=0.4975$
кубічна	$R^2=1$

Крок 5 Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа $L_n(x)$. Знайти значення функції у заданих точках згідно вашого варіанту

Розв'язання:



Написати програму в будь-якій мові програмування на основі поданої блок-схеми та обчислити значення в точках

-4	-2	0	1	-3	1,5	2	0,5
-6	4	-2	4	?	?	?	?

Наприклад:

$x = [-4, -2, 0, 1]$

$y = [-6, 4, -2, 4]$

$x_0 = \text{float}(\text{input}(\text{'введіть значення'}))$

$s = 0$

for i in range(4):

...

print(f'результат для {x} = {s}')

Розділити точки інтерполяції та екстраполяції.

(Задача екстраполяції - знаходження значення функції для аргументу який знаходиться за межами таблиці визначення функції).

Другий спосіб (перевірка):

Створити програмку, задавши функцію

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

Та підставити значення

Визначити функцію через параметри або задати їх вручну

	A	B	C	D	E	F
1	№29	x_i	-4	-2	0	1
2		$f(x_i)$	-6	4	-2	4

```
def lagrande(x):
```

```
    return (x-(-2))*(x-0)*(x-1)*(-6)/((-4-(-2))*(-4-0)*(-4-1))+(x-(-4))*(x-0)*(x-1)*4/((-2-(-4))*(-2-0)*(-2-1))+(x-(-4))*(x-(-2))*(x-1)*(-2)/((0-(-4))*(0-(-2))*(0-1))+(x-(-4))*(x-(-2))*(x-0)*4/((1-(-4))*(1-(-2))*(1-0))
```

```
print(lagrande(-3))
```

```
print(lagrande(2))
```

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5
ТЕМА: ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ НЬЮТОНА

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	5	
Тема:	Інтерполяційний поліном Ньютона	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Завдання	1 спосіб	За допомогою Excel
	$f(x_1)=$	
	$f(x_2)=$	
	2 спосіб	Програмна реалізація
	$f(x_1)=$	
	$f(x_2)=$	

ЗАВДАННЯ.

Обчислити значення функцій заданих таблично поза та в проміжку інтерполювання за допомогою інтерполяційного полінома Ньютона

Варіант	Задана таблиця значень функції						Задані точки		
							x_1	x_2	
№1	x_i	-2	-1	0	1	2		-2,5	3
	$f(x_i)$	-4	3	2	11	6		?	?
№2	x_i	-3	-2	-1	0	1		-3,5	0,5
	$f(x_i)$	-13	3	5	7	-1		?	?
№3	x_i	-2	0	2	4	6		-0,5	5
	$f(x_i)$	-5	7	11	25	7		?	?
№4	x_i	0	1	2	3	4		0,5	4,5
	$f(x_i)$	11	-4	-1	26	10		?	?
№5	x_i	-3	-1	1	3	5		-2	4
	$f(x_i)$	-16	14	5	-1	3		?	?
№6	x_i	-4	-2	0	2	4		-5	3,5
	$f(x_i)$	-6	4	-2	4	6		?	?
№7	x_i	-3	-2	-1	0	1		-3,5	2
	$f(x_i)$	4	4	0	-2	3		?	?
№8	x_i	-3	-1	1	3	5		-2,5	2,5
	$f(x_i)$	3	3	-13	-12	-5		?	?
№9	x_i	-2	1	4	7	10		-5	9
	$f(x_i)$	-6	3	-11	-6	0		?	?

№10	x_i	-3	-2	-1	0	1		-2,5	1,5
	$f(x_i)$	9	10	-6	15	6		?	?
№11	x_i	-2	-1	0	1	2		-1,5	2,5
	$f(x_i)$	-26	-5	1	10	4		?	?
№12	x_i	-1	0	1	2	3		-1,5	2,5
	$f(x_i)$	-20	-5	6	25	10		?	?
№13	x_i	-2	-1	0	1	2		-1,5	2,5
	$f(x_i)$	-22	-10	-10	-2	2		?	?
№14	x_i	-1	0	1	2	3		-2	3,5
	$f(x_i)$	11	4	7	-1	-4		?	?
№15	x_i	-2	0	2	4	6		-1	6,5
	$f(x_i)$	1	-8	-3	25	13		?	?
№16	x_i	-3	0	3	6	9		-2	7
	$f(x_i)$	5	-11	-3	23	19		?	?
№17	x_i	-4	-3	-2	-1	0		-4,5	1
	$f(x_i)$	-7	10	-11	-22	-4		?	?
№18	x_i	-2	-1	0	1	2		-2,5	1,5
	$f(x_i)$	-7	4	1	2	6		?	?
№19	x_i	-1	0	1	2	3		-1,5	2,5
	$f(x_i)$	-16	-7	-1	20	13		?	?
№20	x_i	-2	0	2	4	6		-0,5	4,5
	$f(x_i)$	-11	-3	-11	5	8		?	?
№21	x_i	-3	-2	-1	0	1		-3,5	2
	$f(x_i)$	-4	19	-8	14	5		?	?
№22	x_i	-3	-2	-1	0	1		-4	1,5
	$f(x_i)$	-22	-13	-7	23	11		?	?
№23	x_i	-2	0	2	4	6		-1,5	7
	$f(x_i)$	30	-4	3	18	7		?	?
№24	x_i	-4	0	4	8	12		-2	13
	$f(x_i)$	-15	-11	-8	25	10		?	?
№25	x_i	-4	-3	-2	-1	0		-2,5	1
	$f(x_i)$	-15	5	3	-1	4		?	?
№26	x_i	-3	-1	1	3	5		-2,5	4
	$f(x_i)$	5	3	-7	-15	-6		?	?
№27	x_i	-4	-2	0	2	4		-3,5	3
	$f(x_i)$	-18	8	-6	3	6		?	?

№28	x_i	-4	-2	0	2	4		-4,5	2,5
	$f(x_i)$	-8	10	-8	20	4		?	?
№29	x_i	-3	-1	1	3	5		-2,5	4
	$f(x_i)$	8	4	-4	-2	6		?	?
№30	x_i	-2	0	2	4	6		-3	5,5
	$f(x_i)$	-5	1	-9	13	10		?	?

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ:

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ НЬЮТОНА

1 СПОСІБ

Нехай дана таблично функція

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x_i	-2	0	2	4	6
3		$f(x_i)$	5	2	-4	3	0
4							
5							

Завдання: знайти значення функції в точці $x=-3$

Якщо знаходиться x **близько до x_0** , до початку проміжку, то використовують *першу інтерполяційну формулу Ньютона*:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де $q = \frac{x-x_0}{h}$, h - крок інтерполювання ($x_{i+1}-x_i$)

1. Задамо крок h (в даному випадку $x_{i+1}-x_i=2$)

2. Обчислимо q для нашого шуканого x : $q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{-3-(-2)}{2} = -0,5$

5		
6	крок $h=$	2
7	$q=(x-x_0)/h$	-0,5
8		

3. Складемо таблицю скінченних різниць:

А) Ввести дані умови не в рядок, а в стовпчик

9	x	y
10	-2	5
11	0	2
12	2	-4
13	4	3
14	6	0

В) Знайдемо скінченну різницю першого порядку

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0; \Delta y_1 = y_2 - y_1; \dots; \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

8				
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
10	-2	5	= B11 - B10	
11	0	2		
12	2	-4		
13	4	3		
14	6	0		
15				

Обчислити стовпчик на одне значення менше ніж кількість точок (в даному випадку 4 клітинки)

8				
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
10	-2	5	-3	
11	0	2	-6	
12	2	-4	7	
13	4	3	-3	
14	6	0		
15				

С) Знайдемо скінченну різницю другого порядку

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; \dots; \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

8					
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	-2	5	-3	= C11 - C10	
11	0	2	-6		
12	2	-4	7		
13	4	3	-3		
14	6	0			
15					

Обчислити стовпчик на одне значення менше ніж кількість точок

D) Так само обчислюємо наступні скінченні різниці

8						
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	-2	5	-3	-3	16 = E11 - E10	
11	0	2	-6	13	-23	
12	2	-4	7	-10		
13	4	3	-3			
14	6	0				
15						

