

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему “Геометричні перетворення у шкільній математиці”

Виконала:
магістрантка II курсу, групи СОМ(М)з-2
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Титова Л.С.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Кульчицька Н.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент Заторський Р.А.

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2023 р.

АНОТАЦІЯ

до кваліфікаційної роботи Титової Л. С.

«Геометричні перетворення в шкільній математиці»

Кваліфікаційна робота складається з вступу, основної частини, висновку та списку використаних джерел. Основна частина роботи містить у собі три розділи. Обсяг роботи становить 55 сторінок.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні основних теоретичних засад розв'язування задач на побудову, розкритті суті геометричних перетворень та дослідженні матеріалу, який викладений у підручниках з геометрії по темі «Геометричні перетворення».

Об'єктом дослідження є теоретичний матеріал, який викладений у підручниках з геометрії.

Предметом дослідження є основні геометричні перетворення.

У першому розділі розглянуто основні геометричні перетворення.

У другому розділі подано основні етапи розв'язування задач на побудову та наведено приклади задач, в яких використовується метод геометричних перетворень.

У третьому розділі досліджено матеріал, який міститься в підручниках з геометрії по тематичній лінії «Геометричні перетворення», проаналізовано використання ІКТ на уроках геометрії та розроблено навчальний проект на тему «Геометрія в українському орнаменті».

У висновку описано, які завдання було виконано для досягнення поставленої мети.

ANNOTATION

to the qualification paper of L. S. Titova

"Geometric transformations in school mathematics"

A qualification paper consists of an introduction, a main body, a conclusion and a list of references. The main body of the work includes three sections. The volume of the work is 55 pages.

The purpose of the work is to substantiate the basic theoretical principles of solving construction problems, to reveal the essence of geometric transformations and to study the material presented in geometry textbooks on the topic "Geometric transformations"

The object of the study is the theoretical material presented in geometry textbooks. The subject of the study is basic geometric transformations.

The first chapter covers the basic geometric transformations.

The second section describes the main stages of solving construction problems and provides examples of problems in which the method of geometric transformations is used.

The third section examines the material contained in geometry textbooks on the thematic line "Geometric transformations", analyses the use of ICT in geometry lessons and teaching project on the topic of "Geometry in Ukrainian Ornament " was developed.

The conclusion describes what tasks were performed to achieve the goal.

Зміст

ВСТУП	5
РОЗДІЛ І	7
ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	7
1.1 Основні геометричні перетворення	7
1.2 Паралельне перенесення	7
1.3 Осьова симетрія.....	10
1.4 Поворот	13
1.5 Центральна симетрія.....	16
1.6 Гомотетія.....	18
РОЗДІЛ ІІ	22
ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ЗАДАЧАХ НА ПОБУДОВУ	22
2.1 Елементарні побудови.....	22
2.2 Основні етапи розв'язання конструктивних задач	24
2.3 Метод геометричних перетворень	27
РОЗДІЛ ІІІ	37
ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ШКОЛІ	37
3.1 Геометричні перетворення в шкільній математиці.....	37
3.2 Використання ІКТ на уроках геометрії.....	40
3.3 Геометрія в українському орнаменті.....	44
ВИСНОВОК.....	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	56

ВСТУП

Геометричні перетворення є одним з найважливіших розділів курсу геометрії, адже геометричні задачі на побудову розвивають в учнів логічне та математичне мислення. Проте в учнів виникають деякі труднощі, під час вивчення даної теми. Тому мотивація та навчальна активність у школярів йде на спад. Актуальною проблемою у сучасних вчителів є використання таких методів і засобів навчання, щоб матеріал, який буде викладати вчитель, був доступним, простим для сприйняття, чітко сформульованим та викликав зацікавлення в учнів. Зрозуміло, що для цього потрібно використовувати сучасні методи навчання, зокрема ІКТ, адже інформаційно-комунікативні технології мають такі переваги:

- 1) **Наочність.** ІКТ дозволяють представити навчальний матеріал у яскравому та доступному вигляді, що робить його більш емоційним та ефективним для сприйняття.
- 2) **Розвиток.** ІКТ сприяють реалізації розвивального навчання, проблемно-діалогічного підходу та творчої діяльності.
- 3) **Індивідуалізація.** ІКТ дозволяють здійснити диференційований підхід у навчанні, враховуючи індивідуальні потреби та темпи навчання учнів.
- 4) **Мотивація.** ІКТ підвищують мотивацію до навчання, роблячи його більш цікавим та захоплюючим.

