

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему “Степенева функція в шкільній програмі”

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)з-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Івасюк Іванна Михайлівна

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Казмерчук Анатолій Іванович

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I. ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	5
1.1. Місце степеневих функцій у шкільному курсі математики.....	5
1.2. Мета та зміст теми. Вимоги до набутих компетентностей учнів з теми «Степенева функція», реалізація наскрізних ліній у межах теми.....	8
1.3. Порівняльний аналіз навчальних програм з математики профільної школи різних рівнів.....	19
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1	27
РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ	28
2.1. Засоби, методи і форми, які доцільно використовувати для навчання степеневих функцій.....	28
2.2. Методичні рекомендації для організації вивчення степеневих функцій учнів профільної школи.....	39
2.3. Використання на уроці цифрових засобів навчання для узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Степенева функція»	51
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2	60
ВИСНОВКИ	61
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	62
ДОДАТКИ	67

ВСТУП

Поняття функції є одним з ключових понять шкільного кусу математики, яке у школі вивчається з деяким спрощенням, й виокремлено у формі окремої змістової лінії, яка розкриває своє особливе важливе значення у старшій профільній школі – у курсі алгебри і початків аналізу зокрема. Функція для учнів повинна бути математичною моделлю реальних процесів, яку використовують для розв'язування прикладних задач.

Актуальність дослідження. Поняття функції є одним з тих понять, що часто оперують, однак не можуть встановити відмінності з поняттям відношення. Синонімами слова функція є відображення (у конкретних розділах математики як-от теорія множин), перетворення (в алгебрі та геометрії), оператор (у алгебрі). Степенева функція є однією з тих функцій, з якими учні знайомляться протягом усього свого вивчення математики у базовій і старшій школі і за її допомогою якої засвоюють більшість властивостей функцій, алгоритмів побудов графіків за допомогою елементарних перетворень тощо. Обсяг поняття функції у шкільному курсі математики постійно змінюється. Це обумовлено реформами шкільної освіти, які розпочалися з впровадженням концепції НУШ у початковій, а нині й у базовій та профільній школах.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики здобувачів профільної школи закладів загальної середньої освіти.

Предмет дослідження – особливості вивчення степеневих функцій у курсі математики старшої профільної школи.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження особливостей вивчення степеневих функцій у курсі математики старшої профільної школи.

Відповідно до мети було виокремлено такі завдання:

- Дослідити поняття «степеневих функцій»,
- Розглянути степеневу функцію з натуральним, цілим, раціональним та ірраціональним показником.
- Підбір практичних завдань з досліджуваної теми.

Стан наукової розробки. Становлення поняття степеневі функції нерозривно пов'язане зі становленням поняття функції. Історичний розвиток останнього поняття достатньо тернистий. Вперше його розглянув Р. Декарт, далі досліджували у своїх роботах більшість виданих математиків, починаючи з 17 століття: Готфрід Лейбніц, Йоганн Бернуллі, Леонард Ейлер, П'єр Фур'є, Петер Діріхле, Михайло Лобачевський, Поль Дірак, Сергій Соболев. Степеневу функцію у шкільному курсі математики вивчали дослідники шкільного курсу математики та у більшості автори підручників з алгебри: Олександр Істер, Микола Працьовитий, Олександр Школьник, Євген Нелін, Аркадій Мерзляк, Микола Шкіль, Світлана Скворцова тощо.

Для розв'язування поставленої мети були використані такі *методи досліджень*: дослідження та об'єднання знань з психологічної, педагогічної та методичної літератури, порівняння і підсумок наукових матеріалів у поєднанні з моїм власним учительським досвідом.

Апробація. Під час виробничої практики у Верховинському ліцеї №1 Івано-Франківської області у листопаді 2023 року було проведено тестування засобами Forms на тему «Корені навколо нас» для учнів 10 класу, якому передували навчальні заняття з алгебри і початків аналізу з теми «Корінь n -го степеня та його властивості». Усі матеріали до занять підготовлено самостійно, про що складено відповідну документацію.

Робота має *практичну цінність* для студентів і учителів математики у галузі знань 01 Освіта/Педагогіка для використання у власній професійній діяльності.

РОЗДІЛ І. ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Місце степеневі функції у шкільному курсі математики

Фундаментом алгебри і початків аналізу є поняття функції, тому систематизація, узагальнення й поглиблення знань про них треба реалізувати під час вивчення першої теми курсу в межах 10 класу. Уся тема «Функції, їхні властивості та графіки» в основному присвячена степеневій функції, цей розділ виступає плацдармом для подальшого вивчення тригонометричних, показникових, логарифмічних степеневих функцій та похідної як апарату дослідження функції.

Засвоєння поняття функції у закладах середньої освіти розпочинається ще до використання точного означення поняття. У початковій школі діти знайомляться з прикладами елементарних залежностей у побуті, природі, прикладами змінних величин та навчаються інтерпретувати дані через таблиці або графіки. У першому циклі базової середньої освіти (5-6 класах) вже формується розуміння залежності між змінними, вміння будувати таблиці значень змінних, аналізувати та будувати лінійні діаграми за даними з таблиць тощо [28].

З окремими видами степеневі функції учні знайомі ще з курсу алгебри базової школи.

Станом на літо 2024 року вивчення математики у другому циклі базової школи (у 7 – 9 класах) математика може відбуватися за окремими модельними програмами з алгебри або геометрії чи за однією – інтегрованою – з математики. Учителю пропонують обрати одну (або дві) модельну(і) програму(и) навчання з дванадцяти, серед них: чотири з алгебри (авторських колективів на чолі з Мерзляком А. Г. Або О.С Істером, або Бурдою М.І., або Білянніною О.Я)); шість – з геометрії і дві програми інтегрованого курсу з математики для закладів загальної середньої освіти (авт. Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В. або

Істера О.С.) [18]. Більшість авторів модельних програм брали участь у розробці навчальної програми з математики (зі змінами) у 2017 року.

Коротко охарактеризуємо як реалізується вивчення функції, в тому числі й степеневій, у програмах вивчення алгебри / математики.

У 7 класі вводиться поняття функції, разом з ним обговорюються область визначення, область значень та графік функції. Учні знайомляться зі способами задання функцій, вивчають лінійні функції, їх графіки та основні властивості. Ці знання використовуються для графічного представлення розв'язків лінійних рівнянь та систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими за допомогою графіків. Інші види функцій розглядаються у контексті відповідних тем курсу. Розглядаються приклади функціональних залежностей як математичних моделей реальних процесів та явищ.

Цікавим є набір мотиваційних задач та підбір відео для вивчення функції у посібнику для 7 класу авторів О. Школьного, Є. Неліна, А. Миляника, Ю. Простакової, що може відповідати інтегрованій модельній програмі з математики для 7 класу згідно з НУШ-концепцією.

У підручнику наведено багато ситуацій, які демонструють побутові приклади використання прямокутної системи координат на площині (гру у шахи на прикладі англійського початку с2-с4), функціональної залежності у реальному житті (офіційний курс злого до гривні відповідно до курсу НБ України; вартість поїзди на таксі з аеропорту до місця призначення в мандрівці Польщею). Зацікавленість учнів такими прикладами допомагає далі розібратись учням з поняттями у даній досліджуваній темі, після опрацювання яких можна за посиланням чи QR- кодом переглянути короткі навчальні відео (фільмики) про те, як визначити координати точки на площині чи обернену задачу – побудувати точку на площині за її координатами), працювати з графічним калькулятором, докладніше дізнатися про лінійну функцію тощо. Використання гаджетів для здобування математичних знань сьогодні під керівництвом учителя є новим нетрадиційним підходом до викладання математики, який має як

прихильників так і противників серед науковців. Однак повністю ігнорувати цифрові можливості для навчання сьогодні не є раціональним через засилля технологій у сучасному повсякденні.

Навчання у 8 класі на даному етапі реалізується за чинною програмою (з оновленнями) від 2017 року без реалізації НУШ-концепції [20] .

У 8 класі, у темах «Раціональні вирази» та «Квадратні корені», учні вивчають окремі функції : обернена пропорційність, квадратична функція та обернена до неї, і їх властивості. Під час вивчення властивостей квадратного кореня, розв'язування рівнянь з модулем та побудови графіків функцій учням пояснюється необхідність враховувати множину допустимих значень змінних у рівняннях та відслідковувати перетворення, які можуть змінити цю множину коренів під час розв'язання рівнянь.

У 9 класі вивчається квадратична функція, алгоритми для її дослідження та побудови графіка. Учні також знайомляться з основними властивостями функцій: зростання/спадання та знакосталість, що пов'язані з розв'язанням квадратних нерівностей. Формується уміння будувати ескізи графіків функцій за допомогою послідовних перетворень графіків елементарних функцій.

Для курсу «Алгебра і початки аналізу» учнів старшої профільної школи велика увага приділяється дослідженням властивостей функцій у різних формах, демонструючи їх зв'язок з основними поняттями курсу: функцією, рівнянням та нерівністю.

Під час вивчення теми «Степенева функція» в курсі «Алгебра і початки аналізу» передбачається знайомство учнів з питаннями: узагальнення поняття про степінь; поняття про степінь з ірраціональним показником; розв'язування ірраціональних рівнянь і їх систем; степенева функція, її властивості і графік.

Таким чином можемо умовно виділити етапи засвоєння степеневої функції:

- степенева функція з натуральним показником;
- степенева функція з цілим показником;
- степенева функція з раціональним показником;

- похідна степеневі функції, похідна складеної степеневі функції, складання рівняння дотичної до графіка функції в точці;
- первісна та визначений інтеграл; обчислення площ плоских фігур.

Зрозуміло, що степенева функція зустрічається і при дослідженні функції за допомогою похідної та побудові її графіку. Не потребує нагадування й той факт, що степенева функція є однією з обов'язкових складових у тестуванні ЗНО / НМТ учнів останніх років [6].

Сепенева функція як елементарна функція має великий потенціал для посилення прикладної спрямованості змісту навчання математики, забезпечення мотивації до навчання через використання історизмів, цікавих фактів, доступності навчального матеріалу для опису реальних процесів. У рамках вивчення степеневі функції можна підібрати багато математичних задач, які дозволяють реалізувати більшість наскрізних ліній, зокрема здоров'я і безпеки, підприємливості та фінансові грамотності тощо. Прикладом реалізації першої вказаної наскрізної лінії через використання степеневі функції є задача з фабулою на встановлення часу досягнення «порога болю» людини в умовах загорання або обвуглення дерев'яних конструкцій [29, с. 10] за умови наявності таких вхідних характеристик: часу теплового впливу, щільності теплового потоку загорання або обвуглення, товщини шкіряного покриву людини, максимальної температури, яку може витерпіти людини при відчутті сильного болю.

1.2. Мета та зміст теми. Вимоги до набутих компетентностей учнів з теми «Сепенева функція», реалізація наскрізних ліній у межах теми.

Систематичне вивчення степеневі функції починається у 7 класі. Впродовж вивчення математики 7 – 9 класах ця функція є наріжним каменем для реалізації функціональної ліній у ШКМ. Вивчення її проходить спіралеподібно та більшість понять вводиться конкретно-індуктивно. Засвоєння окремих властивостей конкретних степеневих функції відбувається впродовж усього навчання у школі, але термін *степенева функція* з'являється

лише у старшій профільній школі, де його засвоєння відбувається шляхом узагальнення знань отриманих впродовж навчання. Степеневу функції використовують й надалі при вивченні похідної та визначеного інтегралу. Вивчення окремих видів степеневі функції за класами представлено на схемі 1.

Схема 1. Вивчення окремих видів степеневі функції за класами



Степеневими функціями називають функції виду $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

На момент засвоєння цього поняття учні вже знайомі з окремими видами таких функцій із курсу математики базової школи та зустрічали такі залежності у задачах з фізики, хімії, біології. Це, наприклад, функції $y = x = x^1$, $y = x^2$, $y = x^3$. При довільному $\alpha \in N$ графіки і властивості функцій $y = x^{\alpha}$ аналогічні відомим графікам і властивостям указаних функцій.

У 7 класі розглядають поняття функції, аргументу, області визначення та значень, незалежні і залежні змінні, способи задання функції (аналітичний,

графічний, табличний), графік функції та самостійно навчаються будувати графіки функції чи з використанням додатків або графічних калькуляторів. Особливу увагу приділяють графіку функцій: $y=kx+b$. Розглядають пряму і обернену пропорційності. Учні побічно відпрацьовують вміння записувати формулами окремі твердження (периметр P рівностороннього дорівнює добутку числа 3 на довжину сторони трикутника a), фундаментально працюють над вміннями визначати координати точки на площині та будувати точку площини за її координатами і виокремлюють не функціональні залежності (див. рис. 1)

2. На якому рисунку зображено лінію, яка НЕ може задавати функцію?

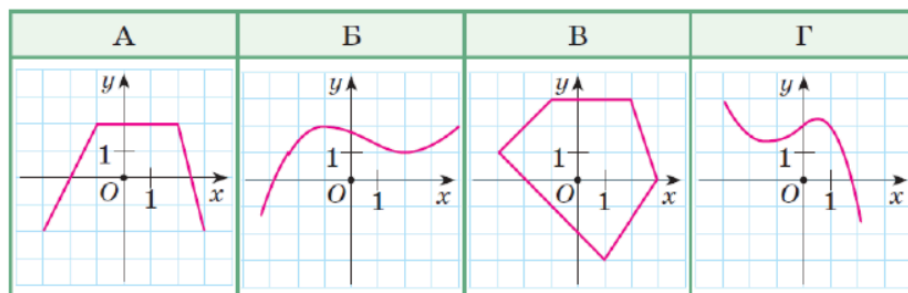


Рис 1. Приклад завдання на розуміння поняття функції.

У 8 класі розпочинається вивчення функції обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$: побудова її графіка (гіпербола), встановлення області визначення ($R \setminus \{0\}$), дослідження розміщення гілок гіперболи відносно значення k .

Також у 8 класі вивчають окремий квадратичної залежності $y = x^2$ та її графік (парабола). Ця функція є одним з найважливіших видів функції для подальшої реалізації функціональної ліній: усі властивості функцій, перетворення графіків функцій ілюструються за допомогою квадратичної функції. Основними поняттями теми є: вершина, вітки параболи, проміжки спадання та зростання функції, нуль функції. Вивчають також графік функції $y = \sqrt{x}$ та його властивості. Можна також показати на рисунку симетрію правої гілки параболи $y = x^2$ та графіка функції $y = \sqrt{x}$ відносно прямої $y = x$ як приклад функції та обернено до неї.

У 9 класі вивчають узагальнення функції $y = x^2$ - степеневу функцію $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c \in R$. Вивчення останньої проходить у зв'язці з вивченням квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c \in R$ і потребує засвоєння поняття дискримінанту, коренів квадратного тричлена, що є точками перетину параболи з віссю абсцис у подальшому, вершина параболи та її координати. Також розглядають у цій темі перетворення графіків функції $f(x) + a$, $f(x + a)$, $kf(x)$, $-f(x)$ для заданої функції $f(x)$ та алгоритм побудови графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c \in R$ шляхом виділення повного квадрату і застосування правил перетворення графіків.

Для розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами у класах з поглибленим вивченням математики потрібно для учнів 9 класу також показати задачі на використання умов розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданих чисел А і В.

Відмітимо, що у базовій школі усі властивості степеневі функції встановлюють за його графіками. Теорія границь, перша та друга похідна не використовуються.

Отже, після закінчення базової школи учні мають уявлення про такі степеневі функції як $y = x$, $y = \frac{k}{x} = kx^{-1}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. Усі ці степеневі функції разом відіграють важливу роль при побудові відповідних графіків степеневі функції при довільному значенні $\alpha \in R$ у якості аналогій.

Подальше знайомство та узагальнення поняття функції, її властивостей, знайомство з окремими видами степеневих функцій продовжується у профільній школі.

Поняттю степеневі функції передують засвоєння

понять:

числової функції (числової залежності),

області визначення,

Наприклад, знайти корінь квадратний (або в загальному випадку корінь парного степеня) з добутку ab від'ємних чисел ($a < 0$, $b < 0$). Тоді $ab > 0$ і $\sqrt[2k]{ab}$ існує, проте формулою

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad (1.1)$$

скористатися, не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень a і b . Але у випадку $ab > 0$ маємо: $ab = |a| \cdot |b|$ і тепер $|a| > 0$ та $|b| > 0$. Отже, для добування кореня з добутку можна використати формулу (1.1)

Тоді при $a < 0$, $b < 0$ можемо записати:

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $a \geq 0$, $b \geq 0$, оскільки в цьому випадку $|a| = a$ і $|b| = b$. Отже, при $ab \geq 0$ $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$.

Властивості кореня n -го степеня у подальшому виступають тим апаратом, який використовують для доведення властивостей степеня з раціональним показником (для додатних основ) – див. рис.3.

1. Степінь з натуральним і цілим показниками	
$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 2)$
$a^0 = 1 \quad a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}$
2. Степінь з дробовим показником	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a \geq 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (n \geq 2), m \in \mathbb{Z}$
3. Властивості степенів	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Рис. 3. Узагальнення поняття степеня

Точного обґрунтування поняття степеня з ірраціональним показником не розглядають, описове означення на конкретному прикладі рекомендовано розглянути для класів з поглибленим вивченням математики. Такий підхід

запропоновано у підручнику Неліна Е. П. [21], [22]. Автор посібника у загальних рисах пояснює, як можна означити число a^α , $a > 1$, $\alpha \in I$ на конкретному прикладі для $2^{\sqrt{3}}$, використовуючи калькулятор. Спочатку пропонують оцінити число $\sqrt{3}$ з наближенням та надлишком $1 < \sqrt{3} < 2$, далі проводять більш точні оцінки

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8;$$

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74;$$

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733;$$

$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321;$$

$$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206;$$

$$1,732050 < \sqrt{3} < 1,732051; \dots$$

Будемо вважати, оскільки $r < \sqrt{3} < s$, де $r, s \in Q$, то значення $2^{\sqrt{3}}$ розміщується між відповідними значеннями 2^r , 2^s , коли обирати значення $r, s \in Q$ з недостатчею та надлишком відповідно. Отримаємо такі співвідношення

$$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$$

$$2^{1,7} \approx 3,2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3,4822022;$$

$$2^{1,73} \approx 3,3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3,3403517;$$

$$2^{1,732} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3,3241834;$$

$$2^{1,7320} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3,3221104;$$

$$2^{1,73205} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3,3220182;$$

$$2^{1,732050} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3,3219975; \dots$$

Як бачимо, значення 2^r , 2^s наближаються до одного й того ж самого числа 3,32199.... Це число й вважають степенем числа $2^{\sqrt{3}}$, отже $2^{\sqrt{3}} = 3,32199....$ Калькулятор дає аналогічну відповідь.