4. Оскільки для шуканого $x=-3$ з двох крайніх точок x_0 та x_4 нам ближче значення x_0 , то в формулі будуть брати участь значення скінченних різниць, що обчислені для y_0 (зелений колір)

8						
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	-2	5	-3	-3	16	-39
11	0	2	-6	13	-23	
12	2	-4	7	-10		
13	4	3	-3			
14	6	0				
15						

5. Формула матиме вигляд

$$P(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

Знайдемо ці п'ять доданків:

- перший y_0

15		
16	Перша формула	= B10
17	Ньютона	
18		

- другий $q\Delta y_0$

5				
6	крок h=	2		
7	q=(x-xn)/h	-0,5		
8				
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
10	-2	5	-3	-3
11	0	2	-6	13
12	2	-4	7	-10
13	4	3	-3	
14	6	0		
15				
16	Перша формула	5	= B7 * C10	
17	Ньютона			
18				
19				

- третій $\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

6	крок h=	2			
7	q=(x-xn)/h	-0,5			
8					
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	-2	5	-3	-3	16
11	0	2	-6	13	-23
12	2	-4	7	-10	
13	4	3	-3		
14	6	0			
15					
16	Перша формула	5	1,5	= B7*(B7-1)* D10/FACT(2)	
17	Ньютона				
18					

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

Та наступні

5						
6	крок h=	2				
7	q=(x-xn)/h	-0,5				
8						
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	-2	5	-3	-3	16	-39
11	0	2	-6	13	-23	
12	2	-4	7	-10		
13	4	3	-3			
14	6	0				
15						
16	Перша формула	5	1,5	-1,125	= B7*(B7-1)*(B7-2)* E10/FACT(3)	
17	Ньютона					

5						
6	крок h=	2				
7	q=(x-xn)/h	-0,5				
8						
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	-2	5	-3	-3	16	-39
11	0	2	-6	13	-23	
12	2	-4	7	-10		
13	4	3	-3			
14	6	0				
15						
16	Перша формула	5	1,5	-1,125	-5	= B7*(B7-1)*(B7-2)*(B7-3)* F10/FACT(4)
17	Ньютона					

Обчислені значення просумуємо

16	Перша формула	5	1,5	-1,125	-5	-10,6640625	=	-10,2890625
17	Ньютона							

Відповідь заносимо в таблицю результатів.

Завдання: знайти значення функції в точці $x=5,5$

Якщо значення x знаходиться **близько біля x_n** , то будують *другу інтерполяційну формулу Ньютона*, що має вигляд:

$$P_n(x) = y_n + q \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} + q(q+1) \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} + \dots + q(q+1) \cdot \dots \cdot (q+n-1) \frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

де $q = \frac{x - x_n}{h}$, h - крок інтерполювання ($x_{i+1} - x_i$)

6. Задамо крок h (в даному випадку $x_{i+1} - x_i = 2$) (- крок не змінився)

7. Обчислимо q для нашого шуканого x : $q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{5,5 - 6}{2} = -0,25$

8. Таблиця скінченних різниць буде така сама:

8						
9	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
10	-2	5	-3	-3	16	-39
11	0	2	-6	13	-23	
12	2	-4	7	-10		
13	4	3	-3			
14	6	0				

9. Друга інтерполяційна формула Ньютона для даного випадку набуде вигляду

$$P(x) = y_4 + q \Delta y_3 + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_2 + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_1 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} \Delta^4 y_0$$

10. Отже для обчислень необхідно з таблиці скінченних різниць обрати останні значення в стовпцях (синій колір)

35						
36	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
37	-2	5	-3	-3	16	-39
38	0	2	-6	13	-23	
39	2	-4	7	-10		
40	4	3	-3			
41	6	0				

Обчислимо доданки:

- перший y_4

36	x	y	Δy
37	-2	5	-3
38	0	2	-6
39	2	-4	7
40	4	3	-3
41	6	0	
42			
43	Друга формула	= B41	
44	Ньютона		

- другий $q \Delta y_3$

32				
33	крок h=	2		
34	q=(x-xn)/h	-0,25		
35				
36	x	y	Δy	Δ ² y
37	-2	5	-3	
38	0	2	-6	
39	2	-4	7	
40	4	3	-3	
41	6	0		
42				
43	Друга формула	0	= B34 * C40	
44	Ньютона			
45				

Наступні $\frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y_2$ $\frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y_1$ $\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} \Delta^4 y_0$:

32						
33	крок h=	2				
34	q=(x-xn)/h	-0,25				
35						
36	x	y	Δy	Δ ² y	Δ ³ y	Δ ⁴ y
37	-2	5	-3	-3	16	-39
38	0	2	-6	13	-23	
39	2	-4	7	-10		
40	4	3	-3			
41	6	0				
42						
43	Друга формула	0	0,75	= B34 * (B34+1) * D39 / FACT(2)		
44	Ньютона					

32						
33	крок h=	2				
34	q=(x-xn)/h	-0,25				
35						
36	x	y	Δy	Δ ² y	Δ ³ y	Δ ⁴ y
37	-2	5	-3	-3	16	-39
38	0	2	-6	13	-23	
39	2	-4	7	-10		
40	4	3	-3			
41	6	0				
42						
43	Друга формула	0	0,75	0,9375	= B34 * (B34+1) * (B34+2) * E38 / FACT(3)	
44	Ньютона					

32						
33	крок h=	2				
34	q=(x-xn)/h	-0,25				
35						
36	x	y	Δy	Δ ² y	Δ ³ y	Δ ⁴ y
37	-2	5	-3	-3	16	-39
38	0	2	-6	13	-23	
39	2	-4	7	-10		
40	4	3	-3			
41	6	0				
42						
43	Друга формула	0	0,75	0,9375	1,2578125	= B34 * (B34+1) * (B34+2) * (B34+3) * F37 / FACT(4)
44	Ньютона					

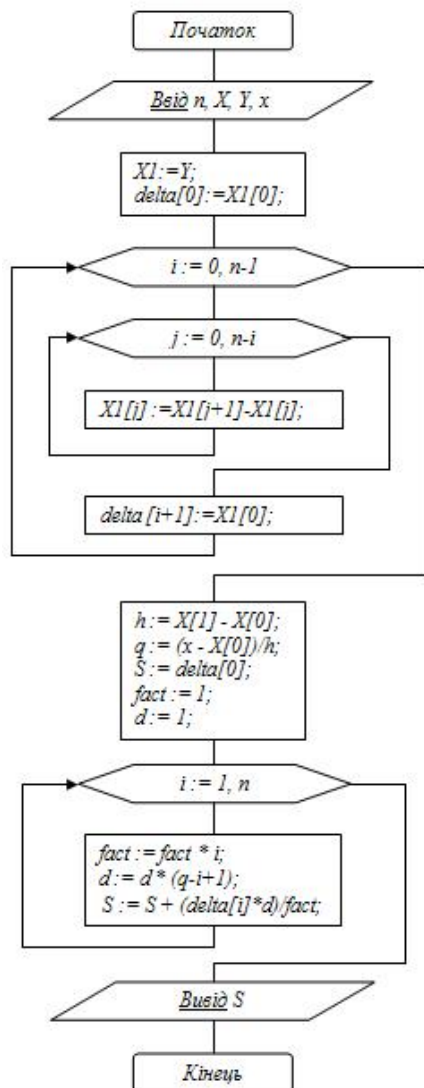
Додамо отримані доданки

42								
43	Друга формула	0	0,75	0,9375	1,2578125	1,466308594	=	4,411621094
44	Ньютона							

Відповідь заносимо в таблицю результатів

2 СПОСІБ

Перевірити отриманні результати через програмну реалізацію:
https://www.tutorialspoint.com/execute_numpy_online.php



X = [-2, 0, 2, 4, 6]

Y = [5, 2, -4, 3, 0]

x = -3

n = 5

X1 = Y.copy()

delta = [0]*5

delta[0]=X1[0]

for i in range(n-1):

 for j in range(n-1-i):

 ...

print(f"Результат для точки {x} = {S}")

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6
ТЕМА: ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	6	
Тема:	ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Частина 1. Формула Лагранжа	$L'(x) =$	
	$L''(x) =$	
Частина 2. Формула Ньютона		
	$x_1 =$	$x_2 =$
	$f'(x_1) =$	$f'(x_2) =$
	$f''(x_1) =$	$f''(x_2) =$

ЗАВДАННЯ:

Для функцій, що задані таблично, обчислити похідну **першого** та **другого** порядку в точках, використовуючи інтерполяційні поліноми Ньютона та Лагранжа.