Об'єктом дипломного дослідження є навчальний матеріал, який викладений у підручниках з геометрії за 7-11 класи.

Предметом дослідження є основні геометричні перетворення.

Мета дипломної роботи. обґрунтувати основні теоретичні засади розв'язування задач на побудову, розкрити суть геометричних перетворень, дослідити як викладений матеріал по тематичній лінії «Геометричні перетворення» у різних підручниках з геометрії.

Для досягнення даної мети були поставлені такі завдання. ‘

- 1) сформулювати означення основних геометричних перетворень;
- 2) детально розглянути кожне перетворення;
- 3) дослідити те, як геометричні перетворення застосовуються в

задачах на побудову;

4) проаналізувати матеріал, який викладений в різних підручниках з геометрії;

5) проаналізувати впровадження ІКТ у навчально-виховний процес;

6) проаналізовано геометричні перетворення в українському орнаменті

Під час роботи над дипломною роботою були використані такі методи дослідження: емпіричні, теоретичні, аналіз, синтез та узагальнення.

Дипломна робота складається з вступу, трьох розділів, висновку та переліку використаної літератури.

РОЗДІЛ І

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

1.1 Основні геометричні перетворення

Під геометричним перетворенням площини розуміють взаємно-однозначне відображення цієї площини на себе. Одними з найбільш важливих геометричних перетворень є **переміщення** (рухи).

Означення. Рухом називається перетворення площини, при якому відстані між двома довільними точками дорівнюють відстані між їхніми образами.

Поняття руху тісно пов'язане з поняттям рівності геометричних фігур.

Означення. Дві геометричні фігури називаються рівними, якщо існує переміщення, яке переводить одну фігуру у другу.

Прикладами рухів площини є: осьова і центральна симетрія, паралельне перенесення, поворот.

Крім рухів у шкільній геометрії розглядається перетворення подібності.

Означення. Перетворенням подібності називається таке перетворення площини, при якому відстані між двома довільними точками та між їхніми образами змінюється в одне і те ж число разів.

Означення. Дві геометричні фігури називаються *подібними*, якщо існує перетворення подібності, яке переводить одну фігуру у другу.

Прикладом перетворення подібності є **гомотетія**.

1.2 Паралельне перенесення

Нехай заданий вектор $\vec{a}$, який паралельний до деякої площини. Розглянемо довільну точку M цієї площини і поставимо їй у відповідність точку M' таку, що $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

Одержане перетворення називають *паралельним перенесенням* на вектор $\vec{a}$. Його позначають символом $P_{\vec{a}}$. Таким чином, $P_{\vec{a}}(M) = M'$.

Паралельне перенесення можна задавати парою відповідних точок.

Властивості паралельного перенесення:

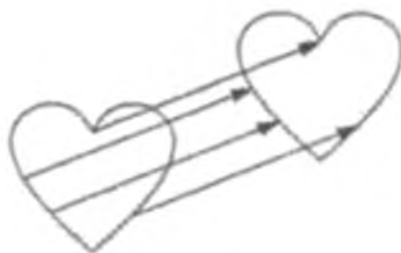
1) При паралельному перенесенні відстань між будь-якими двома точками зберігається.

2) Прямі переходять у паралельні прямі. Якщо вектор перенесення паралельний до прямої, то пряма відображається на себе. Паралельні прямі переходять у паралельні прямі, причому відстані між парами цих прямих рівні.

3) Відрізок переходить у рівний і паралельний відрізок. Точка, яка ділить відрізок у деякому відношенні, переходить у точку, яка ділить образ відрізка у такому ж відношенні. Зокрема, точка, яка є серединою відрізка, переходить у середину образу цього відрізка.

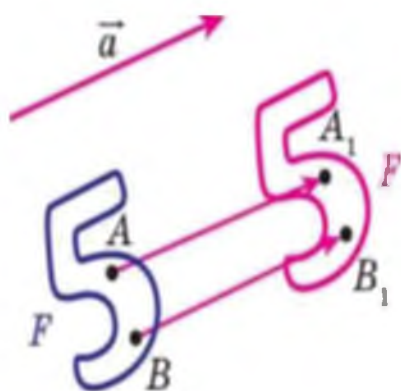
4) Кути переходять у рівні і так само орієнтовані кути. Перпендикулярні прямі переходять у перпендикулярні прямі.