Можна довести, що у будь-якому випадку при виборі чисел $r \in Q$, які з недостачею наближаються до $\alpha \in I$, та чисел $s \in Q$, які з надлишком наближаються до того самого числа $\alpha \in I$, для довільного $a > 1$ існує і при тому єдине число y , що менше за всі a^s і більше за всі a^r : $a^r < y < a^s$. За означенням, $y = a^\alpha$.

Аналогічно визначають і $y = a^\alpha$ для $0 < a < 1$, $\alpha \in I$. Лише у випадку, коли $r < \alpha < s$ при $0 < a < 1$ вважають, що $a^s < a^\alpha < a^r$. Також за означенням вважають, що $\forall \alpha \quad 1^\alpha = 1$; $\forall \alpha > 0 \quad 0^\alpha = 0$.

Володіння властивостями степенів з раціональним показником та кореня n -го степеня дають можливість перейти до опрацювання означення степеневій функції та її властивостей.

Розглянемо усі можливі варіанти графіків степеневій функцій та обґрунтуємо властивості цих функцій. Види графіків систематизуємо у

вигляді таблиці 1 (у додатках) в залежності від степеня:

- | | |
|--|---|
| • $\alpha \in N$, α – парне; | • $\alpha \in Z$, $\alpha < 0$, α – парне; |
| • $\alpha \in N$, α – непарне; | • $\alpha \in \bar{Z}$, $\alpha > 0$; |
| • $\alpha \in Z$, $\alpha < 0$, α – | • $\alpha \in \bar{Z}$, $\alpha < 0$. |

непарне;

Наведемо усю необхідну інформацію про степеневу функцію у вигляді таблиці 2 (у додатках). Зауважимо, що одразу вказуємо усі властивості степеневій функції, з якими учні стикатимуться до закінчення старшої профільної школи, тобто в т. ч. вказуємо похідну, екстремуми, асимптоти, опуклість та точки перегину. Проаналізувавши програми вивчення з математики для учнів базової та старшої школи сформулюємо загальні

очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів у результаті засвоєння теми «Степенева функція».

У процесі навчання здобувач середньої освіти

1. *Розуміє такі основні поняття:*

- a. формулює означення степеневої функції, кореня n -го степеня, арифметичного кореня n -го степеня та степеня з раціональним показником;
- b. пояснює властивості коренів та степенів з раціональним показником.

2. *Аналізує і будує графіки:*

- a. зображує графіки степневих функцій різного виду;
- b. пояснює властивості графіків степневих функцій (зростання, спадання, області визначення та значень, асимптоти).

3. *Виконує обчислення:*

- a. обчислює, оцінює та порівнює значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками;
- b. перетворює вирази, які містять корені та степені з раціональними показниками, для спрощення або зведення до заданого вигляду.

4. *Розв'язує рівняння та нерівності:*

- a. розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами;
- b. застосовує властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.

5. *Практично використовує:*

- a. степеневі функції для моделювання реальних процесів та задач;
- b. аналізує та розв'язує задачі прикладного характеру, використовуючи степеневі функції.

6. *Проводить теоретичний аналіз:*

- a. характеризує основні властивості степневих функцій;
- b. аналізує перетворення графіків степневих функцій під впливом різних параметрів.

7. Критично мислить та досліджує:

а. застосовує набуті знання для критичного аналізу та розв'язання нетипових задач.

б. проводить дослідження властивостей функцій у різних контекстах.

Зміст розділу «Степеневі функція» має широкий потенціал для реалізації навчання за такими наскрізними лініями як *екологічна безпека та сталий розвиток, здоров'я і безпека, підприємливість та фінансова грамотність, громадянська відповідальність*. Наприклад, в економіці можна розрахувати відсотків від відсотків; фізика передбачає визначення опору провідника, пройденого шляху при рівномірному чи рівноприскореному або рівносповільненому русі. У біології за допомогою степеневі функції можемо змодельовати ріст популяцій або розкладання органічних речовин. Інженерія передбачає задачі аналізу напруги в матеріалах під час деформації. Традиційною залишається задача з курсу математики про визначення площі фігури при зміні її параметрів за допомогою степеневі функції.

Наведемо зміст таких компетентнісних задач для реалізації кожного такого напрямку навчання.

Екологічна безпека та сталий розвиток

1. *Задача на розрахунок забруднення атмосфери:* кількість шкідливих викидів в атмосферу зростає за законом степеневі функції

$Q(t) = Q_0 \cdot (1 + k \cdot t)^n$, де Q_0 – початкова кількість викидів, k – коефіцієнт збільшення, t – час у роках, n – показник степеня. Визначити кількість шкідливих викидів через 10 років, якщо $Q_0 = 100$ тон, $k = 0,05$, $n = 2$.

2. *Задача на розрахунок деградації ґрунту:* процес деградації ґрунту можна описати функцією $D(t) = D_0 \cdot (1 - kt)^n$, де D_0 – початкова родючість ґрунту, k – коефіцієнт деградації, t – час у роках, n – показник степеня. Визначити родючість ґрунту через 15 років, якщо $D_0 = 100$ умовних одиниць, $k = 0,03$, $n = 1,5$.

Здоров'я і безпека

3. *Задача на розрахунок часу дії ліків:* концентрація ліків в організмі зменшується за законом степеневі функції $C(t) = C_0 \cdot (1 - kt)^n$, де C_0 – початкова концентрація, k – коефіцієнт зниження концентрації, t – час у годинах, n – показник степеня. Визначити концентрацію ліків через 8 годин, якщо $C_0 = 200$ мг, $k = 0.1$, $n = 1, 2$.

4. *Задача на розрахунок дози радіації:* доза радіації, отримана людиною, зменшується за законом степеневі функції $D(t) = D_0 \cdot (1 - kt)^n$, де D_0 – початкова доза, k – коефіцієнт зниження дози, t – час у годинах, n – показник степеня. Визначити дозу радіації через 5 годин, якщо $D_0 = 50$ рад, $k = 0,05$, $n = 1, 3$.

Підприємливість та фінансова грамотність

5. *Задача на розрахунок відсотків за кредитом:* Формула обчислення відсотків за кредитом має такий вигляд: $V = S \cdot \frac{VS}{100} \cdot \frac{KD}{DR}$, де V – сума нарахованих відсотків, S – сума кредиту, VS – відсоткова ставка за кредитом (% річних), KD – кількість днів кредитування, DR – кількість днів у році.

Володимир вирішив купити гірборд вартістю 90 000 гривень в кредит на 3 роки. Банк видав гроші під 20% річних з формою погашення рівними частинами. Щомісячна комісія за внесення платежу – 1% від суми. В цьому випадку переплата складе:

$$V = 90\,000 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{1095}{365} + 90\,000 \cdot 0,01 \cdot 20 = 90000 \cdot 0,2 \cdot 3 + 18000 = 72000.$$

Тобто за три роки Володимир доведеться виплатити $90000 + 72000 = 162000$ гривень.

6. *Задача на розрахунок амортизації обладнання:* вартість обладнання зменшується за законом степеневі функції $V(t) = V_0 \cdot (1 - kt)^n$, де V_0 – початкова вартість, k – коефіцієнт зниження вартості, t – час у роках, n

–показник степеня. Визначити вартість обладнання через 10 років, якщо початкова вартість $V_0 = 50000$ грн, $k = 0,07$, $n = 1,1$.

Громадянська відповідальність

7. *Задача на прогнозування населення:* населення міста зростає за законом степеневі функції $P(t) = P_0 \cdot (1 + kt)^n$, де P_0 – початкова кількість населення, k – коефіцієнт зростання, t – час у роках, n – показник степеня. Визначити кількість населення через 20 років, якщо початкова кількість $P_0 = 50000$, $k = 0,02$, $n = 1,05$.

8. *Задача на прогнозування ресурсу громадського транспорту:* термін служби автобусів зменшується за законом степеневі функції $T(t) = T_0 \cdot (1 - kt)^n$, де T_0 – початковий термін служби, k – коефіцієнт зниження терміну служби, t – час у роках, n – показник степеня. Визначити термін служби автобусів через 15 років, якщо початковий термін $T_0 = 12$ років, $k = 0,03$, $n = 1,2$.

Ці задачі демонструють, як степеневі функції можуть бути застосовані до реальних ситуацій, підкреслюючи важливість математичної грамотності в різних аспектах життя та суспільства.

1.3. Порівняльний наліз навчальних програм з математики профільної школи різних рівнів

Зважаючи на те, що згідно з діючими навчальними програмами з 8 класу можливі різні рівні вивчення математики, виконаємо порівняльний аналіз вивчення степеневі функції у 8, 9, 10 класах на поглибленому та базовому рівнях.

Структуруємо вихідні дані у формі таблиць.

Таблиця 1. Вивчення степеневі функції у 8 класі

8 клас (базовий рівень)	8 клас (поглиблений рівень)
Очікувані результати:	Очікувані результати:

Учень/учениця: <i>Наводить приклад:</i> раціональних чисел; ірраціональних чисел. <i>Пояснює:</i> що таке раціональне число; ірраціональне число; дійсне число. <i>Формулює:</i> означення арифметичного квадратного кореня з числа; властивості арифметичного квадратного кореня. <i>Характеризує:</i> властивості функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ за їх графіками. <i>Розв'язує вправи, що передбачають:</i> - застосування поняття арифметичного квадратного кореня для обчислення значень виразів, - спрощення виразів, - розв'язування рівнянь, - порівняння значень виразів, - перетворення виразів із застосуванням винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу,	Учень/учениця: <i>Пояснює:</i> поняття раціональне число, ірраціональне число, дійсне число. <i>Формулює:</i> означення квадратного кореня з числа, арифметичного квадратного кореня з числа. <i>Доводить:</i> властивості арифметичного квадратного кореня, властивості квадратного кореня з числа. <i>Розв'язує вправи, що передбачають:</i> - спрощення виразів, які містять арифметичний квадратний корінь, - побудову графіків $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$. - використання графіків функцій.
---	---

- побудову графіків функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.	
Теми: - Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості. - Функція $y = x^2$ її графік і властивості. - Арифметичний квадратний корінь. Властивості арифметичного квадратного кореня. - Раціональні числа. - Ірраціональні числа. Дійсні числа. - Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості.	Теми: - Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості. - Функція $y = x^2$ та її графік. - Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь. - Ірраціональні числа. Раціональні числа. - Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості.

Таким чином, обидва рівні навчання математики у 8 класі охоплюють ті ж самі базові поняття: раціональні числа, ірраціональні числа, дійсні числа, арифметичний квадратний корінь. На обох рівнях учні вивчають функції $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$, їх графіки та властивості. Учні обох рівнів виконують вправи, що включають спрощення виразів з коренями та побудову графіків функцій. Однак, оскільки кількість годин на вивчення теми у поглибленому рівні може бути більшою, то це дозволяє більш детально розглянути всі аспекти теми. Також на поглибленому рівні більший акцент робиться на доведення властивостей арифметичного квадратного кореня та квадратного кореня, а не лише на їх формулювання. Програма поглибленого рівня передбачає детальніше опрацювання алгоритмів розв'язання ірраціональних рівнянь та перетворень виразів з коренями. Таким чином,

поглиблений рівень вимагає більш глибокого розуміння і детальнішого опрацювання матеріалу, тоді як базовий рівень націлений на засвоєння основних понять та навичок.

Таблиця 2. Вивчення степеневі функції у 9 класі

9 клас (базовий рівень)	9 клас (поглиблений рівень)
Зміст теми: 1. Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції. 2. Перетворення графіків функцій: $f(x) \rightarrow f(x) + a$, $f(x) \rightarrow f(x + a)$, $f(x) \rightarrow f(-x)$ 3. Квадратична функція, її графік і властивості. 4. Квадратна нерівність. 5. Система двох рівнянь з двома змінними. 6. Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі.	Зміст теми: 1. Функції та їх властивості: парність і непарність, зростання і спадання, нулі і проміжки знакосталості, найбільше і найменше значення функції. 2. Використання властивостей функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей. 3. Перетворення графіків функцій: $f(x) \rightarrow f(x) + b$, $f(x) \rightarrow f(x + a)$, $f(x) \rightarrow f(-x)$ 4. Функції $y=[x]$ і $y=\{x\}$ та їх графіки. 5. Квадратична функція, її графік і властивості. 6. Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною. 7. Задачі на дослідження властивостей квадратного тричлена з параметрами. 8. Графічні прийоми розв'язування задач з параметрами. 9. Метод інтервалів.

Очікувані результати.	Очікувані результати:
Учень/учениця: 1. Наводить приклади квадратичної функції. 2. Обчислює значення функції в точці. 3. Пояснює перетворення графіків функцій та алгоритм побудови графіка квадратичної функції. 4. Характеризує функцію за її графіком. 5. Розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції, розв'язування квадратних нерівностей, знаходження розв'язків систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня, складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач.	Учень/учениця: 1. Пояснює алгоритми побудови графіка квадратичної функції та перетворення графіків функцій. 2. Характеризує функцію за її графіком. 3. Формулює означення функцій, парної та непарної функцій, зростаючої та спадної функцій, нуля функції, проміжку зростання і спадання функції, проміжку знакосталості функції, найбільшого і найменшого значень функції. 4. Розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції, побудову графіків функцій з використанням зазначених перетворень, розв'язування квадратичних нерівностей аналітичним та графічним способом, розв'язування нерівностей методом інтервалів.

Отже, обидва рівні навчання математики у 9 класі передбачають вивчення основних властивостей квадратичної функції та її графік, усюди присутнє пояснення перетворень графіків функцій та характеристика функції за її графіком. Обидва рівні включають вправи на побудову графіка квадратичної функції та розв'язування квадратних нерівностей.

Однак кожен рівень передбачає різну глибину вивчення: на поглибленому рівні вивчаються додаткові властивості функцій (парність, непарність, нулі, проміжки знакосталості тощо) та методи розв'язування нерівностей з параметрами, метод інтервалів. Поглиблений рівень включає більше типів перетворень графіків функцій (перетворення модуля даної функції та функції модуль аргументу для заданої функції. Поглиблений рівень додатково охоплює вивчення функцій ціла та дробова частина дійсного числа та їх графіки. На поглибленому рівні учні розв'язують більш складні задачі на дослідження властивостей квадратного тричлена з параметрами та графічні прийоми розв'язування задач з параметрами. На базовому рівні вивчається розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними та застосування цього для прикладних задач, що не включено на даному етапі у програму поглибленого рівня.

Таким чином, програма поглибленого рівня навчання математики у 9 класі націлена на більш глибоке розуміння і широке застосування математичних концепцій, тоді як базовий рівень охоплює основи і орієнтований на практичне застосування отриманих знань.

Вивчення математики у старшій школі нині відбувається за профілями. Проаналізуємо програму вивчення математики на поглибленому та профільному рівнях: для тих, хто поглиблено вивчав математику з 8 класу та тих, хто вивчає математику ґрунтовно з 10 класу. Рівень стандарту розглядати не будемо.

10 клас (профільний рівень)	10 клас (поглиблений рівень)
Зміст теми: 1. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості. 2. Перетворення виразів з коренями n -го степеня.	Зміст теми: 1. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня, його властивості. 2. Перетворення виразів з коренями n -го степеня.

3. Функція $\sqrt[n]{x}$. 4. Степінь з раціональним показником, його властивості. 5. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником. 6. Степенева функція, її властивості та графік. 7. Ірраціональні рівняння. 8. Ірраціональні нерівності. 9. Ірраціональні рівняння, нерівності з параметрами.	3. Функція $\sqrt[n]{x}$. 4. Ірраціональні рівняння. 5. Ірраціональні нерівності. 6. Системи ірраціональних рівнянь. 7. Степінь з раціональним показником, його властивості. 8. Перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником. 9. Степенева функція, її властивості та графік. 10. Оборотні функції. Взаємно обернені функції.
Очікувані результати: Учень/учениця: 1. Формулює означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником. 2. Обчислює, оцінює та порівнює значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками. 3. Зображує графік степеневої функції.	Очікувані результати: Учень/учениця: 1. Формулює означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником. 2. Обчислює, оцінює та порівнює значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками. 3. Зображує графік степеневої функції.

4. Розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.	4. Розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.
5. Застосовує властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.	5. Застосовує властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей

Програми обох рівнів включають основні властивості степеневі функції та її графік, розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, зокрема з параметрами. Вони обидві охоплюють перетворення виразів з коренями та степенями з раціональними показниками. Учні, що навчаються за обидвома навчальними програмами, повинні вміти обчислювати, оцінювати та порівнювати значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками.

Зрозуміло, що різною знову ж таки є глибина вивчення: поглиблений рівень включає вивчення оборотних функцій та взаємно обернених функцій, що не входить до програми профільного рівня. Також він включає розв'язування систем ірраціональних рівнянь, що не зазначено в програмі профільного рівня.

Таким чином, програма поглибленого рівня націлена на більш детальне і глибоке вивчення властивостей степеневих функцій та їх застосування, включаючи складніші теми і методи. Програма профільного рівня охоплює основи і направлена на практичне застосування отриманих знань.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Степеневі функції займають важливе місце у шкільній математичній освіті, оскільки вони знайомлять учнів з одним із базових класів функцій, що широко застосовується як у теоретичній, так і в прикладній математиці. Це формує в учнів загальне розуміння властивостей функцій, їх графіків, основних операцій над ними, що є необхідною підготовкою для подальшого вивчення математичного аналізу.