Частина 1. Формула Лагранжа

Знайдемо першу та другу похідні функції, заданої таблично, в точці $x=6+n$, використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа.

x	$3+n$	$5+n$	$7+n$	$9+n$
y	$2*n$	15	$3*n$	$n+10$

n - номер варіанту

Частина 2. Формула Ньютона

Знайдемо першу та другу похідні функції, заданої таблично, в точках, використовуючи інтерполяційний поліном Ньютона.

		x_1	x_2
Варіант 1	Таблиця 1	0.116	0.133
Варіант 2	Таблиця 1	0.114	0.136
Варіант 3	Таблиця 1	0.117	0.137
Варіант 4	Таблиця 1	0.119	0.134
Варіант 5	Таблиця 1	0.113	0.132
Варіант 6	Таблиця 1	0.118	0.131
Варіант 7	Таблиця 1	0.112	0.137
Варіант 8	Таблиця 1	0.116	0.132
Варіант 9	Таблиця 1	0.119	0.136
Варіант 10	Таблиця 1	0.113	0.131

Таблиця 1.

x_i	0.115	0.120	0.125	0.130	0.135
y_i	$8.65729 + n/2$	8.29329	7.95829	7.64893	$7.36235 - n/3$

		x_1	x_2
Варіант 11	Таблиця 2	0.151	0.173
Варіант 12	Таблиця 2	0.152	0.166
Варіант 13	Таблиця 2	0.149	0.167
Варіант 14	Таблиця 2	0.148	0.174
Варіант 15	Таблиця 2	0.153	0.172
Варіант 16	Таблиця 2	0.148	0.171
Варіант 17	Таблиця 2	0.152	0.167
Варіант 18	Таблиця 2	0.146	0.172
Варіант 19	Таблиця 2	0.149	0.166
Варіант 20	Таблиця 2	0.153	0.171

Таблиця 2.

x_i	0.150	0.155	0.160	0.165	0.170
y_i	6.61659	$6.39989 + n/2$	6.19658	$6.00551 + n/3$	5.82558

		x_1	x_2
Варіант 21	Таблиця 3	2.44	3.19
Варіант 22	Таблиця 3	2.39	3.21
Варіант 23	Таблиця 3	2.41	3.25
Варіант 24	Таблиця 3	2.45	3.18
Варіант 25	Таблиця 3	2.38	3.235
Варіант 26	Таблиця 3	2.391	3.185
Варіант 27	Таблиця 3	2.47	3.15
Варіант 28	Таблиця 3	2.46	3.27
Варіант 29	Таблиця 3	2.37	3.14
Варіант 30	Таблиця 3	2.36	3.24

Таблиця 3.

x_i	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
y_i	3.526	3.782	$3.945 + n/3$	4.043	$4.104 + n/2$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ:

Частина 1. Наближене диференціювання, що ґрунтується на інтерполяційному поліномі Лагранжа.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай таблиця має вигляд

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	3	5	7	9
y	0	15	0	10
	y_0	y_1	y_2	y_3

Точка, в якій шукаємо похідну $x=6$

1. Обчислимо крок $x_{i+1} - x_i = h$. В даному випадку $h=2$
2. Обчислимо q :

$$\frac{x - x_0}{h} = q$$

$$q = (6-3)/2 = 1.5$$

3. Використаємо формули похідних першого та другого порядку для формули полінома Лагранжа

$$L'_3(x) = \frac{1}{h} \left(-\frac{q^2 - 4q + 4}{2} y_0 + \frac{3q^2 - 10q + 6}{2} y_1 - \frac{3q^2 - 8q + 3}{2} y_2 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{2} y_3 \right).$$

$$L''_3(x) = \frac{1}{h^2} ((2 - q)y_0 + (3q - 5)y_1 - (3q - 4)y_2 + 3(q - 1)y_3)$$

На будь-якій мові програмування записати код обчислення значення двох функцій згідно вказаних вище формул та значень зі свого варіанту.

Записати отримані результати в таблицю

Частина 2. Наближене диференціювання, що ґрунтується на інтерполяційному поліномі Ньютона

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для наближеного обчислення похідної в точці, що розташована ближче до початку проміжку, краще скористатися першою інтерполяційною формулою Ньютона.

11. Введемо табличні дані

	A	B	C	D	E	F
1	Обчислення для x=	0,13				
2						
3		x0	x1	x2	x3	x4
4		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
5		y0	y1	y2	y3	y4
6		2,26	2,28	2,29	2,31	2,32
7						

Для $x=0,13$

Скористаємось першою формулою Ньютона.

12. Задамо крок h (в даному випадку $x_{i+1} - x_i = 0,1$)

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,13 - 0,1}{0,1} = 0,3$$

13. Обчислимо q для нашого шуканого x :

7		
8	крок h=	0,1
9	$q=(x-x_0)/h$	0,3
10		

14. Складемо таблицю скінченних різниць:

Е) Ввести y_i у стовпчик

15. Оскільки для шуканого $x=0,13$ з двох крайніх точок x_0 та x_4 нам ближче значення x_0 , то в формулі будуть брати участь значення, що обчислені в скінченних різницях для y_0

	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
y_0	2,26	0,02	-0,01	0,02	-0,04
y_1	2,28	0,01	0,01	-0,02	
y_2	2,29	0,02	-0,01		
y_3	2,31	0,01			
y_4	2,32				

$\Delta y_0=0,02,$ $\Delta^2 y_0=-0,01,$ $\Delta^3 y_0=0,02,$ $\Delta^4 y_0=-0,04$

Скористаємось першою формулою Ньютона.

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 \right].$$

16. Створимо чотири доданки для формули:

11					
12		y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
13	y_0	2,26	0,02	-0,01	0,02
14	y_1	2,28	0,01	0,01	-0,02
15	y_2	2,29	0,02	-0,01	
16	y_3	2,31	0,01		
17	y_4	2,32			
18					
19					
20	Перша формула	=C13			
21	Ньютона				

17. Другий доданок

8	крок h=	0,1		
9	$q=(x-x_0)/h$	0,3		
10				
11				
12		y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
13	y_0	2,26	0,02	-0,01
14	y_1	2,28	0,01	0,01
15	y_2	2,29	0,02	-0,01
16	y_3	2,31	0,01	
17	y_4	2,32		
18				
19				
20	Перша формула	0,02 =(2*B9-1)*D13/2		
21	Ньютона			

18. Та наступні:

8	крок h=	0,1			
9	q=(x-x0)/h	0,3			
10					
11					
12	yi	Δyi	Δ2yi	Δ3yi	Δ4yi
13	y0	2,26	0,02	-0,01	0,02
14	y1	2,28	0,01	0,01	-0,02
15	y2	2,29	0,02	-0,01	
16	y3	2,31	0,01		
17	y4	2,32			
18					
19					
20	Перша формула	0,02	0,002	=(3*B9^2-6*B9+2)*E13/6	
21	Ньютона				

8	крок h=	0,1			
9	q=(x-x0)/h	0,3			
10					
11					
12	yi	Δyi	Δ2yi	Δ3yi	Δ4yi
13	y0	2,26	0,02	-0,01	0,02
14	y1	2,28	0,01	0,01	-0,02
15	y2	2,29	0,02	-0,01	
16	y3	2,31	0,01		
17	y4	2,32			
18					
19					
20	Перша формула	0,02	0,002	0,001566667	=(2*B9^3-9*B9^2+11*B9-3)*F13/12
21	Ньютона				

Скористаємось першою формулою Ньютона.