5) Коло перетворюється у рівне коло.



Теорема (властивість паралельного перенесення). Паралельне перенесення є рух [10, 160 с.]

Доведення.



Нехай $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_1)$ – будь які дві точки фігури F , а точки A_1 і B_1 – їхні відповідні образи при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(m; n)$.

Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

Маємо: $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \vec{a}$. Вектори AA_1 і BB_1 мають координати (m, n) . Тоді координатами точок A_1 і B_1 є відповідно пари чисел $(x_1 + m, y_1 + n)$ та $(x_2 + m, y_2 + n)$.

Відстань між точками A і B : $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Знайдемо відстань між точками A_1 і B_1 :

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Таким чином ми показали, що $AB = A_1B_1$. Це означає, що паралельне перенесення зберігає відстань між точками.

Наслідок. Якщо фігура F_1 – образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.

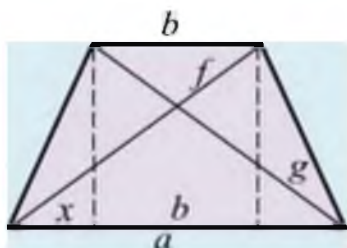
Завдяки цій властивості можна створювати малюнки на тканинах, шпалерах, підлогових покриттях (рис 1).



Рис.1

Приклад 1. Обчислити площу трапеції, знаючи довжини її діагоналей f та g , а також довжини основ a та b ($a > b$).

Розв'язання. Часто при розв'язуванні даної задачі із кінців меншої основи опускають перпендикуляри на більшу основу і, позначивши один із невідомих



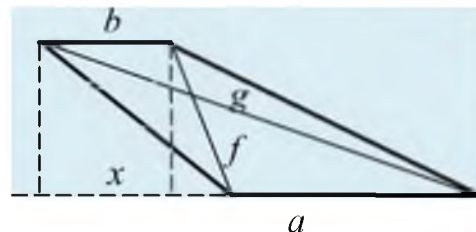
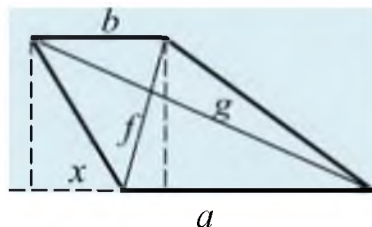
відрізків нижньої основи через x , (другий невідомий відрізок основи буде рівний $a-b-x$) з рівності катетів двох прямокутних трикутників, які є висотами трапеції,

отримують ірраціональне рівняння для відшукування x (див. рис.). Це дає можливість отримати розв'язок задачі.

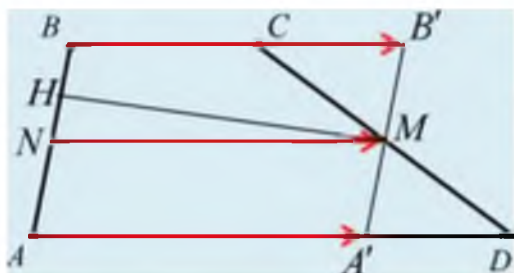
Проте при таких міркуваннях часто залишаються не розглянутими випадки, зображені на наступних рисунках. Вони приводять до необхідності розв'язування ще двох рівнянь.

В цей же час, виконавши паралельне перенесення одної з діагоналей, яке суміщає кінці діагоналей в одній з вершин верхньої основи, отримаємо трикутник із сторонами f , g та $a+b$. Він є рівновеликий трапеції, а його площа легко обчислюється за формулою Герона.

Аналогічно поступають при обчисленні площі трапеції за чотирма сторонами.



Приклад 2. Довести, що площа трапеції дорівнює добутку довжини однієї із непаралельних сторін на довжину перпендикуляра, опущеного із середини другої бічної сторони на першу.

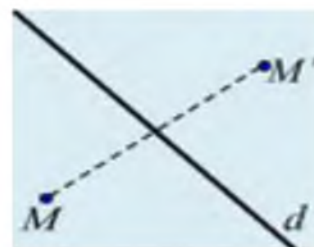


Розв'язання. Нехай задана трапеція $ABCD$, MN – її середня лінія, $MH \perp AB$. Виконаємо паралельне перенесення сторони AB , на вектор $\overline{NM}$. Тоді точка A перейде у точку A' , а точка B – у точку B' . Оскільки трикутники MCB' та MDA' рівні, то площа паралелограма $ABB'A'$ дорівнює площі трапеції $ABCD$. Оскільки площа паралелограма $ABB'A'$ дорівнює добутку довжини сторони AB на довжину висоти MH , опущеної на цю сторону із середини протилежної їй сторони, то площа трапеції $ABCD$ теж дорівнює добутку довжини бічної сторони AB на довжину відрізка MH .