Оволодіння поняттям степеневі функції передбачає формування таких компетентностей, як здатність до побудови й аналізу графіків, розуміння видів функцій залежно від показника степеня, розв'язання рівнянь і нерівностей із використанням степеневих функцій. Через реалізацію наскрізних ліній учні розвивають навички міждисциплінарного підходу, застосовуючи знання про степеневі функції у фізиці, економіці, статистиці тощо. Це сприяє розвитку логічного і критичного мислення.

Аналіз програм показує, що профільний рівень надає більше можливостей для глибшого опрацювання теми, охоплюючи складніші питання, такі як властивості функцій із раціональним показником степеня, зростання й спадання функцій, їхні граничні значення. У порівнянні, рівень стандарт фокусується на загальних поняттях і практичних навичках роботи з графіками та розв'язанням основних задач. Виявлено, що для досягнення належного рівня математичної підготовки учнів на різних рівнях потрібно адаптувати підходи, які будуть відповідати обсягу й складності навчального матеріалу.

Такі висновки дають підстави для рекомендацій щодо оптимізації змісту навчання, враховуючи різний рівень підготовки учнів та їхні освітні потреби.

РОЗДІЛ II. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

2.1. Засоби, методи і форми, які доцільно використовувати для навчання степеневій функції

Для навчання степеневій функції доцільно використовувати різноманітні засоби, методи та форми, які сприятимуть глибокому розумінню теми та розвитку математичних навичок учнів. Ось деякі з них.

Серед засобів навчання можемо виділити візуальні матеріали, технічні засоби та використання друкованих матеріалів. Для учнів старшої школи такі засоби навчання є дієвими та підтримують зацікавленість учнів до вивчення математики.

Візуалізація нині відіграє важливу роль для сучасних підлітків. Нині це один з найдієвіших засобів для підтримки уваги учнів на навчальних заняттях. До візуальних матеріалів можна віднести готові графіки степеневих функцій, діаграми та таблиці, що є методичним забезпеченням майже будь-якого класу математики. До візуальних засобів віднесемо також відеоуроки та анімації, що показують поведінку степеневих функцій. Такі уроки можна знайти у запису на платформі Всеукраїнської школи онлайн [7] або серед методичних розробок вчителів-практиків [24], [25], [30]. Зауважимо, що можна розробити й власний методичний відео-комплекс.

Серед технічних засобів, що доцільно використовувати для вивчення степеневій функції, можемо обрати, інтерактивні дошки, комп'ютерні програми (GeoGebra, Desmos тощо), графічні калькулятори.

Зрозуміло, що традиційні друковані матеріали (підручники та посібники, збірники задач та практичні посібники, робочі зошити для учнів) також залишаються в арсеналі учителя.

Серед методів навчання можна обрати як традиційні методи (**пояснювально-ілюстративний, проблемний методи**), так і новітні методи: **метод проектів, ігровий метод**.

Пояснювально-ілюстративний метод для викладання розділу «Степеневі функції» можна використовувати при викладі нового матеріалу з використанням графіків та діаграм або для візуалізації основних властивостей степеневих функцій. Проблемний метод при вивченні степеневі функції передбачає створення проблемних ситуацій, що потребують застосування знань про степеневі функції або розв'язання задач з реального життя, що моделюються за допомогою степеневих функцій.

Можна за допомогою методу проектів запропонувати виконати дослідження застосування степеневих функцій у різних сферах (наприклад, фізика, економіка). Використання математичних ігор та квестів, що включають задачі на степеневі функції також є доцільним для закріплення отриманих знань і навичок.

Виконання практичних робіт і лабораторних досліджень або виконання вправ та задач різного рівня складності можна реалізувати за допомогою практичного методу на бінарних уроках з фізикою, хімією, економікою.

Наведемо форми роботи та приклади їх використання до теми «Степеневі функції». Фронтальні заняття передбачають колективне обговорення властивостей та графіків степеневих функцій. Групові форми роботи можна використати для розв'язання задач у малих групах і під час обговорення результатів роботи в групах. Індивідуальна робота при вивченні функцій такого виду – це самостійне виконання задач та вправ, проведення досліджень та написання учнів рефератів чи презентацій. Диференційоване навчання також потрібно реалізувати при вивченні степеневих функцій. Треба передбачити індивідуальний підхід до учнів з різним рівнем знань, що буде реалізовано через підбір завдань відповідно до рівня підготовки учнів.

Проектна діяльність є ефективною формою роботи з учнями. Вона повинна включати застосування степеневих функцій у реальних ситуаціях та презентацію проектів перед колективом.

Інтерактивні форми навчання передбачає використання інтерактивних симуляцій та моделей і роботу з навчальними платформами та онлайн-ресурсами.

У процесі роботи зі степеневою функцією учням обов'язково треба передбачити графічні завдання, завдання на побудову графіків степеневих функцій різних видів і аналіз властивостей графіків (зростання, спадання, екстремуми). Бажано виконати лабораторні роботи на бінарному уроці або дослідити реальні фізичні процеси за допомогою степеневих функцій і презентувати результати за допомогою проекту. Наведемо приклади кожного типу вказаних завдань.

Розглянемо реальні задачі, де головним математичним об'єктом виступає конкретна степенева функція.

Завдання 1. Об'єм резервуара: об'єм циліндричного резервуара для зберігання води задається функцією $V(h) = \pi r^2 h$, де $r = 2$ метри - радіус основи резервуара, h - висота заповнення резервуара. Обчисліть об'єм води у резервуарі при висоті заповнення 3 метри, 5 метрів і 8 метрів.

Розв'язання: Для кожної висоти заповнення обчислимо об'єм води за формулою: $V(h) = \pi r^2 h$, де $r = 2$

Висота 3 метри: $V(3) \approx 37.7$ кубічних метрів.

Висота 5 метрів: $V(5) \approx 62.8$ кубічних метрів.

Висота 8 метрів: $V(8) \approx 100.5$ кубічних метрів.

Відповідь: Об'єм води у резервуарі при висоті заповнення 3 метри становить приблизно 37.7 кубічних метрів, при висоті 5 метрів – приблизно 62.8 кубічних метрів, а при висоті 8 метрів – приблизно 100.5 кубічних метрів.

Завдання 2. Вартість виготовлення вальця: Вартість виготовлення металевого вальця залежить від його об'єму. Об'єм вальця визначається кубічною функцією $V(h) = \pi r^2 h$, де $r = 0,5$ метра – радіус основи, h - висота вальця. Вартість виготовлення металу становить 2000 гривень за кубічний метр. Обчисліть вартість виготовлення вальця при висоті 1 метр, 2 метри і 4 метри.

Розв'язання: Для кожної висоти обчислимо об'єм вальця за формулою: функцією $V(h) = \pi r^2 h$, де $r = 0,5$ метра.

Потім обчислимо вартість виготовлення, помноживши об'єм на вартість за кубічний метр.

Висота 1 метр: $V(1) = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 1 \approx 0,785$ кубічних метрів.

Вартість: $\text{Вартість}(1) = 0,785 \cdot 2000 = 1570$ гривень.

Висота 2 метри: $V(2) = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 2 = \pi \cdot 0,25 \cdot 2 \approx 1,57$ кубічних метрів.

Вартість: $\text{Вартість}(2) = 1,57 \cdot 2000 = 3140$ гривень.

Висота 4 метри: $V(4) = \pi \cdot 0,5^2 \cdot 4 = \pi \cdot 0,25 \cdot 4 \approx 3,14$ кубічних метрів.

Вартість: $\text{Вартість}(4) = 3,14 \cdot 2000 = 6280$ гривень.

Відповідь: Вартість виготовлення вальця при висоті 1 метр становить приблизно 1570 гривень, при висоті 2 метри – приблизно 3140 гривень, а при висоті 4 метри – приблизно 6280 гривень.

Завдання 3. Рух тіла під дією гравітації: камінь кидають вертикально вгору з початковою швидкістю 20 м/с. Висота $h(t)$ каменю через t секунд після кидка визначається рівнянням: $h(t) = 20t - 4,9t^2$, де h - висота в метрах, t - час в секундах. Знайдіть: а) Максимальну висоту, якої досягне камінь. б) Час, через який камінь повернеться на землю.

Розв'язання: а) Максимальна висота досягається в точці, де похідна функції висоти дорівнює нулю. Похідна: $h'(t) = 20 - 9,8t$. Прирівнюємо похідну до нуля: $20 - 9,8t = 0$, звідки маємо, що $t \approx 2,04$ секунди

Підставимо знайдене значення часу в оригінальне рівняння для знаходження висоти: $h(2.04) = 20 \cdot 2.04 - 4.9 \cdot (2.04)^2$, отримаємо $h(2.04) \approx 20.408$ метра.

б) Для визначення часу, через який камінь повернеться на землю, прирівнюємо висоту до нуля: $20t - 4.9t^2 = 0 \rightarrow t(20 - 4.9t) = 0$.

Отримуємо два розв'язки: $t_1 = 0$ (початковий момент кидка)

$$20 - 4.9t = 0 \rightarrow t_2 = 20/4.9 \approx 4.08 \text{ секунд}$$

Відповідь: а) Максимальна висота, якої досягне камінь, приблизно 20.408 метра. б) Камінь повернеться на землю через приблизно 4.08 секунд.

Завдання 4. Дальність польоту. Граната кидається з землі під кутом 45° з початковою швидкістю 30 м/с. Дальність польоту R визначається рівнянням:

$$R = \frac{v^2}{\sin(2\theta)} g, \text{ де } v = 30 \text{ м/с} - \text{початкова швидкість, } \theta = 45^\circ - \text{кут кидка,}$$

$$g = 9.89 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \text{прискорення вільного падіння. Обчисліть дальність польоту.}$$

Розв'язання: Підставимо значення в формулу:

$$R = \frac{v^2}{\sin(2\theta)} g = \frac{30^2}{\sin(2 \cdot 45^\circ)} \cdot 9.89 \approx 89.01 \text{ м.}$$

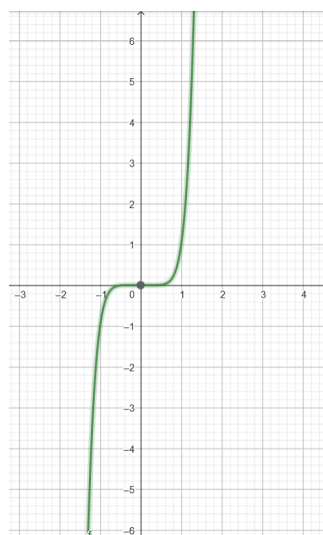
Відповідь: Дальність польоту гранати приблизно 89,01 метрів.

Побудова графіків степеневих функцій різних видів.

Завдання 5. Накресліть схематично графік функції $y = x^7$.

Розв'язання:

для



Варіант 1. Побудова графіка функції $y = x^7$ здійснюється за допомогою обчислення значень y різних значень x на проміжку від -2 до 2

x	$y = x^7$
-2	-128
-1.5	-17.0859375
-1	-1

Наносимо ці точки на координатну площину та з'єднуємо їх плавною лінією, отримуючи кубічну параболу.

Відповідь: Графік функції $y = x^7$ є кубічною параболою, у 1 та 3 координатних чвертях.

x	$y = x^7$
-0.5	-0.0078125
0	0
0.5	0.0078125
1	1
1.5	17.0859375
2	128

Варіант 2: оскільки степінь степеневої функції є непарним натуральним, то згідно з таблицею 1 у додатку маємо, що графіком функції є кубічна параболою.

Завдання 6. Побудуйте графік функції $y = x^{3/4}$.

Розв'язання: Для побудови графіка функції $y = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$ одразу проаналізуємо його степінь. Оскільки степінь степеневої функції є не цілим додатнім, то згідно з таблицею 1 у додатку маємо, що графіком функції є графік, аналогічний до графіка $y = \sqrt{x}$

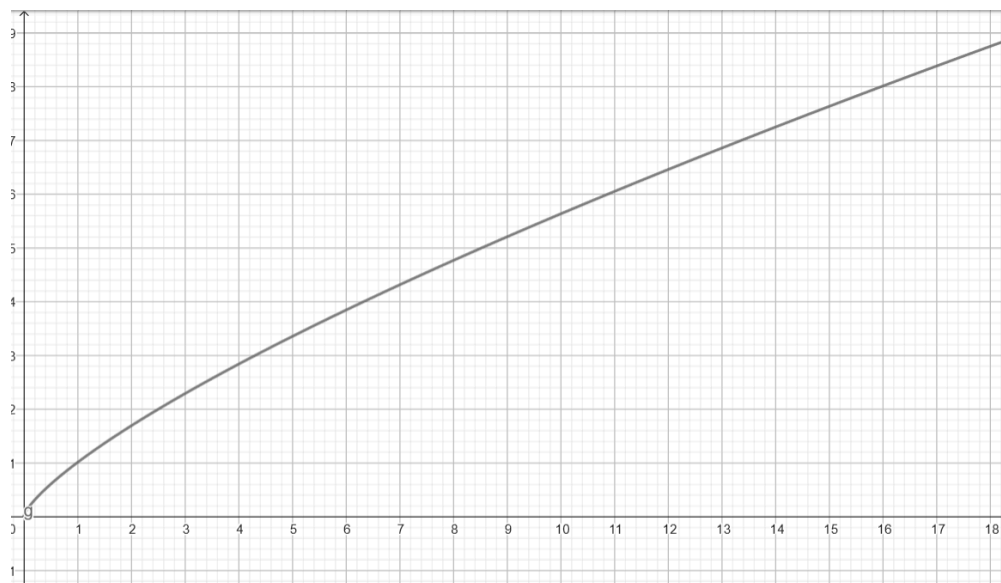
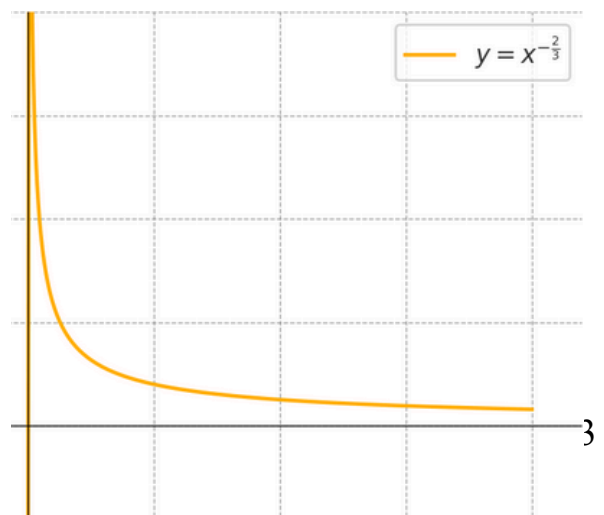


Рисунок 2.2. Графік функції $y = x^{3/4}$.

Відповідь: Графік функції $y = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$ має форму, подібну до графіка $y = \sqrt{x}$



Завдання 7. Побудуйте графік функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$.

Розв'язання. Оскільки степінь степеневої функції є не цілим від'ємним _____ числом, то згідно з таблицею 1 у додатку маємо, що графіком функції є така лінія, що вказана на рис.2.3.

Відповідь: Графіком функції $y = x^{-\frac{2}{3}}$ є крива на рис 2.3.

До графічних завдань можемо віднести й завдання на порівняння значень степеневої функції, оскільки при їх виконанні потрібно безпосередньо виконати схематичну побудову графіка функції або скористатися таблицею 1 у додатку.

Завдання 8. Порівняйте значення функції $f(5)$ і $f(5, 2)$, $f(\sqrt{3})$ і $f(1, 7)$, якщо $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$ зростає на всій своїй області визначення, то це означає, що більшому аргументу відповідає більше значення функції. Порівняємо аргументи й отримаємо

$$5, 2 > 5 \rightarrow f(5, 2) > f(5); \sqrt{3} > 1, 7 \rightarrow f(\sqrt{3}) > f(1, 3).$$

Завдання 9. Порівняйте значення функції $f(1, 2)$ і $f(1, 3)$, $f(-5)$ і $f(-5, 01)$, $f(7, 04)$ і $f(-7, 04)$, $f(-2, 7)$ і $f(2, 8)$, якщо $f(x) = x^{-108}$.

Розв'язання. Проаналізуємо показник степеня функції $f(x) = x^{-108}$. Показник $\alpha = -108 \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$, α – парне, тоді графік функції має дві вітки, що розташовані у 1 та 2 координатних чвертях та пряма $x=0$ є асимптотою. На проміжку $(-\infty; 0)$ функція зростає, на $(0, +\infty)$ – спадає. Розглянемо значення аргументів. Оскільки $1, 2 < 1, 3$, то $f(1, 2) > f(1, 3)$ як спадна функція на $(0, +\infty)$. Оскільки $-5 > -5, 01$, то $f(-5) > f(-5, 01)$ як зростаюча функція на $(-\infty; 0)$.

Підхід у порівняння аргументів не підходить для встановлення знаку останніх значень двох функцій, оскільки аргументи належать різним

проміжкам монотонності. Для порівняння $f(7, 04)$ і $f(-7, 04)$ можна використати той факт, що функція $f(x) = x^{-108}$ є парною, тоді за її означенням $f(7, 04) = f(-7, 04)$. Для порівняння $f(-2, 7)$ і $f(2, 8)$ використаємо безпосередньо графік функції й зауважимо, що функція є парною та $|-2, 7| < |2, 8|$, маємо тоді, що $f(-2, 7) > f(2, 8)$.

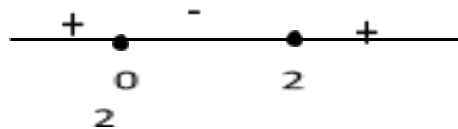
Аналіз властивостей графіків (зростання, спадання, екстремуми)

Завдання 1: Дослідити функцію $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на зростання та спадання.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції: $y' = 3x^2 - 6x$.

Розв'язуємо рівняння $y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ або $x = 2$.

Аналізуємо знаки похідної на інтервалах:



1. $x < 0$: $y' > 0$ (функція зростає).
2. $0 < x < 2$: $y' < 0$ (функція спадає).
3. $x > 2$: $y' > 0$ (функція зростає).

Відповідь: Функція зростає на інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(2, \infty)$ і спадає на інтервалі $(0, 2)$.

Завдання 2: Дослідити функцію $y = x^4 - 4x^2$ на екстремуми.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції: $y' = 4x^3 - 8x$. Розв'язуємо рівняння $y' = 0$, отримаємо $x = 0$ або $x = \pm\sqrt{2}$. Аналізуємо другу похідну: $y'' = 12x^2 - 8$. При $x = 0$: $y''(0) = -8$ (максимум). При $x = \pm\sqrt{2}$: $y''(\pm\sqrt{2}) = 16 > 0$ (мінімум).