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 \right]$$

19. Залишалось просумувати та поділити на h

19						
20	Перша формула	0,02	0,002	0,001566667	0,00152	=SUM(C20:F20)/B8
21	Ньютона					SUM(Number1; ...)
22						

Відповідь занесемо в таблицю:

0,250866667

20. Знайдемо другу похідну

8	крок h=	0,1			
9	q=(x-x0)/h	0,3			
10					
11					
12	yi	Δyi	Δ2yi	Δ3yi	Δ4yi
13	y0	2,26	0,02	-0,01	0,02
14	y1	2,28	0,01	0,01	-0,02
15	y2	2,29	0,02	-0,01	
16	y3	2,31	0,01		
17	y4	2,32			
18					
19					
20	Перша формула	0,02	0,002	0,001566667	=(2*B9^3-9*B9^2+11*B9-3)*F13/12
21	Ньютона				

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + (q-1) \Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12} \Delta^4 y_0 \right]$$

Друга похідна	-0,01	-0,014	-0,020466667	=	-4,446666667
---------------	-------	--------	--------------	---	--------------

21. Доданки сумуємо та ділимо на h²

Для $x=0,47$

Для наближеного обчислення похідної в точці, що розташована ближче до кінця проміжку, краще скористатися другою інтерполяційною формулою Ньютона.

22. Задамо крок h (в даному випадку $x_{i+1}-x_i=0,1$)

23. Обчислимо q для нашого шуканого x (наше x ближче до іншої крайньої точки):

Перерахувати q

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,47 - 0,5}{0,1} = -0,3$$

24. Скористаємося обчисленими значеннями скінченних різниць, тільки оберемо останні значення з кожного стовпця (зелений колір)

	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
y_0	2,26	0,02	-0,01	0,02	-0,04
y_1	2,28	0,01	0,01	-0,02	
y_2	2,29	0,02	-0,01		
y_3	2,31	0,01			
y_4	2,32				

$$\Delta y_3 = 0,01, \quad \Delta^2 y_2 = -0,01, \quad \Delta^3 y_1 = -0,02, \quad \Delta^4 y_0 = -0,04,$$

Скористаємось другою формулою Ньютона.

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta y_3 + \frac{2q+1}{2} \Delta^2 y_2 + \frac{3q^2+6q+2}{6} \Delta^3 y_1 + \frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12} \Delta^4 y_0 \right]$$

25. Доданки сумуємо та ділимо на h

Друга формула Ньютона (похідна)	0,01	-0,002	-0,001566667	-0,00152	=	0,049133333
---------------------------------	------	--------	--------------	----------	---	-------------

Шукаємо другу похідну

	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
y_0	2,26	0,02	-0,01	0,02	-0,04
y_1	2,28	0,01	0,01	-0,02	
y_2	2,29	0,02	-0,01		
y_3	2,31	0,01			
y_4	2,32				

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_2 + (q+1) \Delta^3 y_1 + \frac{6q^2+18q+11}{12} \Delta^4 y_0 \right]$$

Сумуємо доданки та ділимо на h^2

Друга похідна	-0,01	-0,014	-0,020466667	=	-4,446666667
---------------	-------	--------	--------------	---	--------------

Відповіді заносимо в таблицю

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7
ТЕМА: ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	7	
Тема:	Числове інтегрування	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Завдання	Частина 1. Метод прямокутників	
	<i>Графік</i>	
	<i>Код для побудови графіку</i>	
	Обчислення	1 спосіб
за формулою лівих прямокутників =		
	Код програми	
за формулою правих прямокутників =		
	Код програми	
за формулою середніх прямокутників =		
	Код програми	
	Частина 2. Метод Сімпсона	
	<i>Графік</i>	
	Обчислення	1 спосіб
за формулою =		
	Код програми	
	Частина 3. Метод трапецій	
	<i>Графік</i>	
	Обчислення	1 спосіб
за формулою =		
	Код програми	

ЗАВДАННЯ:

з точністю до 0.0001 обчислити значення визначених інтегралів:

1) методом прямокутників за умови $n=10$;

- 2) методом Сімпсона за умови $n=8$;
 3) методом трапецій за умови $n=20$.

№1.	1) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$	2) $\int_{1.2}^2 \frac{\lg(x+2)}{x} dx$	3) $\int_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2.3}}$
№2.	1) $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3.2}}$	2) $\int_{1.6}^{2.4} (x+1) \sin x dx$	3) $\int_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$
№3.	1) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1.3}}$	2) $\int_{0.2}^1 \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2 + 1} dx$	3) $\int_{0.15}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1.6}}$
№4.	1) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$	2) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1} dx$	3) $\int_{1.4}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{1.5x^2 + 0.7}}$
№5.	1) $\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$	2) $\int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x} \cos(x^2) dx$	3) $\int_{1.3}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 0.4}}$
№6.	1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+2}}$	2) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$	3) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x^2 + 0.5}}$
№7.	1) $\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x-1}}$	2) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x} dx$	3) $\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2+1}}$
№8.	1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x+0.5}}$	2) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2} dx$	3) $\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$
№9.	1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	2) $\int_{0.4}^{1.2} (2x+0.5) \sin x dx$	3) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1.5}}$
№10.	1) $\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$	2) $\int_{0.4}^{0.8} \frac{\operatorname{tg}(x^2+0.5)}{1+2x^2} dx$	3) $\int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$
№11.	1) $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$	2) $\int_{0.18}^{0.98} \frac{\sin x}{x+1} dx$	3) $\int_{3.2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2+1}}$
№12.	1) $\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$	2) $\int_{0.2}^{1.8} \sqrt{x+1} \cos(x^2) dx$	3) $\int_{1.4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.7}}$
№13.	1) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+2}}$	2) $\int_{1.4}^3 x^2 \lg x dx$	3) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$
№14.	1) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$	2) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{\lg(x^2+2)}{x+1} dx$	3) $\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$
№15.	1) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$	2) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos(x^2)}{x+1} dx$	3) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$

№16. 1) $\int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x+2.5}}$	2) $\int_{1.3}^{2.1} (x^2+1)\sin(x-0.5)dx$	3) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$
№17. 1) $\int_{3.2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0.5x+1}}$	2) $\int_{0.6}^{1.4} x^2 \cos x dx$	3) $\int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$
№18. 1) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{0.5x+1.5}}$	2) $\int_{1.2}^2 \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$	3) $\int_{1.2}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$
№19. 1) $\int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x+1}}$	2) $\int_{2.5}^{3.3} \frac{\lg(x^2+0.8)}{x-1} dx$	3) $\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$
№20. 1) $\int_{0.15}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{2x+1.6}}$	2) $\int_{0.5}^{1.2} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x+1} dx$	3) $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
№21. 1) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{12x+0.5}}$	2) $\int_{1.3}^{2.1} \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$	3) $\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$
№22. 1) $\int_{1.3}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x-0.4}}$	2) $\int_{0.2}^1 (x+1)\cos(x^2)dx$	3) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$
№23. 1) $\int_{1.4}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{1.5x+0.2}}$	2) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(x^2-0.4)}{x+2} dx$	3) $\int_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$
№24. 1) $\int_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{0.5x+4}}$	2) $\int_{0.15}^{0.63} \sqrt{x+1} \lg(x+3)dx$	3) $\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$
№25. 1) $\int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x+0.8}}$	2) $\int_{1.2}^{2.8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1} dx$	3) $\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$
№26. 1) $\int_{1.2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1.2}}$	2) $\int_{0.6}^{0.72} (\sqrt{x}+1)\operatorname{tg} 2x dx$	3) $\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$
№27. 1) $\int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$	2) $\int_{0.8}^{1.2} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$	3) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
№28. 1) $\int_{0.5}^{2.3} \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$	2) $\int_{1.2}^{2.8} (\frac{x}{2}+1)\sin \frac{x}{2} dx$	3) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$
№29. 1) $\int_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x+2.5}}$	2) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx$	3) $\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$
№30. 1) $\int_{0.32}^{0.66} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.3}}$	2) $\int_{1.6}^{3.2} \frac{x}{2} \lg(\frac{x^2}{2}) dx$	3) $\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Частина 1. Метод прямокутників

Завдання: 1) з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу

$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x+1.2} dx$ за формулами лівих, правих та середніх прямокутників за умови $n=10$.