1.3 Осьова симетрія

Точки M та M' називаються *симетричними відносно прямої d* , якщо ця пряма є серединним перпендикуляром відрізка MM' . [10, 167 с.] Якщо точка M належить прямій d , то її вважають симетричною самій собі відносно цієї прямої.

Таким чином кожна точка площини має свою симетричну відносно прямої d точку. Перетворення, яке кожній точці ставить у відповідність симетричну їй точку, є перетворенням площини.



Його називають симетрією відносно прямої або осьовою симетрією. Пряму d при цьому називають віссю симетрії. Таке перетворення надалі будемо позначати символом S_d . Таким чином, $S_d(M) = M'$.

Задавати дане перетворення можна за допомогою осі симетрії або парою

відповідних точок, що не співпадають.

Властивості осьової симетрії:

1) Відстані між точками зберігаються. Тобто, якщо дві точки A і B віддалені одна від одної на відстань r , то їхні образи A' і B' також будуть віддалені одна від одної на відстань r .

2) Пряма відображається на пряму, а паралельні прямі перетворюються у паралельні. Відстані між парами цих паралельних прямих не змінюються. Тобто, якщо пряма l переходить у пряму l' , то паралельні прямі l і m також переходять у паралельні прямі l' і m' . При цьому відстані між парами цих паралельних прямих будуть однаковими.

3) Відрізок переходить у рівний відрізок, а точка, що ділить відрізок у деякому відношенні, переходить у точку, яка ділить образ відрізка у такому ж відношенні. Зокрема, точка, яка є серединою відрізка, переходить у точку, яка є серединою відрізка.

4) Кут переходить у рівний, але протилежно орієнтований кут. Перпендикулярні прямі переходять у перпендикулярні прямі.

5) Коло перетворюється у рівне коло.

Теорема (властивість осьової симетрії). Осьова симетрія є рухом [10, 167 с.]

Доведення.

Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю ординат. Нехай точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ належать фігурі F . Тоді точки $A(-x_1; y_1)$ та $B(-x_2; y_2)$ – їх відповідні образи при осьовій симетрії відносно осі ординат.

$$\text{Масмо: } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Знайдемо відстань між точками A_1 і B_1 :

$$AB = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$$

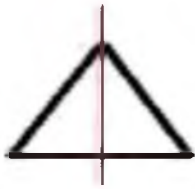
Отже, ми отримали, що $AB = A_1B_1$, а це означає, що осьова симетрія зберігає

відстані між точками. Таким чином осьова симетрія є рухом.

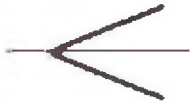
Наслідок. Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої; то $F_1 = F$.

Нижче наведені фігури, які мають осі симетрії.

- 1) У рівнобедреному трикутнику пряма, яка містить його висоту, проведену до основи, є віссю симетрії:



- 2) Пряма, яка містить бісектрису кута є його віссю симетрії.



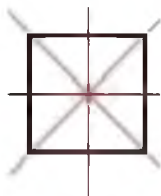
- 3) Рівносторонній трикутник має три осі симетрії: це прямі, що містять його висоти.



- 4) Відрізок має дві осі симетрії: це його серединний перпендикуляр і пряма, яка містить цей відрізок.



- 5) Квадрат має чотири осі симетрії: це прямі, що містять його діагоналі, та прямі, що проходять через точку перетину діагоналей паралельно до його сторін.



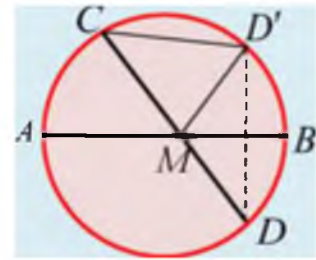
- 6) Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, є його віссю симетрії.



- 7) Безліч осей симетрії має також і пряма: це сама ця пряма і будь-яка пряма,

що до неї перпендикулярна.