Відповідь: Функція має максимум при $x = 0$ та мінімум при $x = \pm\sqrt{2}$.

Завдання 3: Дослідити функцію $y = -x^2 + 4x$ на зростання, спадання та екстремуми.

Розв'язання: Знайдемо похідну функції: $y' = -2x + 4$. Розв'язуємо рівняння $y' = 0$, маємо $x = 2$. Аналізуємо знаки похідної на інтервалах: $x < 2 : y' > 0$ (функція зростає). $x > 2 : y' < 0$ (функція спадає). Функція має максимум при $x = 2 : y(2) = 4$.

Відповідь: Функція зростає на інтервалі $(-\infty, 2)$, спадає на інтервалі $(2, \infty)$ і має максимум при $x = 2$.

Для ефективного освоєння учнями степеневі функції можна їм запропонувати комплекс проектів, які бажано реалізувати разом з учителем фізики. Для учнів 7 – 8 класів можна навести приклади різних фізичних процесів, які можуть бути описані лінійною функцією та наголосити, що у всіх випадках існує прямо пропорційна залежність між двома змінними, що дозволяє використовувати лінійні рівняння для їх моделювання:

Рівномірний прямолінійний рух. При рівномірному прямолінійному русі тіла швидкість залишається постійною, і відстань, яку проходить тіло, прямо пропорційна часу: $s = vt$, де s – пройдена відстань, v – швидкість, t – час.

Закон Гука. Закон Гука описує поведінку пружних тіл, коли деформація пружини прямо пропорційна прикладеній силі: $F = kx$, де F – сила, k – коефіцієнт жорсткості пружини, x – деформація пружини.

Закон Ома для ділянки кола. Закон Ома описує залежність напруги на резисторі від струму через нього: $U = IR$, де U – напруга, I – струм, R – опір.

Теплове розширення. Лінійне теплове розширення матеріалу залежить від зміни температури: $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, де ΔL – зміна довжини, α – коефіцієнт лінійного розширення, L_0 – початкова довжина, ΔT – зміна температури.

Залежність маси від об'єму. Для однорідних матеріалів маса прямо пропорційна об'єму $m = \rho V$, де m – маса, ρ – густина матеріалу, V – об'єм.

Закон Бойля-Маріотта. Для ізотермічного процесу (постійна температура) в ідеальному газі об'єм газу обернено пропорційний тиску: $PV = \text{const}$, де P – тиск, V – об'єм.

Споживання палива. Споживання палива автомобіля на певну відстань прямо пропорційне цій відстані за умови постійних витрат: $F = rf$, де F – кількість спожитого палива, r – витрата палива на одиницю відстані, f – відстань.

Для учнів 9 класу можна запропонувати метод проектів за темами, які демонструють різні фізичні процеси, які можуть бути описані квадратичною функцією $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b і c – константи. Така функція описує багато фізичних процесів, де існує квадратична залежність між змінними. Ось кілька прикладів фізичних процесів, які описуються квадратичною функцією, та їх можна дослідити у проекті:

Рівномірно прискорений рух. При рівномірно прискореному русі відстань, яку проходить тіло, пропорційна квадрату часу $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, де s – пройдена відстань, v_0 – початкова швидкість, a – прискорення, t – час.

Вільне падіння. При вільному падінні тіла під дією сили тяжіння, без опору повітря, відстань, яку проходить тіло, пропорційна квадрату часу $h = \frac{1}{2}gt^2$, де h – висота падіння, g – прискорення вільного падіння, t – час падіння.

Потенціальна енергія пружини. Потенціальна енергія, накопичена в пружині при її розтягненні або стисканні, пропорційна квадрату зміщення $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, де E_p – потенціальна енергія, k – коефіцієнт жорсткості пружини, x – зміщення від рівноважного положення.

Кінетична енергія. Кінетична енергія тіла пропорційна квадрату його швидкості $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, де E_k – кінетична енергія, m – маса тіла, v – швидкість тіла.

Параболічний рух. Рух тіл під дією сили тяжіння, коли початкова швидкість має як горизонтальну, так і вертикальну компоненти. Траєкторія руху описується параболою $y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$, де y – висота, x – горизонтальна відстань, θ – кут між початковою швидкістю і горизонталлю, g – прискорення вільного падіння, v_0 – початкова швидкість.

Опір провідника. Опір провідника пропорційний квадрату його температури (при певних умовах) $R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0)^2)$, де $R(T)$ – опір при температурі T , R_0 – початковий опір при температурі T_0 , α – температурний коефіцієнт опору.

У старшій школі можна вже створювати проекти про степеневу функцію з від’ємними або не цілими степенями, які виникають при дослідженні хімічних або фізичних процесів. Це, наприклад, загальновідомі закони всесвітнього тяжіння Ньютона і закон Кулона для точкових зарядів. У цих випадках залежність сили від відстані r має вигляд степеневої функції з від’ємним степенем -2 . Окрім цих, умовно тривіальних, приладів можна навести й такі теми для досліджень.

Інтенсивність світла від точкового джерела. Інтенсивність світла від точкового джерела зменшується пропорційно квадрату відстані від джерела $I = \frac{I_0}{r^2}$, де I – інтенсивність світла на відстані r від джерела, I_0 – початкова інтенсивність на одиничній відстані.

Закон затухання звукової хвилі. Інтенсивність звуку I на відстані r від джерела може описуватися формулою $I = I_0 \left(\frac{1}{r}\right)^n = I_0 \frac{1}{r^n}$, де I_0 – початкова інтенсивність звуку, n – показник залежності (зазвичай $n = 2$ для сферичної хвилі).

Каталітичні реакції. У багатьох каталітичних реакціях швидкість реакції залежить від концентрації каталітика за степеневим законом.

Наприклад: $v = k[\text{Каталітик}]^n$, де n може бути дробовим числом, що відображає складніші залежності у каталітичних системах.

Електрохімічні реакції. Швидкість реакції на електроді може залежати від потенціалу за степеневою функцією: $i = k(E - E_0)^n$ де i – густина струму, E – електродний потенціал, E_0 – стандартний потенціал, а n може бути дробовим числом.

Розчинність речовин. Розчинність деяких солей у розчиннику може змінюватися залежно від концентрації іншої речовини в розчині за степеневим законом. Наприклад, для розчинності солі A у присутності іону X розчинність $S = kX^{-nS}$, де n – величина, що може бути дробовою і відображає залежність між розчинністю та присутністю інших іонів.

Фотохімічні реакції. Інтенсивність поглинання світла і швидкість реакції можуть залежати від інтенсивності світла у степеневій залежності: $v = kI^n$, де I – інтенсивність світла, n – величина, яка може бути дробовою, що відображає складні механізми взаємодії світла з молекулами.

Такі проекти продемонструють взаємозв'язок наукових підходів.

2.2. Методичні рекомендації для організації вивчення степеневої функції учнів профільної школи.

Перш ніж перейти до опрацювання поняття степеневої функції у старшій школі бажано провести систематизацію й узагальнення набутих знань учнів, якими вони володіють про степеневу функцію, починаючи з 7 класу. Тут велику роль має відігравати саме самостійна робота учнів, оскільки останні на даному етапі вже володіють отриманими знаннями. Можна провести таке комбіноване заняття у формі семінару з метою повторення та систематизації отриманих знань. Дієвою може бути групова робота на такому занятті.

На такому занятті обов'язково потрібно повторити основні поняття функціонально ліній: області визначення і значень; нулі; проміжки зростання і спадання; побудова графіка; способи визначення.

Обов'язково вчитель має передбачити

1. завдання на знаходження області визначення функцій:

1) $y = 3x + 4$,

6) $y = x^2 + 5x + 4$,

2) $y = \frac{3}{x}$,

7) $y = \frac{3}{x} + 4$;

3) $y = \frac{4}{x^2 - 4}$,

8) $y = \frac{3}{4x - 1}$

4) $y = \sqrt{x} + 2$,

5) $y = \sqrt{x + 2}$,

2. побудову графіка функції, у тому числі й за допомогою елементарних перетворень

1) $y = -5x + 1$,

5) $y = \sqrt{x + 3}$,

2) $y = x^3 - 7$,

6) $y = \frac{1}{5x}$,

3) $y = (x - 5)^2$,

7) $y = -\frac{2}{x}$.

4) $y = \sqrt{x} - 2$,

3. парність/непарність:

$y = -x^3 - x^5$, $y = x^2 - 4$, $y = -\frac{6}{x}$, $y = x^2 + 5x + 4$, $y = 2x^3$;

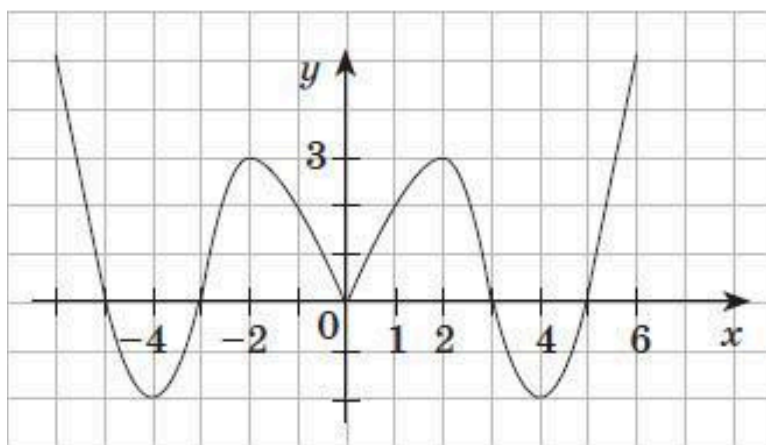
4. завдання на властивості кореня. Дано функцію $y = \sqrt[6]{x^6} + x$. Знайти $f(-7)$, $f(5)$. Порівняйте ці значення.

Далі можна організувати учнів для роботи у двох групах та дати їм взаємообернені завдання [27].

Завдання для групи №1. Відомо, що функція f непарна, нулі функції $x = -6$, $x = 0$, $x = 6$; найменшого значення, що дорівнює -2 , функція набуває при $x = -3$. Тоді при $x = 3$ функція набуває значення, яке дорівнює 2. Функція спадає на проміжках $[-8; -3]$ і $[3; 2]$, зростає на проміжку $[-3; 3]$. Областю визначення функції є множина $[-8; 3]$, множиною значень функції є множина $[-2; 2]$.

Користуючись цими даними, накресліть ескіз графіка функції f .

Завдання для групи №2.

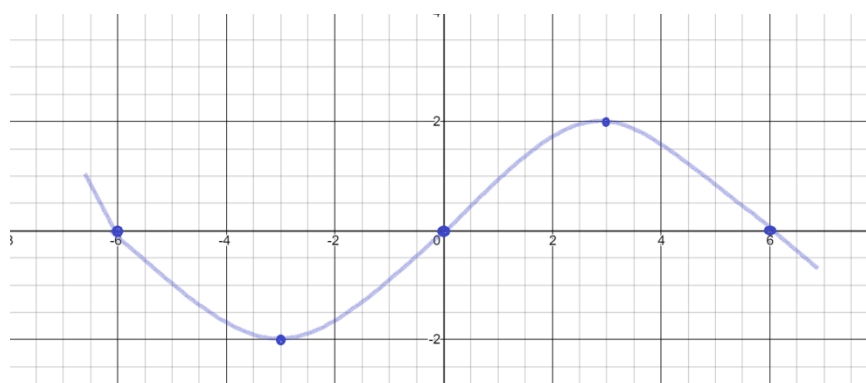


За графіком функції, який подано на рисунку, опишіть такі її властивості.

1. $D(y)$
2. $E(y)$
3. Нулі:
4. $y > 0$
5. $y < 0$
6. Функція зростає на проміжках:
7. Функція спадає на проміжках:

Відповіді.

Група №1



Група №2

1. $D(y) = [-6; 6]$
2. $E(y) = [-2; 5]$
3. Нулі: $-5; -3; 0; 3; 5$
4. $y > 0$ на проміжку $[-6; -5) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (5; 6]$

5. $y < 0$ на проміжку $(-5; -3) \cup (3; 5)$

6. Функція зростає на проміжках: $[-4; -2]$, $[0; 2]$, $[4; 6]$

7. Функція спадає на проміжках: $[-6; -4]$, $[-2; 0]$, $[2; 4]$

Для подальшої роботи можна запропонувати самостійну роботу, що містить такі завдання:

1) Знайти $f(3)$, якщо $f = \frac{x}{x^2-1}$.

2) Чи проходить графік функції $y = -x^4$ через точки $N(0, 0)$, $M(1, 1)$, $L(-3, -\frac{1}{81})$?

3) Побудуйте графік функції $y = -3(x+2)^2$. Використовуючи графік, знайдіть нулі; проміжки знакосталості; проміжки зростання та спадання функції.

Для подальшої роботи можна запропонувати самостійну роботу, що містить такі завдання:

1) Знайти $f(3)$, якщо $f = \frac{x}{x^2-1}$.

2) Чи проходить графік функції $y = -x^4$ через точки $N(0, 0)$, $M(1, 1)$, $L(-3, -\frac{1}{81})$?

3) Побудуйте графік функції $y = -3(x+2)^2$. Використовуючи графік, знайдіть нулі; проміжки знакосталості; проміжки зростання та спадання функції.

Подальше узагальнення степеневих функцій включає широкий спектр математичних понять, таких як степінь з ірраціональним показником, розв'язання рівнянь та систем ірраціональних рівнянь. Вивчення цієї теми вимагає ретельного дослідження властивостей степеневих функцій, побудови їх графіків та аналізу їхньої поведінки.

Для того, щоб зацікавити учнів, доцільно використовувати різноманітну додаткову літературу. Можна також запропонувати творче завдання щодо

застосування степеневих функцій у різних галузях науки та техніки у формі проекту.

У підручниках [10], [16], [22] матеріал про степеневі функції структуровано за показниками степеня. Вивчення починають зі степеневих функцій з натуральним показником. Спочатку надають означення функції виду $y = x^n$, $n \in N$ як степеневі функції з натуральним показником. Дослідження властивостей таких функцій потрібно проводити окремо для випадків, коли n є парним або непарним натуральним числом.

У першому випадку $n = 2k$, $k \in N$,

При $k = 1$ ми отримуємо квадратичну функцію $y = x^2$. Властивості та графік цієї функції вивчалися в курсі математики 8 класу. Оскільки вираз x^{2k} завжди приймає лише невід'ємні значення для будь-якого x , область значень цієї функції – це проміжок $[0; +\infty)$. Для кожного $a \geq 0$ існує таке значення x , що $x^{2k} = a$. Таким чином, область значень функції $y = x^n$, де n – парне натуральне число, є $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, тоді $x^{2k} > 0$, а проміжки $(-\infty; 0]$ і $[0; +\infty)$ є проміжками знакосталості, де n – парне натуральне число. Функція $y = x^n$, де n – парне натуральне число, є парною, оскільки для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Остання рівність також доводить, що графік такої функції симетричний відносно осі ординат.

Розглядаючи довільні числа $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, такі що $x_1 < x_2$, маємо, що $-x_1 > -x_2$. Використовуючи властивості числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$, звідки випливає $(x_1)^{2k} > (x_2)^{2k}$. Отже, функція $y = x^n$, де n – парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Ці властивості визначають загальний вигляд графіка функції, що наведений у таблиці 1 у додатку.

Другий випадок $n = 2k + 1, k \in N$ або $n = 0$.

При $k = 0$ функція має вигляд $y = x$, властивості та графік якої були розглянуті в курсі алгебри 7 класу. Якщо випадок $n = 2k + 1, k \in N$, то для кожного значення аргументу x існує таке значення a , що $x^{2k+1} = a$. Це означає, що областю значень функції $y = x^n$, де $n = 2k + 1, k \in N$, є множина всіх дійсних чисел

Якщо $x < 0$, тоді $x^n < 0$; якщо $x > 0$, тоді $x^n > 0$, де $n = 2k + 1, k \in N$. Тому проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками сталості знака функції $y = x^n$, де n – непарне натуральне число.

Зауважимо, що $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, отже функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною функцією. Це означає, що графік цієї функції є симетричним відносно початку координат.

Для закріплення знань про властивості степеневі функції з натуральним показником бажано за шаблоном заповнити таблицю 2.1.

Таблиця 2.1. Властивості степеневі функції

	Функція $f(x) = x^n$	
Властивості	$n = 2k, k \in N$	$n = 2k + 1, k \in N$
Область визначення		
Множина значень		
Нулі		
Знакосталість $y > 0$		
Знакосталість $y < 0$	-	
Парність / непарність		
Проміжки зростання		
Проміжки спадання.		-

Заповненою ця таблиця є в підручнику Істера О.С. [10] або у Мерзляка А. Г. [16].

Після засвоєння теоретичного матеріалу можна перейти до практичних завдань для закріплення поняття про степеневу функцію з натуральним показником. Тут бажано розглянути завдання на порівняння значень функції, побудову графіків функцій, у т. ч. за допомогою елементарних перетворень та розв'язувати рівняння. Наведемо приклади таких завдань.

Завдання. Порівняйте значення функції $f(4)$, $f(7)$, якщо $f(x) = x^{17}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ є зростаючою на всій своїй області визначення, то порівнюючи аргументи цих функцій, приходимо до висновку, що $f(4) < f(7)$.

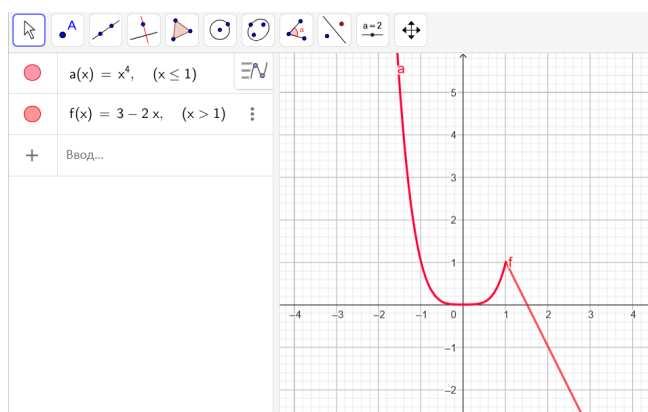
Завдання. Порівняйте значення функції $f(-11)$, $f(7)$, якщо $f(x) = x^{12}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ має як проміжки зростання, так і проміжки спадання на всій своїй області визначення, тому порівнюємо аргументи цих функцій за модулем у силу парності цих функцій і приходимо до висновку, що $f(-11) > f(7)$.