Побудова криволінійної фігури для функції $\sqrt{0.3x+1.2}$ на проміжку $[1.5; 2.3]$

https://www.tutorialspoint.com/execute_matplotlib_online.php

<https://www.codabrainy.com/en/python-compiler/>

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
x = np.arange(1.5, 2.3, 0.01)
y = np.sqrt(0.3*x + 1.2)
plt.title('Обчислення площі фігури під графіком функції')
plt.plot(x, y)
plt.fill_between(x, y, 0)
plt.show()
```

Обчислення:

1. Спосіб (методи лівих та правих прямокутників)

Для обчислення інтегралу методом прямокутників за умови $n=10$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.5; 2.3]$ на 10 рівних частин з кроком

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.3-1.5}{10} = 0.08.$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	$\sqrt{0.3x_i + 1.2} = y_i$
0	1.5	1.2845
1	1.58	1.2938
2	1.66	1.3031
3	1.74	1.3122
4	1.82	1.3214
5	1.90	1.3304
6	1.98	1.3394
7	2.06	1.3483
8	2.14	1.3572
9	2.22	1.3660
10	2.30	1.3748

За формулою лівих прямокутників: $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^9 y_i$. (від першого

значення до передостаннього)

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2845 + 1.2938 + 1.3031 + 1.3122 + 1.3214 + 1.3304 + 1.3394 + 1.3483 + 1.3572 + 1.3660) \approx 0.08 \cdot 13.2563 \approx 1.060504 .$$

За формулою правих прямокутників: $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{10} y_i$. (від другого

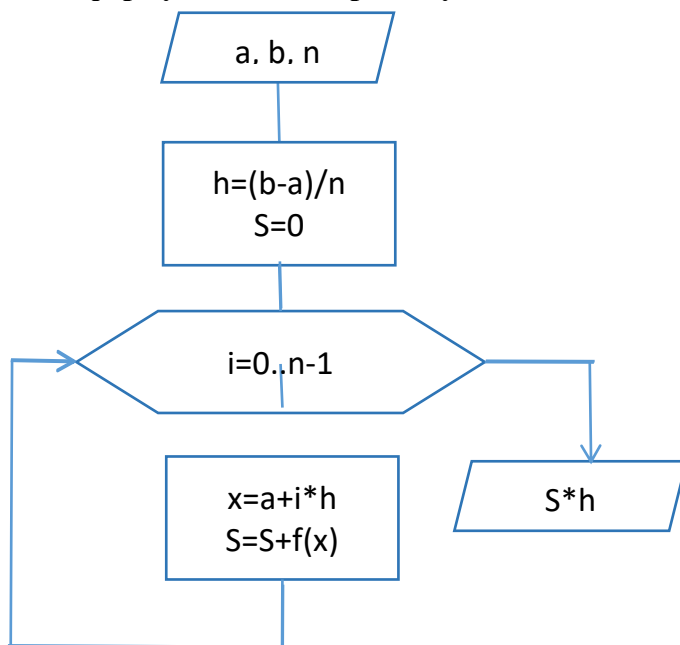
значення до останнього)

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2938 + 1.3031 + 1.3122 + 1.3214 + 1.3304 + 1.3394 + 1.3483 + 1.3572 + 1.3660 + 1.3748) \approx 0.08 \cdot 13.3466 \approx 1.067728$$

Спосіб

За формулою лівих прямокутників:



```
from math import sqrt
a = 1.5
b = 2.3
n = 10
h = (b-a)/n
S = 0
def f(x):
    return sqrt(0.3*x + 1.2)
for i in range(n):
    x = a+i*h
    S += f(x)
print('S=', S*h)
```

1. Спосіб (метод середніх прямокутників)

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в середніх точках відрізків ділення:

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i = f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	1.5	1.54	1.2892
1	1.58	1.62	1.2985
2	1.66	1.70	1.3077
3	1.74	1.78	1.3168
4	1.82	1.86	1.3259
5	1.90	1.94	1.3349
6	1.98	2.02	1.3439
7	2.06	2.10	1.3528
8	2.14	2.18	1.3616
9	2.22	2.26	1.3704
10	2.30		

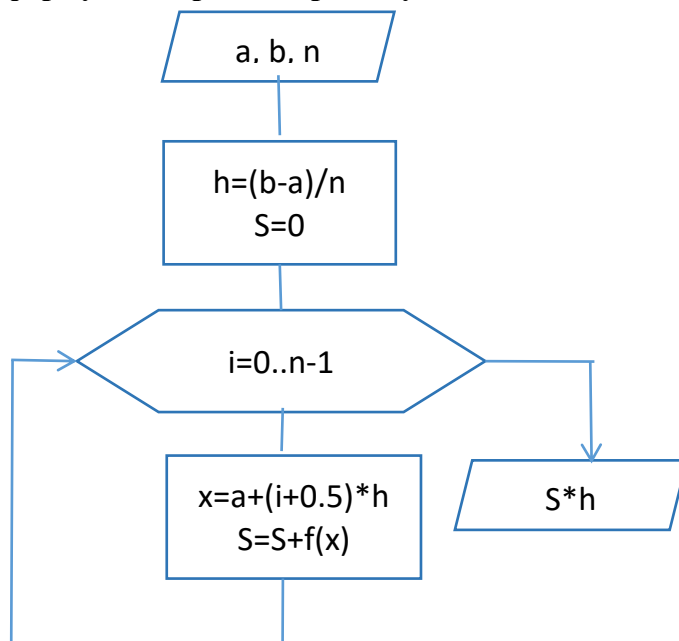
За формулою середніх прямокутників $\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^9 f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$.

Отже

$$\int_{1.5}^{2.3} \sqrt{0.3x + 1.2} dx \approx 0.08(1.2892 + 1.2985 + 1.3077 + 1.3168 + 1.3259 + 1.3349 + 1.3439 + 1.3528 + 1.3616 + 1.3704) \approx 0.08 \cdot 13.3017 \approx 1.064136.$$

2. Спосіб

За формулою середніх прямокутників



Частина 2. Метод Сімпсона

Завдання: з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного

інтегралу $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx$ методом Сімпсона за умови $n=8$.

Побудова криволінійної фігури для $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(1.2, 1.6, 0.01)
y = np.sin(2*x-2.1)/(x**2+1)
plt.title('Обчислення площі фігури під графіком функції')
plt.plot(x, y)
plt.fill_between(x, y, 0)
plt.show()
```

Для графіків

sin	np.sin
tg	np.tan
ln	np.log
lg	np.log10
cos	np.cos

1 спосіб.