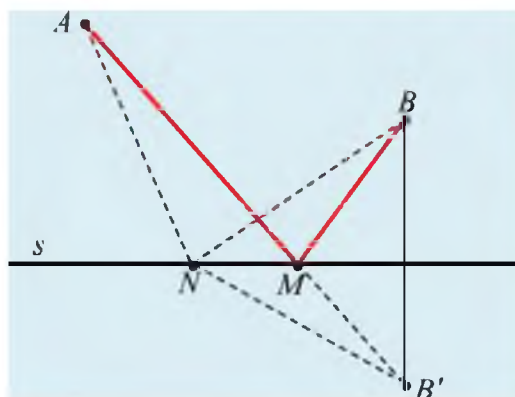
Приклад 3. На діаметрі кола радіуса R довільно вибрана точка M і через неї під кутом 45° до цього діаметра проведена хорда CD . Обчислити величину суми $CM^2 + MD^2$.



Розв'язання. Нехай задано коло з діаметром AB , M – задана точка на діаметрі, DC – хорда, $\angle AMC = 45^\circ$. Нехай D' – точка, симетрична до точки D відносно прямої AB . Розглянемо трикутник MCD' . Оскільки $\angle DMB = \angle D'MB = 45^\circ$, то він є прямокутним з прямим кутом при вершині M . Тому за теоремою Піфагора $CD'^2 = CM^2 + MD'^2 = CM^2 + MD^2$. Зауважимо, що довжина хорди CD' не змінюється при зміні положення точки M , оскільки не змінюється величина вписаного кута $\angle CDD' = 45^\circ$. Вибравши точку M в центрі кола, отримаємо: $CD'^2 = CM^2 + MD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

Приклад 4. На даній прямій знайти таку точку, що сума відстаней від неї до двох заданих точок мінімальна.

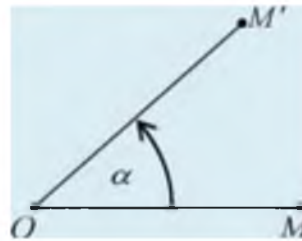
Розв'язання. Нехай задані пряма s і точки A та B . Якщо точки розташовані по різні сторони відносно прямої, то шуканою точкою буде точка перетину прямих s та AB . Очевидною є відповідь, коли одна або обидві точки належать прямій. Тому розглянемо випадок, коли точки лежать по різні сторони відносно прямої s . Нехай точки B та B' симетричні відносно прямої s . Позначимо точку перетину прямих s та AB' через M . Вона є шуканою. Справді, $AM + MB = AM + MB' = AB'$ і для довільної іншої точки N прямої s дістаємо $AN + NB = AN + NB' > AB'$.



1.4 Поворот

Розглянемо на площині деяку точку O та кут α , у якого вказана сторона,

що повинна повернутися до суміщення з іншою стороною найкоротшим шляхом. Нехай точка M – довільна точка площини. Поставимо їй у відповідність точку M' таку, що $OM = OM'$ та $\angle MOM' = \alpha$. У такому випадку кажуть, що точку M' одержали в результаті повороту точки M навколо точки O на кут α . Точці O при цьому ставиться у відповідність ця сама точка. Одержане перетворення називають **поворотом навколо точки O** на кут α та позначають R_O^α .

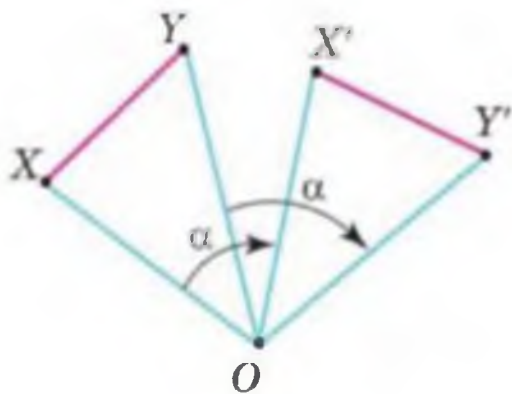


При повороті:

- 1) зберігаються відстані між точками;
- 2) пряма відображається на пряму, а паралельні прямі – у паралельні прямі. Відстані між парами цих паралельних прямих рівні;
- 3) образом відрізка є рівний йому відрізок, а точка, що ділить відрізок у деякому відношенні, переходить у точку, яка ділить образ відрізка у такому ж відношенні. Зокрема, точка, яка є серединою відрізка, переходить у точку, яка є серединою образу відрізка;
- 4) кути переходять у рівні так само орієнтовані кути. Перпендикулярні прямі переходять у перпендикулярні прямі.
- 5) образ кола є рівне йому коло.