Наведемо приклади завдань побудови графіків функції, які у залежності від області визначення мають різні криві.

Завдання. Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} x^4, & x \leq 1 \\ 3 - 2x, & x > 1 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

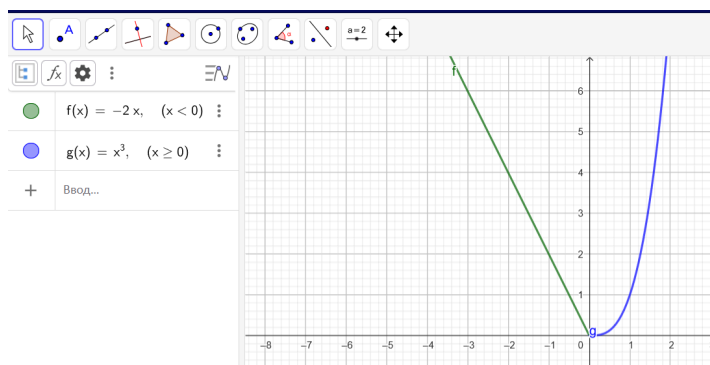


Рисунок 2.1

Цікавими є завдання на знаходження розв'язків рівняння або оцінку кількості розв'язків рівнянь. У підручнику [11] автор пропонує графічно знаходити їх кількість у тих рівняннях, обидві частини якого є степеневими функціями. Наприклад, у рівнянь $x^6 = x + 2$, $\frac{6}{x} = x^8$ два і один розв'язки відповідно (див. Рис 2.2).

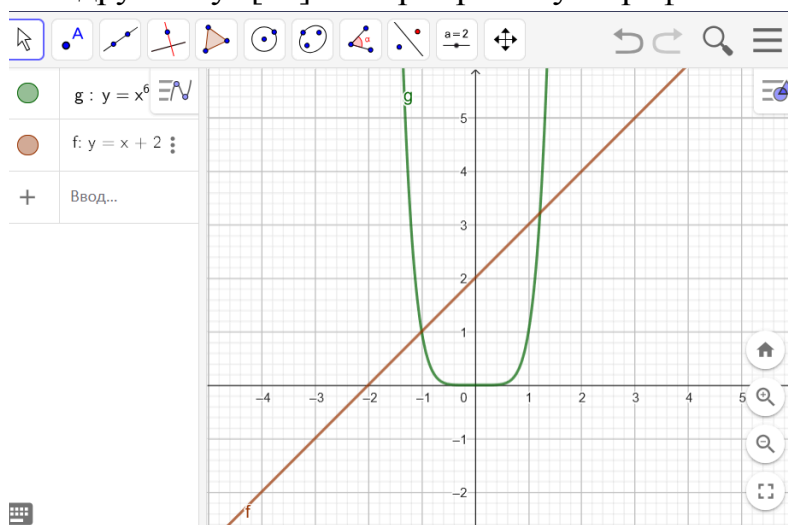


Рисунок 1.2

Також автор пропонує знайти корені тих рівнянь, які зводяться до квадратних $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$, $x^{16} + 5x^8 + 4 = 0$ методом заміни змінної та розв'язувати рівняння виду $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ для конкретного значення a графічним способом чи аналітично у залежності від параметра a .

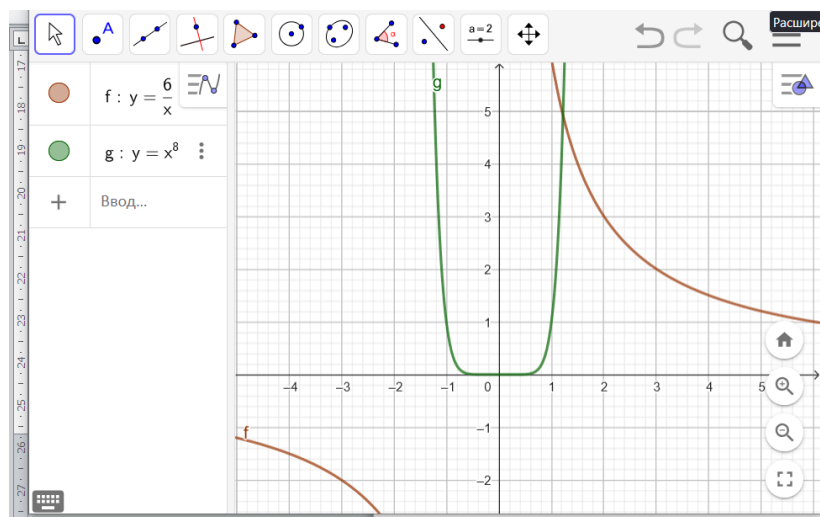


Рисунок 2.3

Неповні рівняння вигляду $x^n = a$, де $a \in R$, $n \in N$, і $n > 2$ розв'язується графічно, з урахуванням того, чи n є парним чи непарним натуральним числом.

Якщо для парного натурального n , то

- при $a > 0$, рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$ та $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- при $a = 0$, рівняння має один корінь: $x = 0$.
- при $a < 0$, рівняння коренів не має.

При непарному значенні n рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь, який можна обчислити як $x = \sqrt[n]{a}$.

Завдання. Розв'язати рівняння

- a) $(2x - 1)^8 = 1$,
- b) $x^6 = -1$,
- c) $x^5 = 19$.

Розв'язання.

- a) $(2x - 1) = \sqrt[8]{1}$ або $(2x - 1) = -\sqrt[8]{1}$, звідки $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
- b) Розв'язку нема.
- c) $x = \sqrt[5]{-19}$ – ірраціональне число.

Параметричні рівняння для степеневих функцій з натуральним степенем також треба розглянути у класах з поглибленим вивченням. Вони є симбіозом властивостей кореня n степеня і степеневих функцій.

Завдання. Розв'язати рівняння у залежності від параметра a .

a) $x^8 = a - 1$,

b) $x^5 = a + 7$,

c) $x^2 = a - 2$.

Розв'язання.

a) Оскільки показник кореня є парним числом, то він має сенс при $a - 1 \geq 0 \rightarrow a \geq 1$ та $x_1 = \sqrt[8]{a - 1}$ або $x_1 = -\sqrt[8]{a - 1}$. Коли $a < 1$, то рівняння розв'язку немає.

b) Оскільки показник кореня є непарним числом, то величина $x = \sqrt[5]{a + 7}$ визначений для будь-якого дійсного значення параметра a .

c) Оскільки показник кореня є парним числом, то він має сенс при $a - 2 \geq 0 \rightarrow a \geq 2$ та $x_1 = \sqrt[2]{a - 2}$ або $x_1 = -\sqrt[2]{a - 2}$. Коли $a < 2$, то рівняння розв'язку немає.

Після засвоєння поняття степеневих функцій з натуральним або цілим додатним показником можна перейти до засвоєння степеневих функцій з цілим від'ємним показником, з не цілим (від'ємним і додатним) показником та рівнянь з степеневими функціями.

Функція $y = x^0 = 1$, визначена для усіх x , окрім $x = 0$, оскільки 0^0 не має змісту. Графіком такої функції є пряма, паралельна осі абсцис, що знаходиться від неї на відстані 1.

Коли показник є цілим від'ємним, то функції $y = x^n$ є не визначеною лише при $x = 0$. Подальший «поділ» відбувається у залежності від парності степеня показникової функції

При $n = -(2k + 1)$, $k \in N_0$ степенева функція має властивості, аналогічні до властивостей функції $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ (див табл. 1 у додатку). Тобто, функція $y = x^n$, $n = -(2k + 1)$, $k \in N_0$ виглядає як обернена пропорційність, її область визначення - усі дійсні, окрім $x \neq 0$, оскільки при $x = 0$ функція стає невизначеною; графік симетричний відносно осі y , якщо n - парне число (наприклад, $y = \frac{1}{x^2}$) і відносно початку координат, якщо n - непарне (наприклад, $y = \frac{1}{x^3}$). При $x \rightarrow 0$, маємо, що y прямує до нескінченності або мінус нескінченності (наближається до осі y). При $x \rightarrow \pm \infty$ маємо, що $y \rightarrow 0$, тобто графік наближається до осі x , але ніколи її не перетинає).

Якщо n - додатнє, але неціле число (наприклад, $(n = \frac{1}{2}, \frac{4}{3})$), то така степенева функція $y = x^n$, $n > 0$, $n \notin Z$ описує дробовий степінь, наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. У такої функції область визначення лише $x \geq 0$ (як у випадку $y = \sqrt{x}$). Графік розташований у першій координатній чверті. При $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, а при $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$ (функція зростає).

Особливості графіку залежать від того, чи дробовий від'ємний степінь більший за 1, або менший за 1. Якщо степінь є додатнім дробом, що менший за 1, то графік функції $y = x^n$, $n > 0$, $n \notin Z$ є аналогічним до графіка $y = \sqrt{x}$. Якщо степінь додатній дріб, що більший за одиницю, то графік подібний до «правої» гілки квадратичної параболи.

Для закріплення особливостей такої степеневої функції можна розглянути такі завдання.

Завдання 1: Дослідити поведінку функції $y = x^2$. Опишіть її область визначення, проміжки зростання і спадання, а також асимптоти.

Завдання 2: Побудуйте графік функції $y = x^{\frac{3}{2}}$. Вкажіть, як змінюється функція при $x \rightarrow +\infty$, і поясніть, чому вона не визначена для від'ємних значень x .

Завдання 3: Розгляньте функцію $y = x^{\frac{1}{2}}$. Який вигляд має графік, коли $x > 0$ і $x < 0$? Чому область визначення функції обмежена лише додатними значеннями x ?

Завдання 4: Визначте, чи є функція $y = \frac{1}{x^3}$ парною, непарною або жодною з цих. Побудуйте графік та обґрунтуйте свої висновки про симетричність графіка цієї функції.

Якщо степінь n в степеневій функції $y = x^n$ є не цілим від'ємним числом (наприклад, $n = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$), то функція $y = x^n, n < 0, n \neq Z$ має своєю областю визначення множину додатних дійсних чисел, є спадною на всій своїй області визначення. При $x \rightarrow +\infty$, y прямує до нуля. Таким чином, функція $y = x^n, n < 0, n \neq Z$ наближається до осі абсцис але ніколи її не перетинає, тобто вісь абсцис є горизонтальною асимптотою. Графік функції розміщений лише у правій частині площини.

Приклади тестових завдань

1. Яка область визначення функції $y = x^{-\frac{1}{2}}$?

A. B. C. D.

$x > 0$ $x < 0$ $x \geq 0$ $x \neq 0$

Правильна відповідь: A.

2. Якою буде поведінка функції $y = x^{-\frac{3}{2}}$ при $x \rightarrow 0$?

A. B. C. D.

$y \rightarrow 0$ $y \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow -\infty$ y набуває сталого значення

Правильна відповідь: B.

3. Як змінюється значення функції $y = x^{-\frac{1}{3}}$ при $x \rightarrow +\infty$?

A.

B.

C.

D.

$y \rightarrow 0$

$y \rightarrow +\infty$

$y \rightarrow -\infty$

у набуває сталого
значення

Правильна відповідь: A.

4. Яка з наведених функцій не визначена для від'ємних значень x ?

A.

B.

C.

D.

$y = x^{-\frac{1}{3}}$?

$y = x^{-\frac{5}{3}}$?

$y = x^{-\frac{2}{3}}$?

Усі
варіанти
правильні

Правильна відповідь: D.

Окрім тестових, можна запропонувати такі завдання дослідницького характеру:

Завдання. Дослідити властивості функції $y = x^{-\frac{1}{3}}$. Побудувати графік, вкажіть область визначення та дослідить, що відбувається з y при $x \rightarrow 0$ та $x \rightarrow +\infty$. Чому графік визначений для від'ємних x ?

Завдання. Розгляньте функцію $y = x^{-\frac{3}{2}}$. Чому область визначення цієї функції обмежена лише $x > 0$? Опишіть поведінку функції на проміжках $(0, 1)$ та $(1, +\infty)$.

Завдання. Дослідити асимптотичну поведінку функції $y = x^{-\frac{5}{4}}$. Побудуйте графік і знайдіть, як функція наближається до осі x при великих значеннях x .

Можна для закріплення отриманих понять дати для виконання завдання на порівняння значення степеневі функції з різними варіантами показників степенів.

Завдання. У функції $g(x) = x^n$ парним чи непарним є натуральне число n , якщо

1. $g(-3) > g(-2)$;

2. $g(-3) > g(-4)$;
3. $g(3) > g(4)$;
4. $g(-8) = g(8)$;

Правильні відповіді:

1. та 3. Оскільки $-3 < -2$, $3 < 4$ то функція є спадною, у показнику степеня функції $g(x) = x^n$ число n є парним.
2. Оскільки $-3 > -4$, то функція є зростаючою, у показнику степеня функції $g(x) = x^n$ число n є непарним.
4. Рівність $g(-8) = g(8)$ означає, що функція $g(x)$ є симетричною відносно осі абсцис, це можливо тоді, коли у показнику степеня функції $g(x) = x^n$ число n є парним.

2.3. Використання на уроці цифрових засобів навчання для узагальнення і систематизації знань учнів з теми «Степенева функція»

Для ефективного освітнього процесу сьогодні у закладах освіти усіх рівнів активно використовують цифрові засоби навчання та технології. Окремі цифрові технології ми опанували під час виробничої практики у закладах загальної середньої освіти.

Беззаперечним лідером серед цифрових засобів для вивчення степеневих функцій є сервіс Geogebra, що дозволяє виконувати побудови різних степеневих функцій, графічним способом розв'язувати рівняння, що містять степеневі вирази. Більшість рисунків у цій кваліфікаційній роботі виконані саме завдяки цьому сервісу. Основної складністю є лише відсутність навичок роботи з цим застосунком або утрудненість з роботою вбудованого формульного редактора, який допомагає з аналітичним записом виразу, однак це все може усунути практика постійного використання сервісу у повсякденній освітній діяльності учителя.

З метою підвищення зацікавленості учнів у вивченні математики засобами нових інформаційних технологій навчання було розроблено

тестування засобами Forms. Об'єкт Forms був обраний через легкість роботи при проектуванні тесту з математичними виразами і формулами. Цей засіб не потребує додаткових налаштувань і програмних розширень для роботи з виразами, що значно зменшує час на розробку і тестування створеного опитування.

Тестуванню передував урок з алгебри і початків аналізу у 10 класі на тему «Корінь n -го степеня та його властивості», де були засвоєні всі відомості про корінь n -го степеня з дійсного числа a , умови його існування, арифметичний корінь n -го степеня та властивості коренів (див. Додаток В).

Під час наступного уроку була організована консультація у вигляді круглого столу для закріплення інформації стосовно кореня та обговорення завдань підвищеної складності, що потребують обчислення коренів. Учні обговорили і розв'язали запропоновані завдання протягом 15 хвилин, а потім перейшли за посиланням [26], де вказали правильні відповіді, отримані при розв'язуванні.

Форма для тестування містить три розділи. Перший – загального характеру. Тут треба вказати ПІБ так клас, у якому навчається. Другий – завдання початкового рівня, третій – завдання середнього та високого рівня. У тесті є можливість обмеження часу для його проходження, але цю функцію не активували.

Тестування викликало багато позитивних емоцій, особливо можливість введення відповіді за допомогою вбудованого редактора формул. Зведені результати тестування можна побачити тут [26].

Кількість цифрових застосунків та їх активне використання сьогодні дозволяють безоплатно зареєструватися на багатьох сервісах і користуватися їхніми готовими розробками. Це, на наш погляд, значна методична допомога і підтримка сучасного молодого вчителя, що пов'язав своє життя з викладанням математики.

Ми активно використовували і досліджували різнопланові сервіси при написанні кваліфікаційної роботи. Серед них виділили ті, що дозволяють

активно використовувати існуючі розробки та доповнювати їх своїми надбаннями: інтерактивні дошки (окрім Padlet, рекомендуємо дошку Miro), робота з навчальними відео (сервіс Edpuzzle), вікторини (окрім загальновідомого Kahoot, рекомендуємо Wordwall та Quizizz).

Під інтерактивними дошками розуміють онлайн-платформи, що дозволяють вчителям та учням взаємодіяти в реальному часі на цифровій дошці. Вони підтримують малювання, написання тексту, вставку зображень, формул, додавання файлів та інші функції, які допомагають у візуалізації матеріалу. Такі дошки особливо корисні для дистанційного навчання, але також можуть застосовуватися і на очних заняттях, якщо клас обладнаний інтерактивною панеллю.

Перевагами інтерактивних дошок є організація спільної роботи учнів та вчителів, можливість зберігання матеріалів для подальшого опрацювання та гнучкість у навчанні – для різнопланових завдань.

Під час вивчення степеневих функцій можна використати дошку Miro для роботи над груповими проєктами, презентації матеріалів заняття, опитування генерації ідей, перевернутих класів або збору зворотного зв'язку від учнів. Розроблені заздалегідь електронні дошки зі схемами допомагають швидко візуалізувати та систематизувати отримані знання про степеневі функції та використати їх у повсякденній діяльності. Цікаво, що цю дошку можна використовувати як сервіс для побудови схем і графіків з метою подальшого друку і роботи у звичному форматі. Прикладом використання дошки для вивчення степеневі функції є досвід [27]. Тут автор незвично описує графіки степеневі функцій за допомогою фразеологізмів та пропонує поєднати опис з відповідним графіком.