Розв'язання:

Для обчислення інтеграла методом Сімпсона за умови $n = 8$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[1.2; 1.6]$ на 8 рівних частин з кроком

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.6-1.2}{8} = 0.05.$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1.20	0.1211		
1	1.25		0.1520	
2	1.30			0.1782
3	1.35		0.2000	
4	1.40			0.2176
5	1.45		0.2312	
6	1.50			0.2410
7	1.55		0.2473	
8	1.60	0.2503		
Σ		0.3713	0.8305	0.6368

Обчислення проводитимемо за формулою

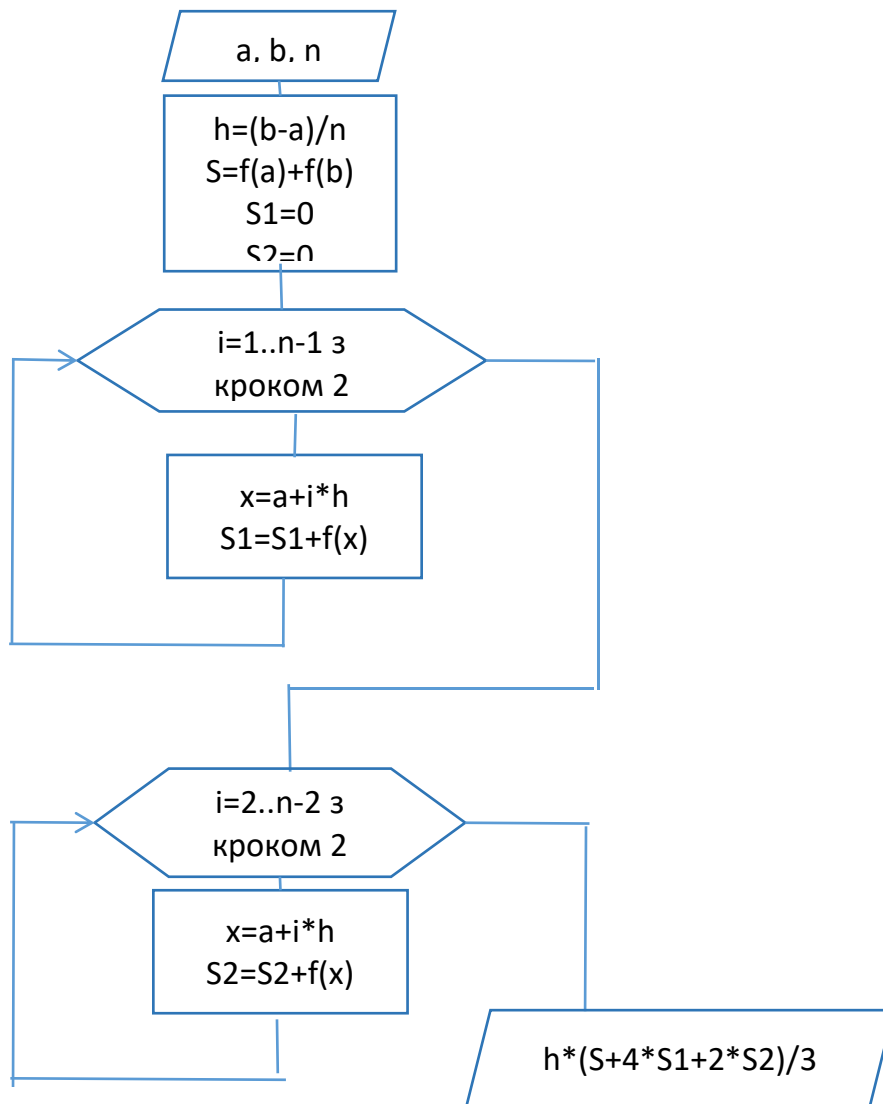
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8].$$

Отже:

$$\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx \approx \frac{0.05}{3} (0.3714 + 4 \cdot 0.8305 + 2 \cdot 0.6368) \approx \frac{0.05}{3} \cdot 4.9670 \approx 0.08278$$

Відповідь: $\int_{1.2}^{1.6} \frac{\sin(2x - 2.1)}{x^2 + 1} dx \approx 0.0828.$

2 спосіб:



Частина 3.

Завдання: з точністю до 0.0001 обчислити значення визначеного інтегралу $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$ методом трапецій за умови $n=20$.