Теорема (властивість повороту). Поворт є рухом [5, 157с.].

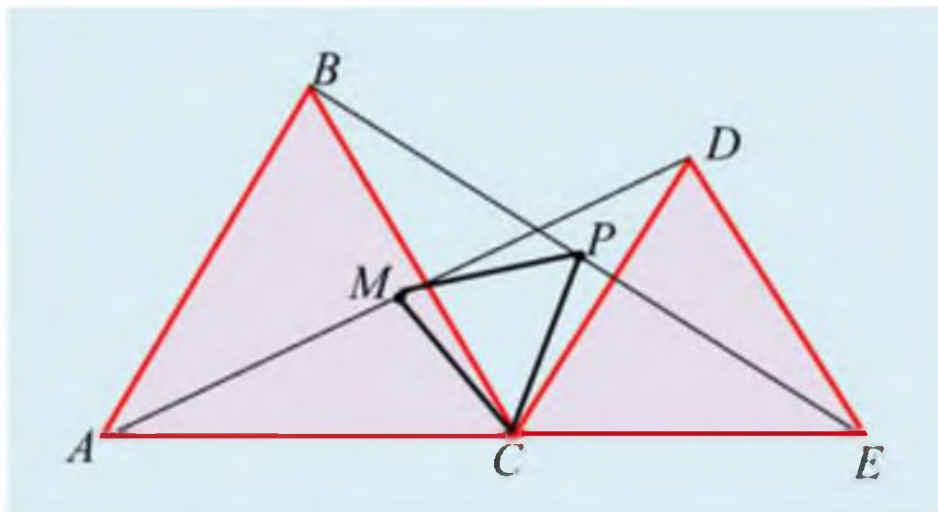
Доведення. Нехай при повороті навколо точки O на кут α точки X та Y фігури F переходять у точки X', Y' фігури F' . Доведемо, що $X'Y' = XY$. Розглянемо, загальний випадок, коли точки O, X та Y не лежать на одній прямій.



$\triangle OXY' = \triangle OXY$ за другою ознакою рівності трикутників. Дійсно: у них $OX' = OX$ та $OY' = OY$ за означенням повороту і $\angle X'OY' = \angle XOY = \alpha - \angle YOX'$. З рівності трикутників випливає рівність відповідних сторін. Це означає, що $XY' = XY$. Що й треба було довести.

Приклад 5. На відрізку AE з однієї сторони від нього побудовані рівносторонні трикутники ABC та CDE . M, P – середини відрізків AD і EB відповідно. Довести, що трикутник CMP рівносторонній.

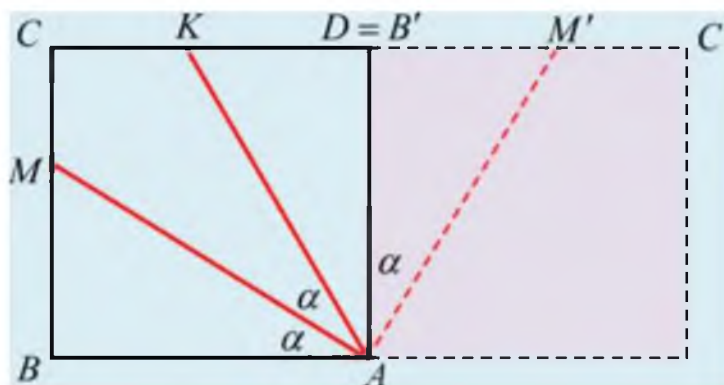
Розв'язання. Розглянемо поворот навколо точки C на кут 60° . При ньому точка E перейде у точку D , точка B — у точку A , відрізок BE — у відрізок AD , а середина цього відрізка, точка P — у середину відповідного відрізка, точку M . Тоді $CP = CM$. Значить $\triangle CPM$ — рівнобедрений. Оскільки $\angle MCP = 60^\circ$, то цей трикутник рівносторонній.



Приклад 6. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взяли точки M та K відповідно, причому $\angle BAM = \angle KAM$. Довести, що $AK = BM + KD$.

Розв'язання. Повернемо квадрат $ABCD$ навколо точки A на кут 90° так, щоб точка B перейшла в точку D . При цьому точка M перейде у точку M' , відрізок AM — у відрізок AM' , а відрізок BM — у відрізок DM' . Покажемо, що $\triangle AKM'$ рівнобедрений і $AK = KM'$. Нехай $\angle BAM = \angle KAM = \alpha$. Тоді отримаємо: $\angle AM'D = \angle AMB = 90^\circ - \alpha$ і $\angle KAM' = \angle KAD + \angle DAM' = (90^\circ - 2\alpha) + \alpha = 90^\circ - \alpha$.