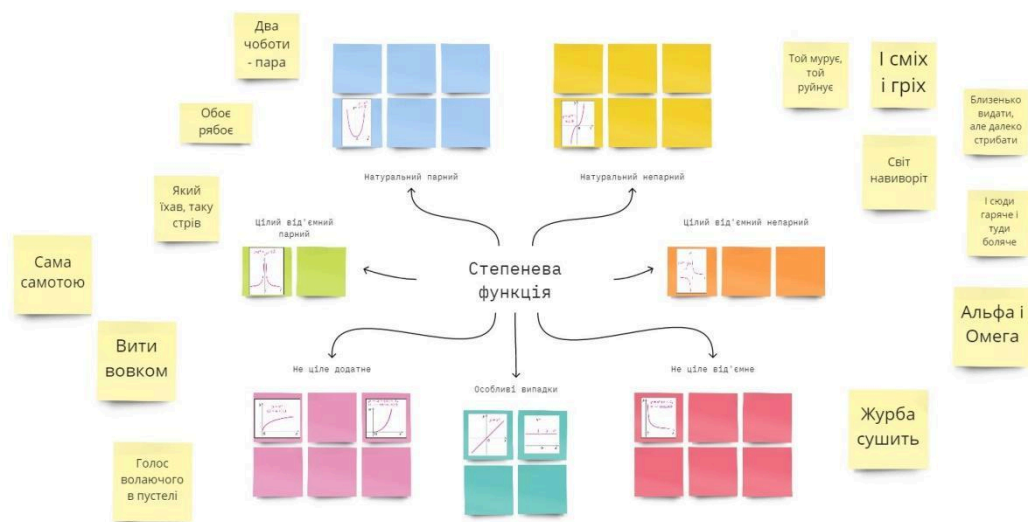


Рис. 2.4 Дошка Міро для вивчення степеневих функцій

Існує кілька сервісів, які дозволяють створювати динамічний відеоконтент з тестами, опитуваннями, завданнями та іншими елементами для перевірки знань. Популярними сервісами для створення інтерактивних навчальних відео є Edpuzzle, PlayPosit, H5P, Nearpod, Camtasia, Thinglink тощо.

Для отримання фідбеку від учнів після перегляду навчального відео про степеневі функції дуже зручно використовувати платформу Edpuzzle. Вона дає можливість додавати запитання, коментарі та інші інтерактивні елементи безпосередньо у відео, яке можна готовим завантажити в особистий кабінет. Якщо власного відео нема, то сервіс дозволяє користуватися готовими розробками навіть за умови використання безоплатної версії.

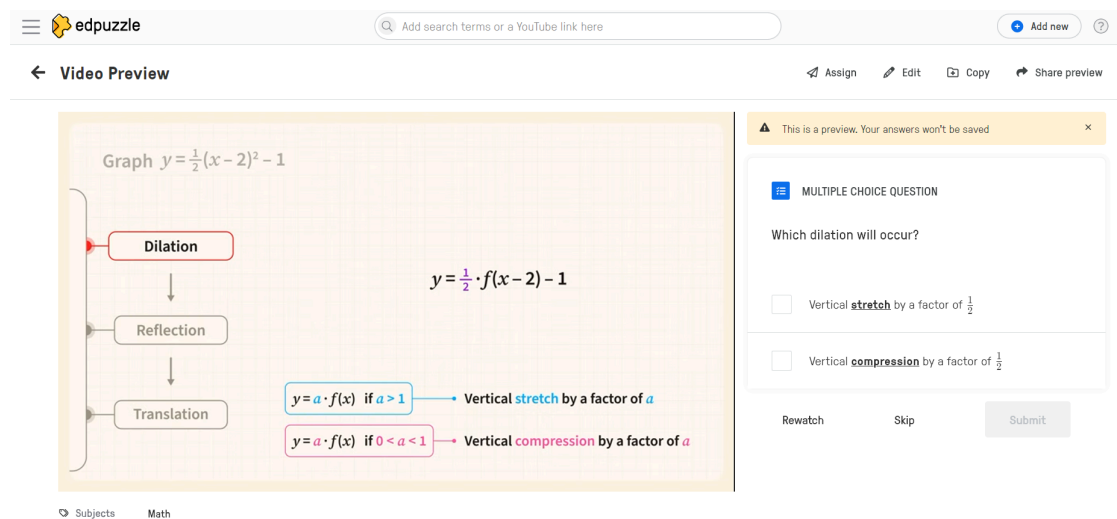


Рис. 2.5. Особистий кабінет Edpuzzle.

Платформа на сучасному етапі містить багато відео англійською, які можна також рекомендувати учням, наприклад для засвоєння елементарних перетворень графіків функцій, у тому числі і степеневих [36], [37].

Для кращого засвоєння матеріалу можна спробувати використати вікторину Quizizz. Її можна використовувати їх як для вивчення нового матеріалу, так і для закріплення знань і оцінювання успішності. Навіть безоплатна версія має україномовний інтерфейс, що дозволяє швидко зареєструватися / авторизуватися через особистий кабінет Google та розібратися з принципами роботи й управлінням вікторини. Приєднання до обраної гри найдієвіше реалізувати приєднанням через сканування QR-коду вікторини, який генерує учитель для відповідного тестування. Користувачам краще використовувати мобільні пристрої, учителю – ПК, оскільки він у режимі реального часу відслідковує успішність розв’язування задач групою учнів, бачить статистику відповідей кожного учня та наприкінці тесту система автоматично визначає сама трійку переможців тощо.

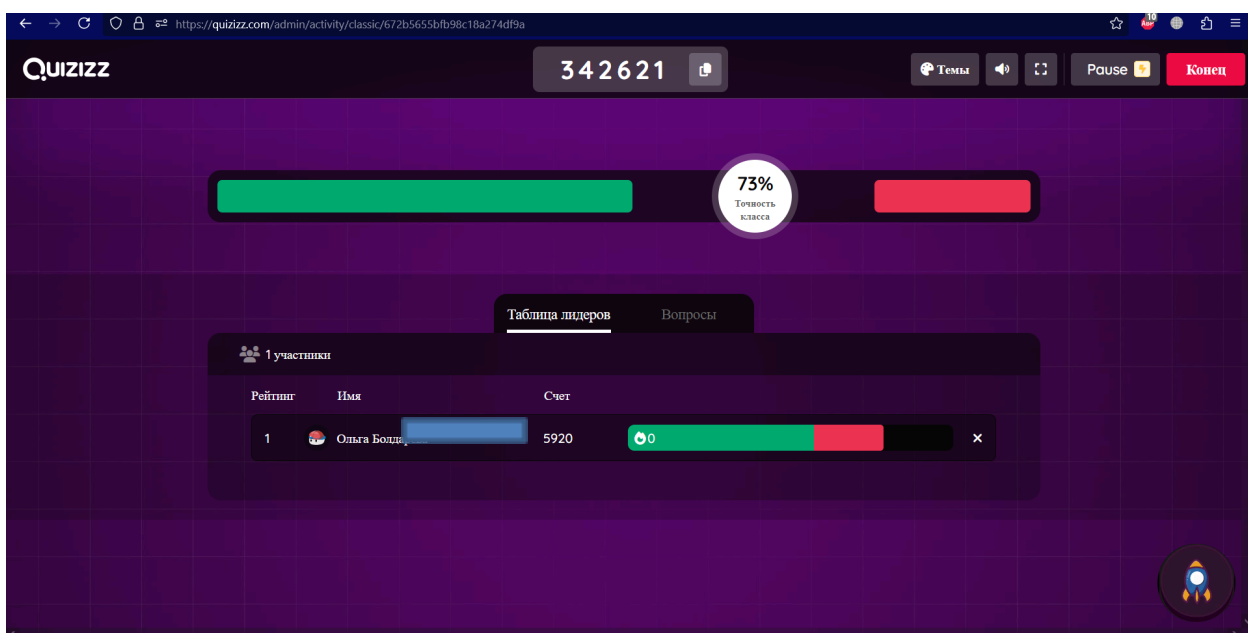


Рис. 2.6. Режим роботи вікторини викладача

Ми пропонували учням пройти тест про степеневу функцію, що містив 14 питань, охоплював поняття області визначення і множини значень степеневі функції, степінь з не цілим показником, робота з коренем n -го степеня, елементарні перетворення графіків степеневі функції, ірраціональні

рівняння і нерівності. Тест можна пройти і не в синхронному режимі за посиланням [12].

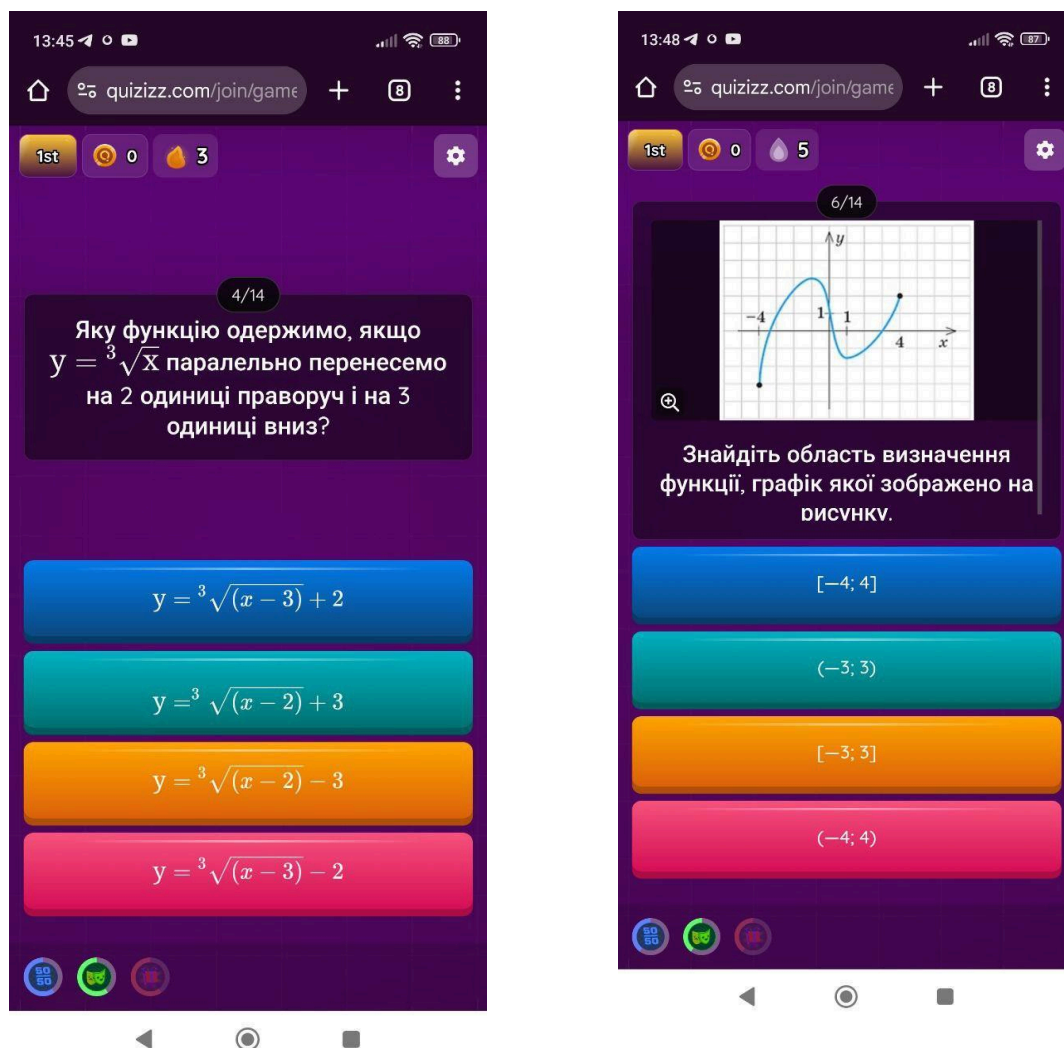


Рис. 2.7. Питання вікторини у режимі учнів

Можна створити інтерактивну презентацію шляхом поєднання презентації та тестових завдань у сервісі Quizizz. Прикладом такого об'єднання теоретичного і практичного матеріалу є завдання сервісу <https://quizizz.com/join?gc=87873937>.

Окремими цікавими інтерактивними завданнями є завдання на інтерактивних аркушах. Це навчальні матеріали, розроблені у форматі онлайн-аркушів, що дозволяють учням виконувати завдання безпосередньо на екрані. Такі аркуші інтегрують різні форми взаємодії: тести, пазли, перетягування елементів, заповнення тексту, вибір відповіді та інше. Завдяки

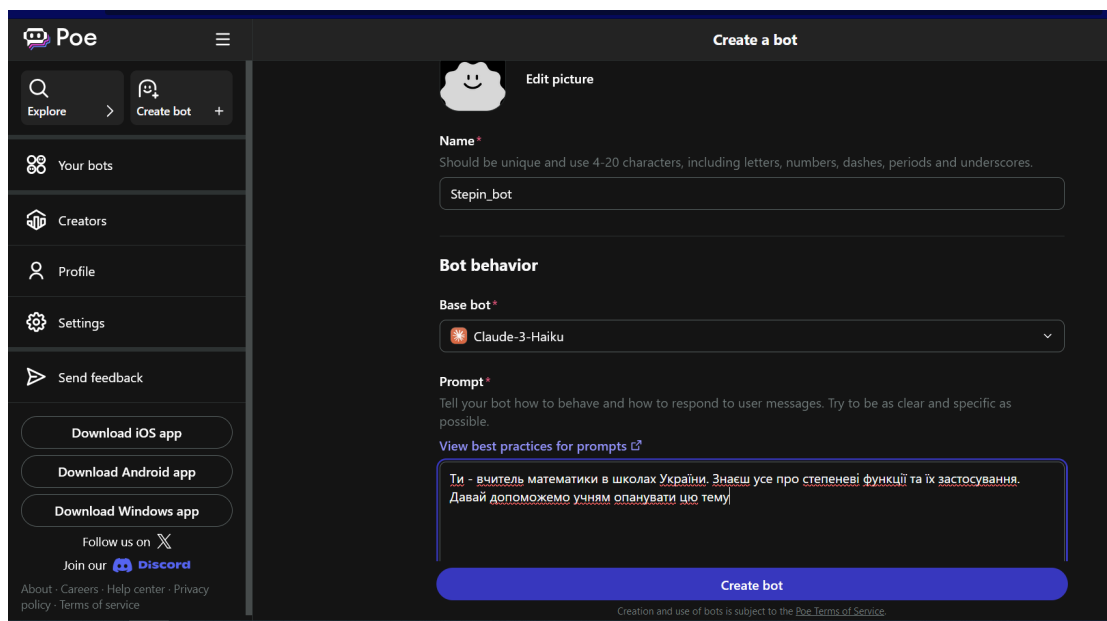
інтерактивності, ці завдання стають більш цікавими та сприяють кращому засвоєнню матеріалу.

Сервісів, що надають можливості для такої роботи достатньо багато, серед них і сервіси LearningApps, Wizer.me, LiveWorksheets, WordWall, Thinkio. Серед переваг інтерактивних аркушів є миттєвий зворотний зв'язок, залучення до навчання, зручність для вчителів. У множині інтерактивних вправ можна виділити такі [33] – [35].

Майбутня робота педагогів цілком залежатиме від технологій, які наразі лише зароджуються. Тому важливо найкращим чином сучасному вчителю вміти опановувати й нові технології та інтегрувати ці технології у свої навчальні програми та активно використовувати новітні технології у освітньому процесі (з Zoom, Teams, навчальними онлайн-платформи Aula, Brightspace, Google Classroom тощо); постійно бути у курсі технологічних розробок та безперервно інтегрувати їх навчання; наочно демонструвати їх значення у реальному світі (ІІІ не обмежується уроками інформатики або математики, перетинається з різними сферами, такими як охорона здоров'я, бізнес, фінанси, будівництво).

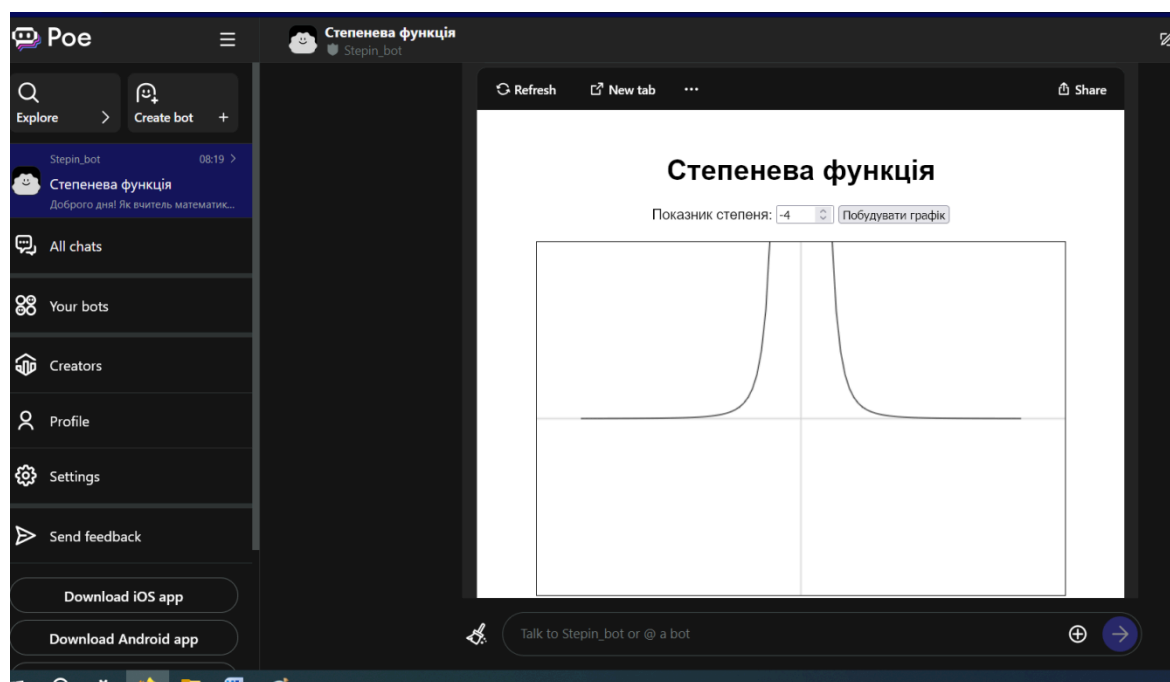
Інструменти на основі штучного інтелекту пропонують розвинути персоналізований досвід навчання та можуть допомогти покращити взаємодію між вчителями і студентами. Для цього застосовують чат-боти зі штучним інтелектом, які суттєво змінюють формат викладання та навчання. Але у загальнодоступних версіях зазвичай бракує важливих деталей, отже вихід - створення власного персоналізованого чат-бота ІІІ.