Побудова криволінійної фігури для $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
x = np.arange(0.7, 1.3, 0.01)
y = 1/np.sqrt(2*x**2+0.3)
plt.title('Обчислення площі фігури під графіком функції')
plt.plot(x, y)
plt.fill_between(x, y, 0)
plt.show()
```

1 Спосіб (метод трапецій)

Для обчислення інтеграла методом трапецій за умови $n = 20$ розіб'ємо відрізок інтегрування $[0.7; 1.3]$ на 20 рівних частин з кроком

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.3-0.7}{20} = 0.03.$$

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках ділення відрізка:

i	x_i	y_i		i	x_i	y_i
0	0.7	0.88386		11	1.03	0.64259
1	0.73	0.85572		12	1.06	0.62657
2	0.76	0.82898		13	1.09	0.61140
3	0.79	0.80366		14	1.12	0.59669
4	0.82	0.77973		15	1.15	0.58272
5	0.85	0.75700		16	1.18	0.56935
6	0.88	0.73546		17	1.21	0.55658
7	0.91	0.71501		18	1.24	0.54431
8	0.94	0.69551		19	1.27	0.53253
9	0.97	0.67700		20	1.30	0.52129
10	1.00	0.65937				

Обчислення проводитимемо за формулою

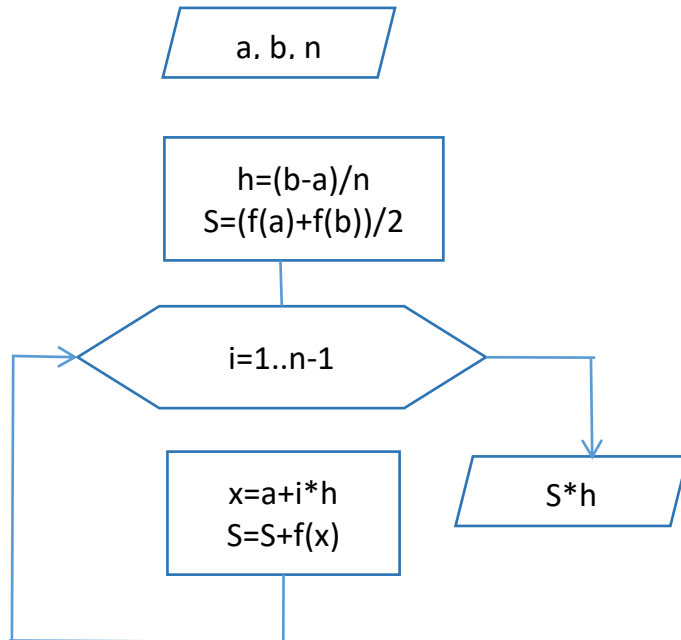
$$\int_a^b f(x)dx = h \left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + \sum_{i=1}^{19} y_i \right).$$

Отже

$$\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.03 \left(\frac{0.88386 + 0.52129}{2} + 12.77022 \right) \approx 0.40418.$$

Відповідь: $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}} \approx 0.4042.$

2 Спосіб:



ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №8
ТЕМА: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ. ЗАДАЧА КОШІ

ОФОРМЛЕННЯ:

Лабораторна робота:	8	
Тема:	Звичайні диференційні рівняння. Задача Коші	
Прізвище та ім'я:		
Номер групи:		
Варіант		
Завдання 1	Метод Ейлера	
	Діаграма	Обчислені значення
Завдання 2	Метод Ейлера-Коші	
	Діаграма	Обчислені значення
	Перевірка	
	Графік	Обчислені значення

Завдання: З точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ на відрізку $[a, b]$ з кроком $h=0.1$ за початкових умов $y(x_0) = y_0$: а) методом Ейлера; б) методом Ейлера-Коші. Побудувати ламану Ейлера для знайденого розв'язку.

Вар.	$y' = f(x, y)$	$y(x_0) = y_0$	$[a; b]$
	а) $y' = x + \cos(y / \sqrt{5})$	$y(1.8)=2.6$	$[1.8; 2.8]$
	б) $y' = x + \sin(y / 3)$	$y(1.6)=4.6$	$[1.6; 2.6]$
1	а) $y' = x + \cos(y / 3)$	$y(1.6)=4.6$	$[1.6; 2.6]$
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{5})$	$y(1.8)=2.6$	$[1.8; 2.8]$
2	а) $y' = x + \cos(y / \sqrt{10})$	$y(0.6)=0.8$	$[0.6; 1.6]$
	б) $y' = x + \sin(y / 2.8)$	$y(1.4)=2.2$	$[1.4; 2.4]$
3	а) $y' = x + \cos(y / \sqrt{7})$	$y(0.5)=0.6$	$[0.5; 1.5]$
	б) $y' = x + \cos(y / \pi)$	$y(1.7)=5.3$	$[1.7; 2.7]$
4	а) $y' = x + \cos(y / \pi)$	$y(1.7)=5.3$	$[1.7; 2.7]$
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{7})$	$y(0.5)=0.6$	$[0.5; 1.5]$
5	а) $y' = x + \cos(y / 2.25)$	$y(1.4)=2.2$	$[1.4; 2.4]$
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{10})$	$y(0.6)=0.8$	$[0.6; 1.6]$
6	а) $y' = x + \cos(y / e)$	$y(1.4)=2.5$	$[1.4; 2.4]$
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{7})$	$y(0.5)=0.6$	$[0.5; 1.5]$
7	а) $y' = x + \cos(y / \sqrt{2})$	$y(0.8)=1.4$	$[0.8; 1.8]$
	б) $y' = x + \sin(y / \pi)$	$y(1.7)=5.3$	$[1.7; 2.7]$

8	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{3})$	$y(1.2)=2.1$	[1.2;2.2]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{2})$	$y(0.8)=1.3$	[0.8;1.8]
9	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{11})$	$y(2.1)=2.5$	[2.1;3.1]
	б) $y' = x + \sin(y / e)$	$y(1.4)=2.5$	[1.4;2.4]
10	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{5})$	$y(1.8)=2.6$	[1.8;2.8]
	б) $y' = x + \cos(y / 3)$	$y(1.6)=4.6$	[1.6;2.6]
11	a) $y' = x + \sin(y / 3)$	$y(1.6)=4.6$	[1.6;2.6]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{5})$	$y(1.8)=2.6$	[1.8;2.8]
12	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{10})$	$y(0.6)=0.8$	[0.6;1.6]
	б) $y' = x + \cos(y / 2.25)$	$y(1.4)=2.2$	[1.4;2.4]
13	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{7})$	$y(0.5)=0.6$	[0.5;1.5]
	б) $y' = x + \cos(y / e)$	$y(1.4)=2.5$	[1.4;2.4]
14	a) $y' = x + \sin(y / \pi)$	$y(1.7)=5.3$	[1.7;2.7]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{2})$	$y(0.8)=1.4$	[0.8;1.8]
15	a) $y' = x + \sin(y / 2.8)$	$y(1.4)=2.2$	[1.4;2.4]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{10})$	$y(0.6)=0.8$	[0.6;1.6]
16	a) $y' = x + \sin(y / e)$	$y(1.4)=2.5$	[1.4;2.4]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{11})$	$y(2.1)=2.5$	[2.1;3.1]
17	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{2})$	$y(0.8)=1.3$	[0.8;1.8]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{3})$	$y(1.2)=2.1$	[1.2;2.2]
18	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{3})$	$y(1.1)=1.5$	[1.1;2.1]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.25})$	$y(0.4)=0.8$	[0.4; 1.4]
19	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{11})$	$y(0.6)=1.2$	[0.6;1.6]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{0.7})$	$y(1.2)=1.4$	[1.2; 2.2]
20	a) $y' = x + \sin(y / 1.25)$	$y(0.5)=1.8$	[0.5; 1.5]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.3})$	$y(1.2)=1.8$	[1.2; 2.2]
21	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{15})$	$y(0.2)=1.1$	[0.2; 1.2]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.5})$	$y(0.3)=0.9$	[0.3; 1.3]
22	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{1.3})$	$y(0.1)=0.8$	[0.1; 1.1]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{0.7})$	$y(0.9)=1.7$	[0.9; 1.9]
23	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{0.3})$	$y(0.5)=0.6$	[0.5; 1.5]
	б) $y' = x + \cos(y / \sqrt{0.3})$	$y(0.7)=2.1$	[0.7; 1.7]

24	a) $y' = x + \sin(y / \sqrt{0.7})$	$y(1.2)=1.4$	[1.2; 2.2]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{11})$	$y(0.6)=1.2$	[0.6; 1.6]
25	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.25})$	$y(0.4)=0.8$	[0.4; 1.4]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{3})$	$y(1.1)=1.5$	[1.1; 2.1]
26	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.5})$	$y(0.3)=0.9$	[0.3; 1.3]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{15})$	$y(0.2)=1.1$	[0.2; 1.2]
27	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{1.3})$	$y(1.2)=1.8$	[1.2; 2.2]
	б) $y' = x + \sin(y / 1.25)$	$y(0.5)=1.8$	[0.5; 1.5]
28	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{0.3})$	$y(0.7)=2.1$	[0.7; 1.7]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{0.3})$	$y(0.5)=0.6$	[0.5; 1.5]
29	a) $y' = x + \cos(y / \sqrt{0.7})$	$y(0.9)=1.7$	[0.9; 1.9]
	б) $y' = x + \sin(y / \sqrt{1.3})$	$y(0.1)=0.8$	[0.1; 1.1]

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Завдання: 1) **Методом Ейлера** з точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння $y' = \sin(x) - \cos(y)$ на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h=0.2$ за початкових умов $y(0)=1$.

Розв'язання:

Розрахункові формули методу Ейлера матимуть вигляд:

$$x_0 = 0;$$

$$y_0 = 1;$$

$$x_{i+1} = x_i + 0.2;$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.2(\sin x_i - \cos y_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

1. Початкове значення $x_0 = 0;$

i	x_i
0	0

2. Відрізок $[0; 1]$ з кроком $h=0.2$

i	x_i
0	0
	0,2
	0,4
	0,6
	0,8
	1

3. Нумерація рядків

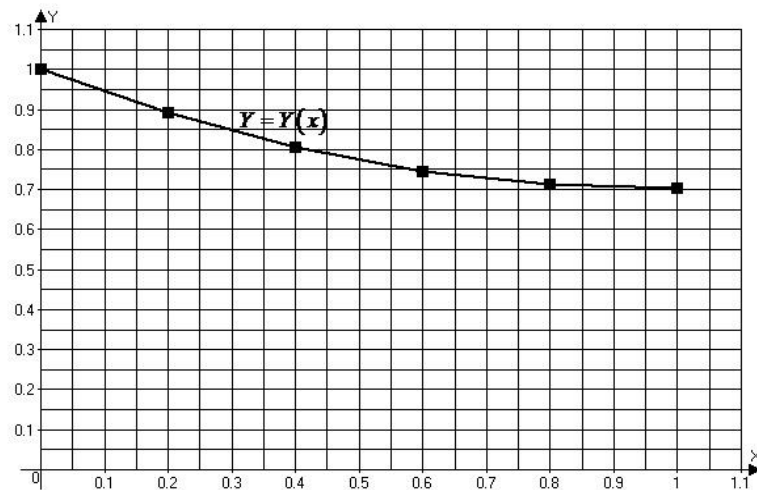
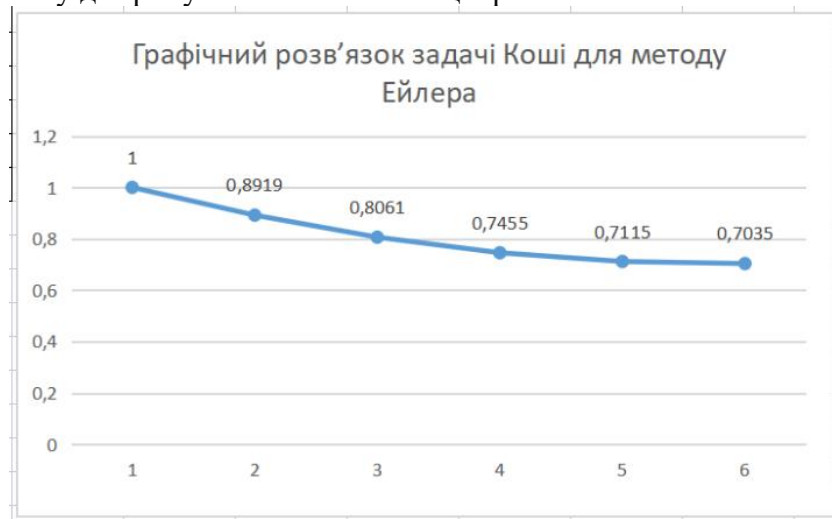


Рис. 1. Графічний розв'язок задачі Коші для методу Ейлера

8. Побудовану діаграму заносимо в таблицю розв'язків



2) **Методом Ейлера-Коші** з точністю до 0.0001 скласти розв'язок задачі Коші для звичайного диференційного рівняння $y' = \sin(x) - \cos(y)$ на відрізку $[0; 1]$ з кроком $h=0.2$ за початкових умов $y(0)=1$.

Розв'язання:

Розрахункові формули методу Ейлера-Коші матимуть вигляд:

$$x_0 = 0;$$

$$y_0 = 1;$$

$$x_{i+1} = x_i + 0.2;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.2}{2} [\sin(x_i) - \cos(y_i) + \sin(x_{i+1}) - \cos(y_i + 0.2(\sin(x_i) - \cos(y_i)))],$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

1. Початкове значення $x_0 = 0;$

i	x_i
0	0

2. Відрізок $[0; 1]$ з кроком $h=0.2$

i	x_i
0	0
	0,2
	0,4
	0,6
	0,8
	1

3. Нумерація рядків

i	x_i
0	0
1	0,2
2	0,4
3	0,6
4	0,8
5	1

4. Початкова умова $y_0 = 1$;

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0,2	
2	0,4	

5. Обчислюємо y_1 за формулою $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$,
d B

нашому випадку

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0.2}{2}[\sin(x_i) - \cos(y_i) + \sin(x_{i+1}) - \cos(y_i + 0.2(\sin(x_i) - \cos(y_i)))],$$

Отже:

$$y_1 = y_0 + (0,2/2) * (\sin(x_0) - \cos(y_0) + \sin(x_1) - \cos(y_0 + 0,2 * (\sin(x_0) - \cos(y_0))))$$

$f(x_0, y_0)$

$f(x_1, y_1)$

RT ✕ ✓ f_x $=D3+(0,2/2)*(SIN(C3)-COS(D3)+SIN(C4)-COS(D3+0,2*(SIN(C3)-COS(D3))))$										
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	i	x_i	y_i							
	0	0	1							
	1	0,2	$=D3+(0,2/2)*(SIN(C3)-COS(D3)+SIN(C4)-COS(D3+0,2*(SIN(C3)-COS(D3))))$							
	2	0,4								
	3	0,6								
	4	0,8								
	5	1								

Формулу копіюємо:

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.2	0.9030
2	0.4	0.8316
3	0.6	0.7882
4	0.8	0.7734
5	1	0.7862

Побудуємо ламану Ейлера для знайденого розв'язку $Y = Y(x)$

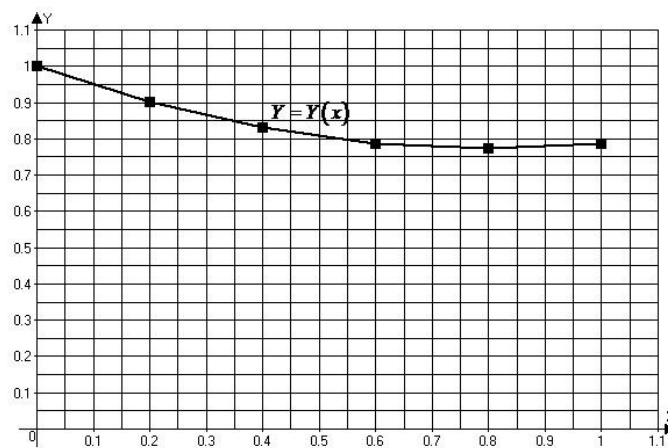
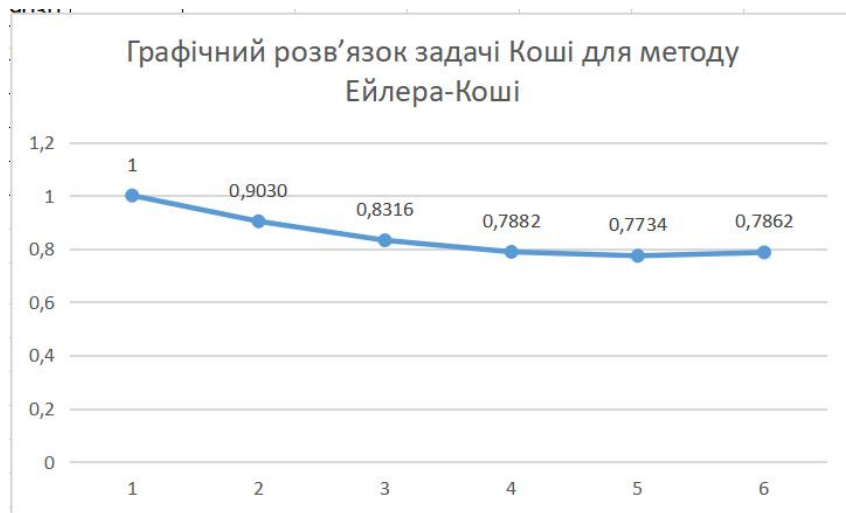


Рис.2. Графічний розв'язок задачі Коші для методу Ейлера-Коші
Побудовану діаграму заносимо в таблицю результатів



Перевірка точним методом

<https://cloud.scilab.in/>