Отже, $\triangle KAM'$ рівнобедрений і $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.



1.5 Центральна симетрія

Зафіксуємо на площині деяку точку O . Точки M і M' називаються симетричними відносно точки O , якщо ця точка є серединою відрізка MM' . Точка O вважається симетричною сама собі [10, 175с.]. Побудоване перетворення площини називають *симетрією відносно точки* або *центральною симетрією*. Точку O називають *центром симетрії*. Позначати перетворення центральної симетрії будемо символом S_O . Поворот навколо точки на кут π є центральною симетрією з центром у даній точці, тобто $R_O^\pi = S_O$.

Задавати центральну симетрію можна за допомогою центру симетрії або парою симетричних точок.

Оскільки центральна симетрія є частинним випадком повороту, то вона володіє всіма перерахованими вище властивостями повороту. Серед властивостей центральної симетрії, не властивих повороту, відмітимо такі:

- 1) Будь-яка пряма, яка не проходить через центр симетрії, відображається на паралельну до неї пряму.
- 2) Пряма, яка проходить через центр симетрії, відображається сама на себе.
- 3) Промінь відображається у паралельний промінь, який має протилежний напрямок, причому початки цих променів є центрально симетричними точками.
- 4) Відрізок відображається у рівний йому відрізок.

Теорема (властивість центральної симетрії). Центральна симетрія є рухом [10, 175 с.].

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб центр симетрії збігався

з початком координат. Нехай точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ належать фігурі F . Тоді точки $A_1(-x_1; -y_1)$ і $B_1(-x_2; -y_2)$ – відповідно їх образи при центральній симетрії відносно початку координат.

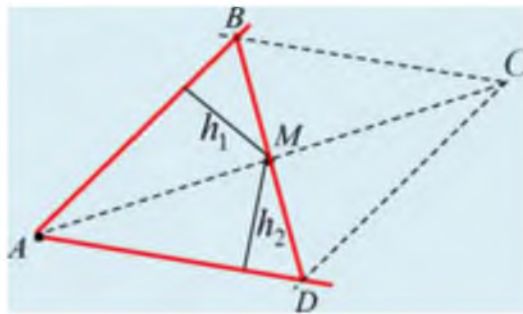
Довжина відрізка $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, а відрізка $A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Отже, ми показали, що $AB = A_1B_1$, тобто центральна симетрія зберігає відстань між точками. Отже, центральна симетрія є рухом.

Наслідок. Якщо фігури F і F_1 є симетричними відносно деякої точки, то $F = F_1$

Приклад 7. Всередині кута α розташована точка на відстанях h_1 та h_2 від сторін кута, а також проведено відрізок з кінцями на сторонах кута та серединою у заданій точці. Обчислити площу трикутника, який при цьому утворився.

Розв'язання. Нехай $\angle DAB = \alpha$, точка M віддалена від сторін AB і AD на



відстані h_1 та h_2 відповідно, а також M – середина відрізка BD . При симетрії відносно точки M точка A перейде у деяку точку C . Тоді отримаємо, що у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл, тому він є паралелограмом, висоти якого дорівнюють $2h_1$ та $2h_2$. Оскільки $AD = \frac{2h_1}{\sin \alpha}$, то площа цього паралелограма $S = AD \cdot 2h_2 = \frac{4h_1 h_2}{\sin \alpha}$. Площа заданого трикутника дорівнює половині площі паралелограма тобто

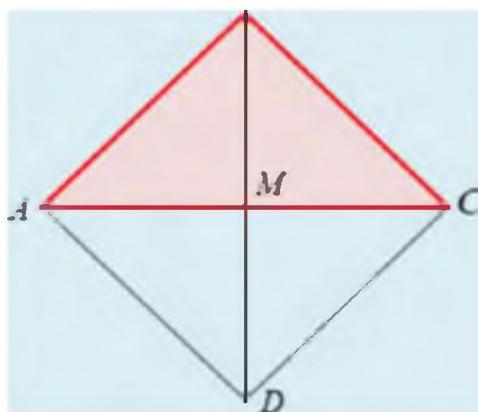
$$S_{\Delta} = \frac{2h_1 h_2}{\sin \alpha}.$$

Приклад 8. Довести, що якщо у трикутнику медіана та бісектриса

співпадають, то він рівнобедрений.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC відрізок BM є медіаною та бісектрисою. Симетризуючи точку B відносно точки M , одержимо точку D . У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл, тому він є паралелограмом. Тоді $\angle ADB = \angle CBD$. За умовою маємо, що $\angle ABM = \angle CBM$.