Серед сервісів для створення чат-ботів ми обрали Poe.com, який мінімізує вартість і час розробки, оскільки технічні аспекти передбачені розробником сервісу. Застосунок має англomовний та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, де можна обрати мовну модель та описати детально функції або завантажити готові вказівки для роботи з ним.



Для написання підказок для складного освітнього процесу чат краще не використовувати. Крім того, розмови учнів із чатами, налаштованими на такі платформи, є конфіденційними, і їм незручно ділитися, що ускладнює аналітику навчання. Однак як альтернатива у навчанні він має багато переваг.

Доступ до створеного чату можливий за посиланням [23]. При відповіді на запитання «Що таке степенева функція?» чат-бот згенерував класифікацію степеневих функцій у залежності від показника та згенерував інтерактивну демонстрацію побудови графіка степеневої функції. Ця демонстрація дозволяє користувачеві ввести показник степеня та відразу побачити, як змінюється графік степеневої функції. Вони можуть експериментувати з різними значеннями показника степеня та спостерігати, як це впливає на вигляд кривої.



Поеднання цифрових застосунків та персоналізованих засобів навчання дозволяє урізноманітнити освітній процес для учнів.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ II.

У профільній школі доцільно використовувати різні методи й форми навчання, щоб поглибити розуміння учнями степеневі функції та її властивостей. Це може включати аналітичні методи (робота з графіками, функціональний аналіз), інтерактивні та дослідницькі методи (практичні завдання, проектна робота), а також інтеграцію проблемних завдань, які мотивують учнів шукати оптимальні підходи до розв'язання задач і розвивати критичне мислення.

Для ефективної організації уроків рекомендується диференційований підхід, що враховує рівень підготовки та зацікавленість учнів. Викладачам варто застосовувати методи активного навчання, які включають обговорення, групову роботу та індивідуальні завдання, спрямовані на самостійне відкриття властивостей функцій. Акцент на практичному використанні знань (розв'язання задач, побудова графіків) сприяє закріпленню вивченого матеріалу. Важливо також створювати умови для систематичного повторення та узагальнення знань, що підвищує навчальну мотивацію та результативність учнів.

У профільній школі цифрові засоби можуть стати важливим інструментом для візуалізації та аналізу властивостей степеневі функції. Програмне забезпечення для побудови графіків та інтерактивних моделей дає можливість учням більш наочно зрозуміти залежність між параметрами функції та її поведінкою. Зокрема, такі засоби, як інтерактивні презентації, вікторини, математичні симулятори, онлайн-платформи та чат-боти сприяють активному залученню учнів, дають змогу вчителю персоналізувати підхід і полегшують процес узагальнення й систематизації знань учнів.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження степеневих функцій дозволило систематизувати та поглибити розуміння їхніх властивостей, особливостей побудови графіків та застосування в різних галузях знань. Підтверджено, що степеневі функції є одним з найважливіших класів елементарних функцій, які широко використовуються в математичному аналізі, алгебрі, геометрії, фізиці, економіці та інших науках.

Глибокий аналіз властивостей степеневих функцій з різними показниками степеня дав змогу розкрити їхню роль у моделюванні різноманітних реальних процесів та сформулювати набір задач для проектів учням з метою самостійного поглибленого вивчення.

Застосування сучасних інформаційних технологій, зокрема, комп'ютерних математичних систем, значно полегшує вивчення степеневих функцій та розширює можливості їхнього дослідження. Використання графічних калькуляторів та програмних продуктів дозволяє візуалізувати графіки функцій, проводити чисельні експерименти та аналізувати отримані результати.

Отримані результати дослідження мають як теоретичне, так і практичне значення. З теоретичної точки зору, було уточнено деякі аспекти поведінки степеневих функцій при різних значеннях показника степеня. З практичної точки зору, розроблені методичні рекомендації можуть бути використані вчителями математики для підвищення ефективності навчання учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. закл. заг. сер. освіти. / А. Мерзляк та ін. Харків : Гімназія, 2015. 400 с
2. Афанасьєва О. М. Про функціональну змістову лінію шкільного курсу математики/ О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко *Математика в школі*. 2007. № 5. С. 18 – 27, № 6. С. 31 – 37
3. Бібікова І., Вертипорох Т., Турка Т. Методика вивчення функцій в шкільному курсі математики. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2024. № 14. С. 89–96. URL: https://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/2024/ZNPFMFEDSPU_2024_pp_089-096.pdf.
4. Бевз Г. П. Методика викладання алгебри: посібник для вчителів, К. : Радянська школа, 1971. – С. 70 – 96.
5. Близнюк Т. Цифрові інструменти для онлайн і офлайн навчання: навчально-методичний посібник. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2021. – 64 с.
6. Видавнича корпорація Ранок. Методичні особливості реалізації теми «Функція» у модельній програмі для 7-9 класів, 2023. *YouTube*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=4NsI6VGH900> (дата звернення: 08.10.2024).
7. Всеукраїнська школа онлайн. 10 клас. алгебра і початки аналізу. степеневі функції, їх властивості та графіки. частина 1, 2022. *YouTube*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=EKaShaf0bVQ> (дата звернення: 05.10.2024).
8. Дем'яненко О. Урок з теми: «Функції. Властивості функцій. Перетворення графіків функцій» *Математика в школі*. 2006. № 5. С. 33 – 36.
9. Довідник з елементарної математики / Г. Бевз та ін. ; ред. П. Фільчаков. 2-ге вид. Київ : Наук. думка, 1975. 656 с.
10. Істер О. С., Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти / Істер О., Єргіна О.– К.: Генеза 2018. – 448 с.

11. Істер О.С/ Алгебра і початки аналізу, початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень : підруч. для 10 кл. Київ : Генеза, 2019. 576 с.

12. Кулабухова О. Степеневі функції, Quizizz URL: <https://quizizz.com/admin/quiz/5ebb89e5f8565c001b77e8bb>

13. Кушнір В. Методичні особливості формування умінь побудови графіків функцій методом перетворень / В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк *Математика в школі*. 2007. № 3. С. 41 – 44

14. Кошута С. Розвиток пізнавального інтересу старшокласників при вивченні теми «степеневі функції» в курсі алгебри і початків аналізу : магістерська робота. Кривий Ріг, 2022. 82 с.

15. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с. : іл.

16. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.

17. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : академ. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2010. — 362 с. : іл.

18. Математика. Модельні навчальні програми. *Інститут модернізації змісту освіти*. URL: <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/> (дата звернення: 08.11.2024).

19. Москаленко Ю. Д., Коваленко О. В. Реалізація прикладної спрямованості вивчення функцій в основній школі. Наукові записки. Полтава, 2005. С. 65

20. Навчальні програми для 10-11 класів (Профільний рівень, Поглиблений рівень) URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
21. Нелін Є. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : акад. рівень. Харків : Гімназія, 2010. 416 с.
22. Нелін Є. П. Алгебра : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2011. — 416 с. : іл.
23. Персоналізований чат-бот для вивчення степеневих функцій. Власна розробка. URL: https://poe.com/Stepin_bot.
24. Порівняння значень степеневі функції з натуральним показником, 10 клас., 2023. *YouTube*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=anz2OVebcik> (дата звернення: 05.10.2024).
25. Порівняння значень степеневі функції 10 клас Стандарт, 2020. *YouTube*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=GmkKV-FY9w8> (дата звернення: 05.10.2024).
26. Опитування учнів та його результати URL: <https://bit.ly/48IzyCQ>, <https://forms.office.com/e/iGKKJSWZt0>
27. Степенева функція та її властивості 10 клас. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: <https://naurok.com.ua/stepeneva-funkciya-ta-vlastivosti-10-klas-265859.html> (дата звернення: 08.10.2024).
28. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підруч. для студ. мат. спец. вищ. пед. навч. закл. / 2 ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. — 582 с.
29. Станжицький О. М., Собчук В. В., Кушніренко С. В., Курилко О. Б., Цань В. Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина III «Функції в

шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2022. – 224 с.

30. Урок №5. Степенева функція, її властивості та графік (10 клас. Алгебра), 2020. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=GJbaUb1S8Xk>, (дата звернення: 05.10.2024).

31. Хомчак В.М., Хомчак Н.В. Міжпредметні зв'язки при вивченні функцій в основній школі. Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математика. 2016. С. 137

32. Шкільний курс математики і методика його навчання: алгебра основної школи. Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів денної форми навчання / Укладач: А. С. Кушнірук. – Одеса: ФОП Бондаренко М. О., 2018. – 60 с.

33. dorvr27. Графіки функції. *Wordwall - Створюйте кращі уроки швидше*. URL: <https://wordwall.net/uk/resource/39210492/графіки-функції> (дата звернення: 08.11.2024).

34. goodartem2705. Квадратична функція. *Wordwall - Створюйте кращі уроки швидше*. URL: <https://wordwall.net/uk/resource/17316587/квадратична-функція> (дата звернення: 08.11.2024).

35. hrebentykivan. "Степенева функція" і "Корінь n-го степеня". *Wordwall - Створюйте кращі уроки швидше*. URL: <https://wordwall.net/uk/resource/71616625/алгебра/степенева-функція-і-корінь-n-го-степеня> (дата звернення: 08.11.2024).

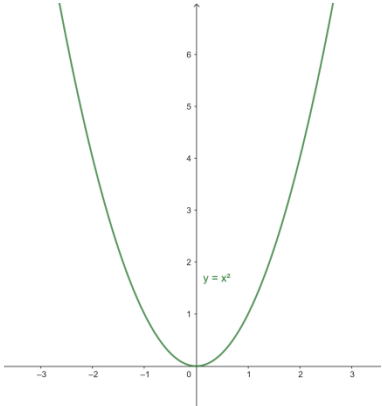
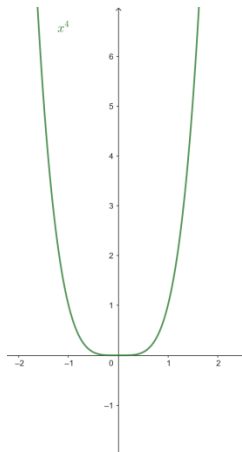
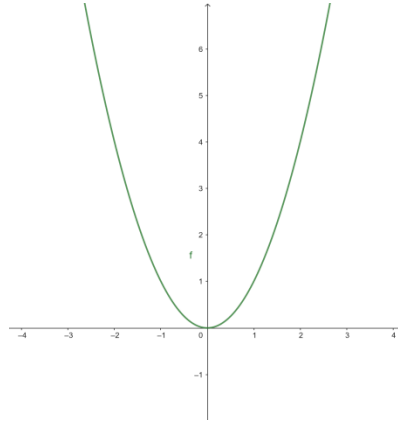
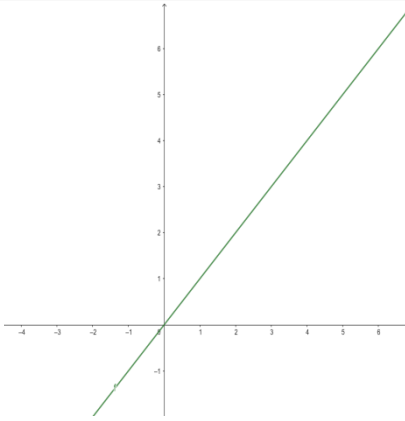
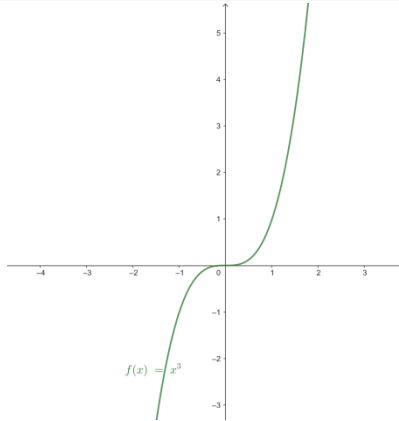
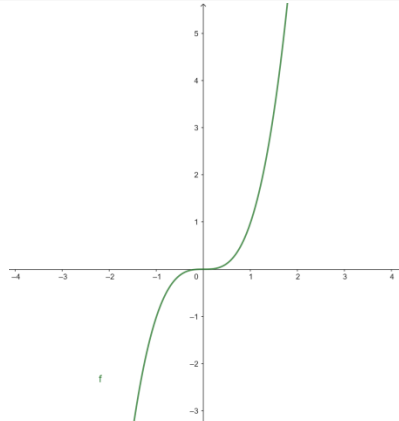
36. Transforming Quadratic Functions (Vertical Translations), *Edpuzzle* URL: <https://edpuzzle.com/media/67194d90b5ea00496634ce28>

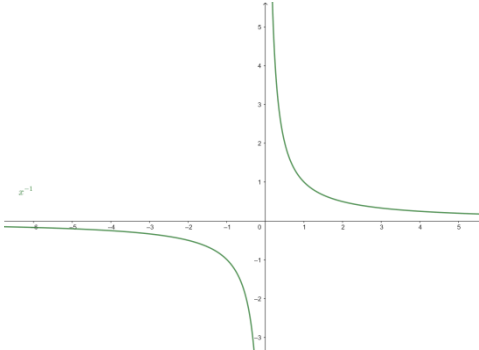
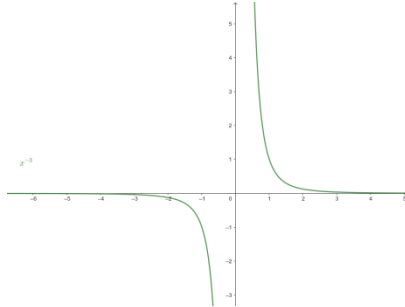
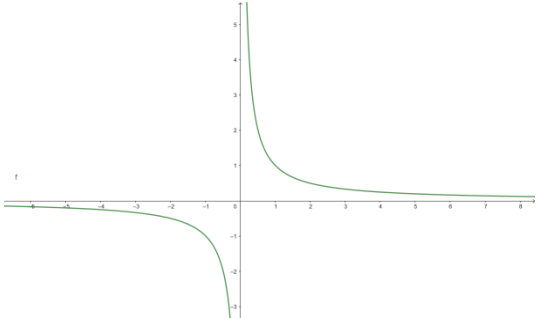
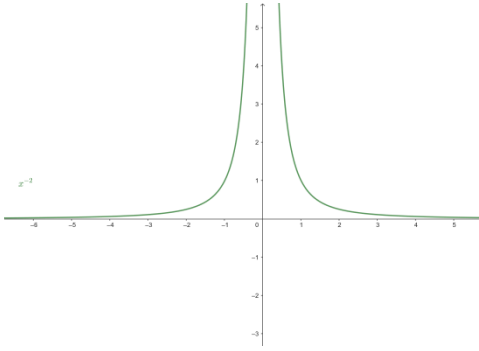
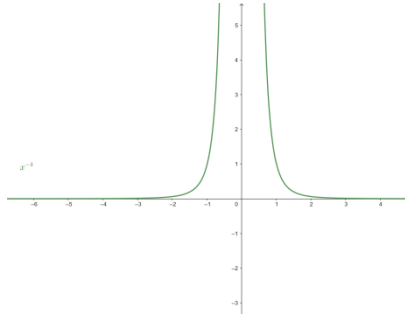
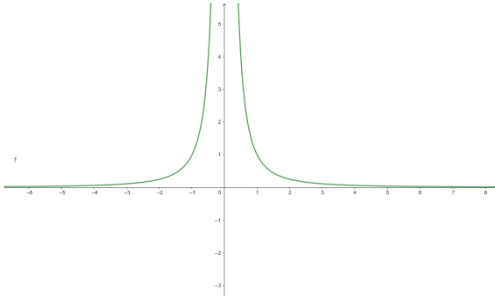
37. Transforming Quadratic Functions, *Edpuzzle* URL: <https://edpuzzle.com/media/67194a92206f1f6474c30235>

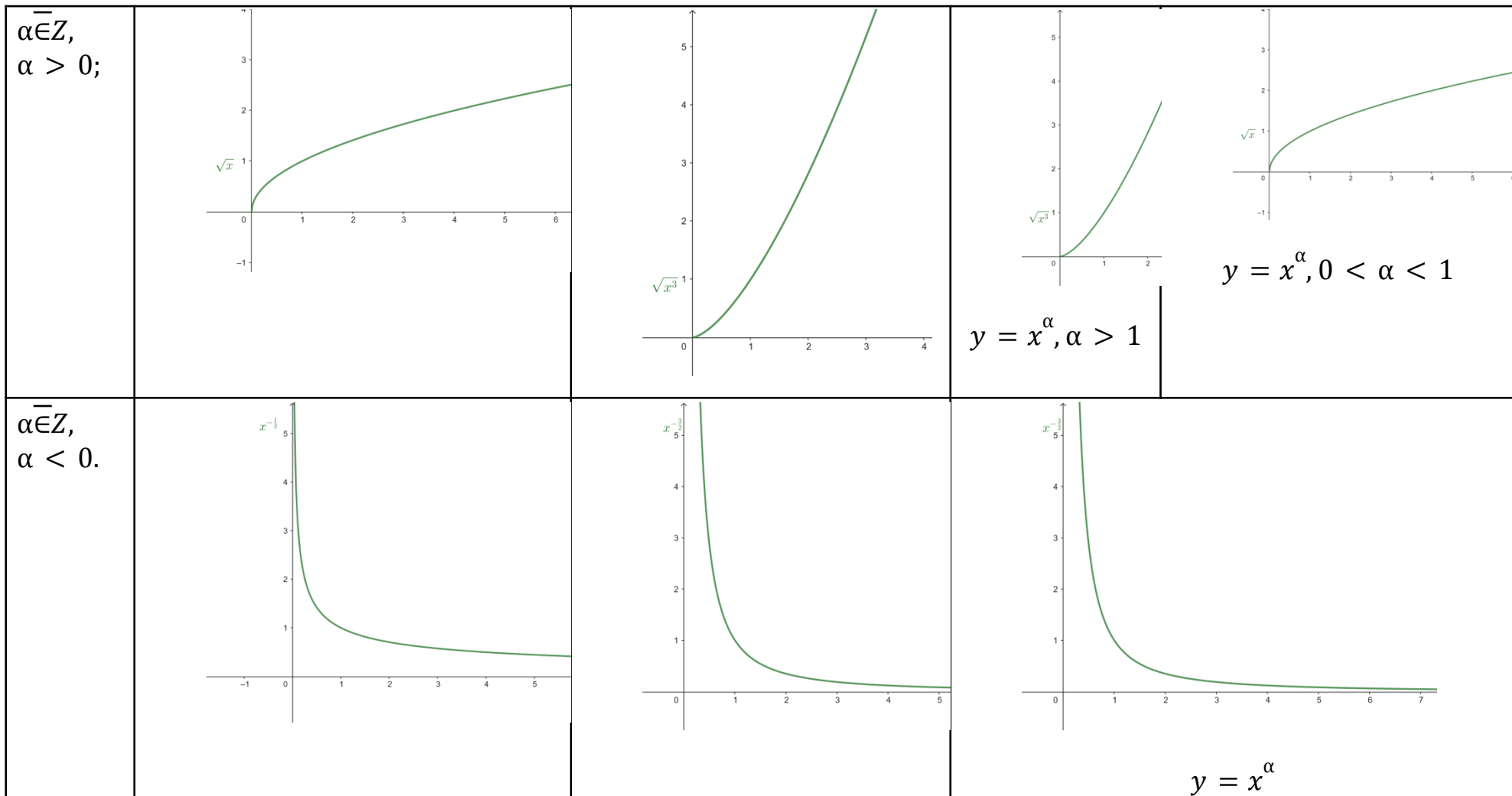
38. Wang S. Where to start with generative AI chatbot customisation. *THE Campus Learn, Share, Connect*. URL: <https://www.timeshighereducation.com/campus/where-start-generative-ai-chatbot-c>

[ustomisation?utm_source=newsletter&utm_medium=email&utm_campaign=the-download&spMailingID=30110807&spUserID=MTAxNzcwOTEyMTAyNAS2&spJobID=2590239444&spReportId=MjU5MDIzOTQ0NAS2](#) (date of access: 01.11.2024).