```
function yd=f(x,y)
yd=sin(x)-cos(y)
endfunction
```

- задана функція

```
y0=1
x0=0
```

- початкова умова $y(0)=1$

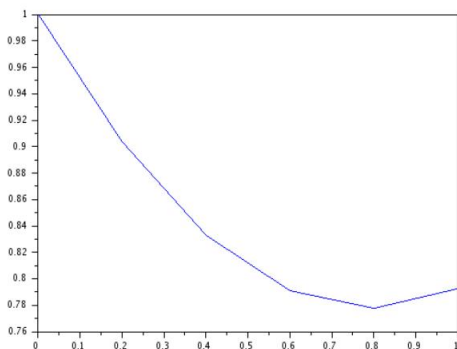
```
x=0:0.2:1
```

```
ys=ode(y0,x0,x,f)
plot(x,ys)
```

- відрізок $[0; 1]$ з кроком $h=0.2$

- розв'язок задачі Коші

Графік занести в таблицю



Download

Close

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ремез. Н.С., Кисельов В.Б., Дичко А.О., Мінаєва Ю.Ю. Чисельні методи розв'язання технічних задач. Підручник.-Одеса: Видавничий дім «Гельветика», - 2022, 186 с.
2. Кветний Р.Н. Методи комп'ютерних обчислень. Навч. посібник. –Вінниця: ВДТУ, 2001. -148с.
3. Числові методи: навчальний посібник / С. М. Москвіна - Вінниця: ВНТУ, 2013. 326 с
4. Програмування числових методів мовою Python : підруч. / А. В. Анісімов, А. Ю. Дорошенко, С. Д. Погорілий, Я. Ю. Дорогий ; за ред. А. В. Анісімова. – К. : Видавничополіграфічний центр "Київський університет", 2014. – 640 с.
5. Кушнірук Я.В., Бондаренко М.І. Чисельні методи: теорія та практика: навчальний посібник. - Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019. - 416 с.
6. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Вид. група ВНУ, 2016. – 480 с.
7. Степанюк І.О. Чисельні методи. Навчальний посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2017. – 356 с.
8. Кушнірук Я.В., Бондаренко М.І. Чисельні методи: теорія та практика: навчальний посібник. - Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019. – 416 с.
9. Кушнірук Я.В., Бондаренко М.І. Чисельні методи: теорія та практика: навчальний посібник. - Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019. - 416 с.
10. Приймак О.В., Яковлєва І.О., Капустян Ю.М. Чисельні методи математичного моделювання: навчальний посібник. - Харків: Видавничий центр "Академія", 2019. - 284 с.
11. Тарасенко А.Ю., Ковальчук Ю.М., Співак М.І. Чисельні методи: навчальний посібник. - Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2020. - 360 с.