Таблиця 1. Графіки степеневі функції $f(x) = x^\alpha$

$\alpha \in \mathbb{N}$, α — парне			 $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$
$\alpha \in \mathbb{N}$, -непарн е			 $y = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$

$\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < 0$ α -непарне ϵ			 $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}, n \in \mathbb{N}$
$\alpha \in \mathbb{Z},$ $\alpha < 0, \alpha$ парне;			 $y = x^{-(2n)} = \frac{1}{x^{2n}}, n \in \mathbb{N}$



Таблиця 2. Властивості степеневі функції $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

$f(x) = x^{\alpha}$	$\alpha \in N$		$\alpha \in Z, \alpha < 0$		$\alpha \in Z$	
	парне	непарне	парне	непарне	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
1. Область визначення	R		$R \setminus \{0\}$		$[0; + \infty)$	$(0; + \infty)$
2. Множина значень	$[0; + \infty)$	R	$(0; + \infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; + \infty)$	$[0; + \infty)$	$(0; + \infty)$
3. Парність / непарність	Парна	Непарна	Парна	Непарна	Не парна, не непарна	
4. Періодичність	Не періодична					
5. Перетин з осями координат	$x = 0, y = 0.$		Нема		$x = 0, y =$	Нема
6. Похідна	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$					
7. Зростання / спадання	$(-\infty; 0) -$; $(0; + \infty) -$	Зростає	$(-\infty; 0) -$ зростає; $(0; + \infty) -$ спадає	$(-\infty; 0) -$ спадає; $(0; + \infty) -$ зростає	Зростає	Спадає

8. Екстремуми	$x_{min} = 0,$ $y_{min} = 0.$	Нема			$f(x) = f(0)$	Нема
9. Асимптоти	нема		$x = 0$ і $y = 0.$		Нема	$x = 0$ і $y = 0.$
10. Випуклість та точки перегину	Опуклість вниз	При $\alpha \neq 1$ $(-\infty; 0) -$ опуклість вверх $(0; +\infty) -$ опуклість вниз. 0 – точка перегину	$(-\infty; 0) -$ опуклість вниз $(0; +\infty) -$ опуклість вверх.	$(-\infty; 0) -$ опуклість вверх $(0; +\infty) -$ опуклість вниз.	$0 < \alpha$ опуклість вверх $\alpha > 1$ опуклість вниз	Опуклість вниз

ДОДАТОК А

1. Означення	
Квадратний корінь Квадратним коренем із числа a називається таке число b, квадрат якого дорівнює a. Якщо $a = b^2$, то b — квадратний корінь із числа a. Арифметичний корінь — невід'ємне значення кореня. При $a \geq 0$ позначення арифметичного кореня такі: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$. $(\sqrt{a})^2 = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$	Корінь n-го степеня Коренем n-го степеня з числа a називається таке число b, n-й степінь якого дорівнює a. Якщо $a = b^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$), то b — корінь n-го степеня з числа a.
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Квадратний корінь $\sqrt{a}$ існує тільки при $a \geq 0$	Корінь n-го степеня $\sqrt[n]{a}$ існує тільки при $a \geq 0$ ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$); $\sqrt[n]{a}$ існує при будь-яких значеннях a ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$)
Запис розв'язків рівняння $x^n = a$ ($n \in \mathbb{N}$)	
$n = 2k+1$ — непарне ($k \in \mathbb{N}$) При будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1} = a$ має єдиний корінь $x = \sqrt[2k+1]{a}$	$n = 2k$ — парне ($k \in \mathbb{N}$) При $a < 0$ рівняння $x^{2k} = a$ не має коренів При $a \geq 0$ усі корені рівняння $x^{2k} = a$ можна записати так: $x = \pm \sqrt[2k]{a}$
Приклади	
Рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$	Рівняння $x^8 = -7$ не має коренів Рівняння $x^8 = 7$ має корені $x = \pm \sqrt[8]{7}$
3. Властивості кореня n -го степеня	
$n = 2k+1$ — непарне число 1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ 2) $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$	$n = 2k$ — парне число $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = a$
Для довільних значень n і k ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$)	
3) При $a \geq 0$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
4) При $a \geq 0$	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
5) При $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Наслідки

При $a \geq 0, b \geq 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}}$ — винесення множника з-під знака кореня. | При $a \geq 0, b \geq 0$ $\boxed{a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$ — внесення множника під знак кореня.

6) При $a \geq 0, b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

7) При $a \geq 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — основна властивість кореня.

Значення кореня зі степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натуральне число.

8) При $a \geq 0, b \geq 0$, $\boxed{\text{якщо } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}$

ДОДАТОК В

Основні формули для кореня n -го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b , тобто $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	можна	тільки для невід'ємних a
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	можна	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = a $
3. Корінь із кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	можна	можна
4. Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ і добуток коренів $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	можна	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{a} \sqrt[2k]{b}$ можна
5. Корінь із частки $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$) і частка коренів $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	можна	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}$ можна
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ і навпаки $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід непарний $\rightarrow$ непарний)	Перехід парний $\rightarrow$ парний можна Перехід непарний $\rightarrow$ парний $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m \geq 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m < 0 \end{cases}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{ a^m }$
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$	можна	$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	можна	$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geq 0$

ДОДАТОК С

План конспект уроку з алгебри і початків аналізу у 10 класі

«Корінь n -го степеня та його властивості»

Мета:

навчальна: забезпечити засвоєння учнями означення і основних властивостей кореня n -го степеня; сформувати знання про властивості кореня n -го степеня; сприяти розвитку навичок самостійного застосування знань при перетворенні виразів, що містять корені;

розвиваюча: розвивати пізнавальну активність учнів, логічне мислення, уміння аналізувати, робити висновки, обчислювальні навички, математичне мовлення; продовжувати виховувати самостійність в роботі, відповідальність, вміння виражати і відстоювати власну думку;

виховна: виховувати пізнавальний інтерес до предмета, позитивну мотивацію до навчання, увагу, спостережливість, прагнення до самовдосконалення, патріотизм.

Компетенції: спілкування державною мовою: розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач (усно і письмово), грамотно висловлюватися рідною мовою; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність тверджень; поповнювати свій словниковий запас

Тип уроку: вивчення нового матеріалу, первинне закріплення знань.

Методи та методичні прийоми: пояснювально-ілюстративний, частково-пошуковий (усне і письмове виконання вправ), практичні.

Обладнання: комп'ютери, мультимедійний проектор, підручник для класів з поглибленим вивченням математики «Алгебра і початки аналізу» (автори А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір), 10 клас.

Хід уроку

I. Організаційний момент

- привітання;
- перевірка готовності учнів до уроку;
- перевірка домашнього завдання:

На попередньому уроці учні одержали завдання повторити тему «Арифметичний квадратний корінь і його властивості».

«Асоціативний куш» (технологія)

(учитель пропонує учням згадати слова (словосполучення), які асоціюються зі словами «квадратний корінь з числа a ».



II. Мотивація навчальної діяльності

Вивчених понять квадратного кореня й арифметичного квадратного кореня, степеня з натуральним і цілим показником недостатньо для розв'язування низки задач, тому необхідно ввести поняття кореня n -го степеня й вивчити його властивості, та узагальнити поняття степеня.

Історична довідка. Про знак кореня. Починаючи з 13 століття італійські та інші європейські математики позначали корінь латинським словом *radix*, скорочено rx .

В 15 столітті писали $r_2 12$ замість $\sqrt{12}$, але поступово знак кореня видозмінювався, і наприкінці 15 століття запис $\sqrt{4}$ мав вигляд $\sqrt{4}$. Такий знак вперше зустрічається в німецькій алгебрі «Швидкий і красивий рахунок за допомогою правил алгебри».

$\sqrt{}$ поступово замінив знак rx .

Але тільки в 1637 році Рене Декарт поєднав знак кореня з горизонтальною рисою над виразом і застосував в своїй «Геометрії» сучасний знак радикала. Цей знак увійшов у загальне використання лише на початку 18 століття.

Вчитель: Радикал було введено практичною необхідністю: людям в 16 столітті, знаючи площу необхідно було обчислювати сторону квадрата. А де ми можемо застосувати знання про квадратний корінь?

Очікувані відповіді:

- розв’язання квадратних рівнянь;
- геометричні задачі, пов’язані з радіусами вписаних і описаних кіл;
- перетворення ірраціональних виразів,
- обчислення значень виразів, що містять квадратний корінь

В 8 класі на уроках алгебри ми вивчали тему «Арифметичний квадратний корінь», але практика показує, що необхідно узагальнити і розширити ці поняття – ввести більш загальне поняття «Корінь n -го степеня» і вивчити його властивості.

Отже, запишіть тему уроку **«Корінь n -го степеня та його властивості»**.

III. Актуалізація опорних знань і вмінь учнів

Для вивчення наступної теми нам потрібно пригадати матеріал про квадратні корені і степені з натуральним та цілим показником, який вивчався в 7-9 класах.

Фронтальна бесіда

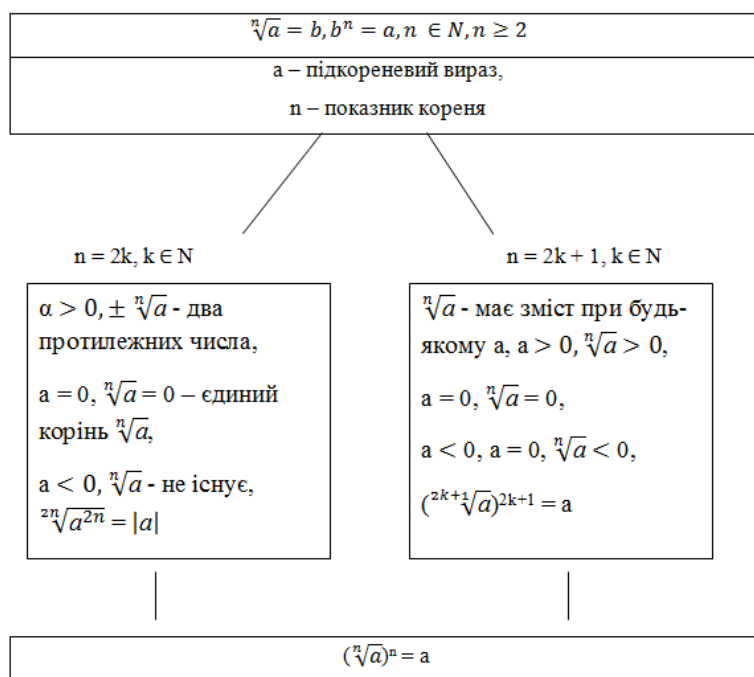
1. Що називається квадратним коренем з числа ?
2. Чому квадратний корінь з від’ємного числа не існує?
3. Що називається арифметичним квадратним коренем з числа a ?

IV. Вивчення нового матеріалу

Робота в групах

Об’єднавшись в групи діти вивчають самостійно означення кореня n -го степеня та його властивості.

1-4 групи одержують завдання: скласти «юридичну шпаргалку» (коротку наочну таблицю-схему), в якій відобразити всі відомості про корінь n -го степеня з числа a , умови його існування, арифметичний корінь n -го степеня та властивості коренів.



Арифметичний корінь n-го степеня з a

$$\sqrt[n]{a} = b, a \geq 0, b \geq 0$$

5 група працює з текстом підручника в тому ж обсязі, однак завдання у них таке: класти запитання до означення та властивостей кореня n-го степеня, тобто створити так званий «опитувальник»:

- ❖ Дайте означення кореня n-го степеня із числа a;
- ❖ Дайте означення аргументного кореня n-го степеня із числа a;
- ❖ При яких значеннях a існують вирази: $\sqrt[2k]{a}$ і $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$;
- ❖ Основні властивості кореня -го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.

Через певний час учні 1 – 5 групи об'єднуються в новостворені групи й демонструють один одному свої схеми та «опитувальники», разом знаходячи відповіді на всі запитання.

V. Первинне застосування знань та перевірка набутих умінь та навичок

1) Знайдемо значення: -

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

- а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$;
 б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$ і $3 > 0$;
 в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$ і $1 > 0$;
 г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

2) Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[3]{-27}$.
 а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; б) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$; в) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Отже, вираз $\sqrt[2k+1]{a}$ має смисл для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і може набувати будь-яких значень.

3) Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 = 64$; б) $x^5 = -\frac{1}{32}$; в) $x^4 = 81$; г) $x^6 = -64$; д) $x^3 = 15$; е) $x^4 = 15$.

Відповідь: а) 4; б) $-\frac{1}{2}$; в) 3; - 3; г) немає коренів; д) $\sqrt[3]{15}$; е) $\sqrt[4]{15}$; - $\sqrt[4]{15}$.

4) Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \sqrt[4]{x-2}$; б) $y = \sqrt[3]{x-4}$; в) $y = \sqrt[6]{3-x}$;
 г) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-x}}$; д) $y = \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{-x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[10]{-x}}$

Відповідь: а) $x \geq 2$; б) $x \in \mathbb{R}$; в) $x \leq 3$; г) $x \neq 0$; д) 0; е) не визначена.

VI. Підсумок уроку

Повторити основні етапи вивченого матеріалу.

Означення і властивості	Приклади
I. Означення	
Коренем n-го степеня із числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює числу a ($n \in \mathbb{N}$). $\sqrt[n]{a}$ - корінь, n – показник, a- підкорений вираз	$\sqrt[5]{243}=3, 3^5=243$; $\sqrt[4]{625}=5, 5^4=625$; $\sqrt[3]{-27}=-3, (-3)^3=-27$; $\sqrt[5]{-768}=-4, (-4)^5 = -768$
Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа називається таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.	$\sqrt[6]{64}=2$ – арифметичний корінь; $\sqrt[3]{-125}=-5$ – неарифметичний корінь
Показники кореня виду $n = 2k + 1$ – для позначення будь-яких коренів; показники виду $n = 2k$ – тільки для позначення арифметичних коренів. $n \in \mathbb{N}$, але $n \neq 1$	
Пам'ятай!	

$\sqrt[2k]{a^{2k}} = a , \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}, k \in \mathbb{N}; \quad (\sqrt[2k]{a})^{2k} = a, k \in \mathbb{N}, \text{ якщо } a \geq 0;$ $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a, k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	
II. Властивості кореня n – го степеня (n ≠ 1, n ∈ N)	
1. $\sqrt[n]{0} = 0$	
2. $\sqrt[n]{1} = 1$	
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{64} = 2$
4. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt[4]{27} =$ $\sqrt[4]{4^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} =$ $= \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$
5. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$
7. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, a > 0, k \in \mathbb{Z}$ (якщо k ∈ Z, то рівність правильна і при φ = 0)	$(2\sqrt[3]{0,3})^3 = 2^3 \sqrt[3]{0,3^3} = 8 \cdot 0,3 = 2,4$
8. $\sqrt[m]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mk]{a}, a \geq 0, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, m \neq 1, k \neq 1$	$\sqrt[5]{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[30]{2}$
9. $\sqrt[mq]{a^{nq}} = \sqrt[m]{a^n}, m \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, m \neq 1$	$\sqrt[15]{3^5} = \sqrt[3]{3}$

VIII. Домашнє завдання

1. Знайдіть значення виразів:

$$\text{а) } \sqrt[3]{0,027 \cdot 125}; \text{ б) } \sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}; \text{ в) } \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}; \text{ г) } \sqrt[4]{\frac{625}{16}}; \text{ д) } \sqrt[3]{3\frac{3}{8}}.$$

Відповідь: а) 1,5; б) 1,2; в) 0,5; г) 2,5; д) $\frac{3}{2}$.

2. Обчисліть:

$$\text{а) } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}; \text{ б) } \sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}; \text{ в) } \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}; \text{ г) } \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}.$$

Відповідь: а) 10; б) 6; в) 3; г) 2.

3. Знайдіть корінь із степеня:

$$\text{а) } \sqrt[3]{5^9}; \text{ б) } \sqrt[5]{0,3^{10}}; \text{ в) } \sqrt[5]{0,3^{10} \cdot 2^{15}}; \text{ г) } \sqrt[10]{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot 4^{30}}.$$

Відповідь: а) 125; б) 0,09; в) 0,72; г) 16.

4. Спростіть вирази:

a) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{25}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{4}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$.

Відповідь: а) $\sqrt[24]{25} = \sqrt[12]{5}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[6]{5}$.