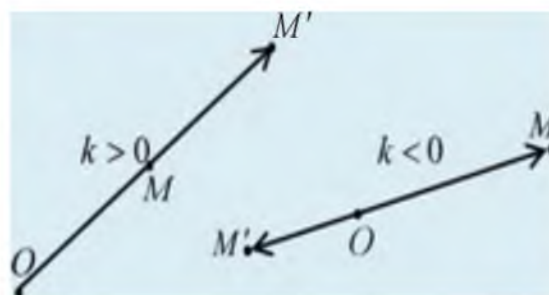
З рівності $\angle ABM = \angle ADM$ робимо висновок, що трикутник ABD – рівнобедрений і $AB = AD$. Але $AD = AC$, тому $AB = BC$.



1.6 Гомотетія

Нехай задане деяке не нульове дійсне число k . Зафіксуємо на площині довільну точку O . Кожній точці M площини поставимо у відповідність точку M' цієї площини таку, що $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. Задане правило задає перетворення площини, причому кожній точці відповідає єдина точка, а різним точкам відповідають різні точки. Таке перетворення площини називають **гомотетією** і позначають символом H_O^k . Точку O при цьому називають **центром гомотетії**, а число k — **коефіцієнтом гомотетії**.

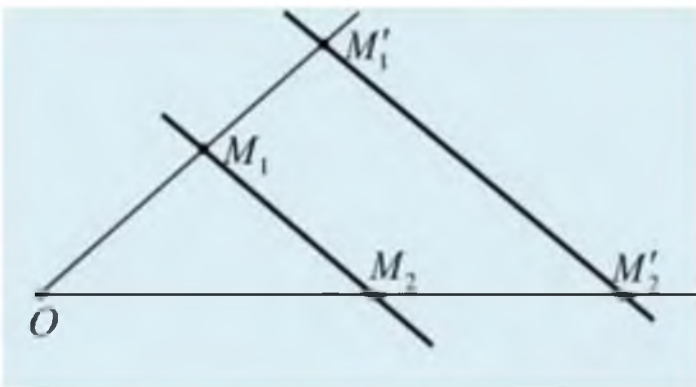
При $k > 0$ вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{OM'}$ напрямлені однаково, тому точки M та M' лежать на промені OM по одну сторону відносно точки O . При $k < 0$ вектори $\overrightarrow{OM}$ та $\overrightarrow{OM'}$ протилежно напрямлені, тому точки M та M' лежать на одній прямій з точкою O ,



але по різні боки від неї.

При $k=1$ виконується рівність $\overline{OM'} = \overline{OM}$, тобто точки M та M' співпадають. При $k=-1$ дістасмо, що $\overline{OM} = -\overline{OM'}$. В цьому випадку точки M та M' розташовані симетрично відносно точки O . Тому гомотетія з коефіцієнтом $k=-1$ є центральною симетрією з центром у точці O .

Нехай $H_O^k(M_1) = M_1'$ та $H_O^k(M_2) = M_2'$. Тоді, оскільки $\overline{OM'_1} = k \cdot \overline{OM_1}$ та $\overline{OM'_2} = k \cdot \overline{OM_2}$, то $\overline{M'_1M'_2} = k \cdot \overline{M_1M_2}$. Це означає, що $M_1M_2 \parallel M'_1M'_2$. Завдяки цьому можна розглянути інший спосіб відшукування образу довільної точки, якщо відомий центр гомотетії та пара відповідних гомотетичних точок. Справді, нехай $H_O^k(M_1) = M_1'$ і задана довільна точка M_2 . Якщо ця точка не належить прямій M_1M_1' то образ точки M_2 буде знаходитися на перетині прямої OM_2 , та прямої, яка проходить через точку M_1' , паралельно до прямої M_1M_2 .



Якщо ж точка M_2 належить прямій M_1M_1' , то спочатку знаходять образ довільної точки, яка не належить цій прямій, а потім за допомогою пари одержаних гомотетичних точок будують образ точки M_2 .

Отже, гомотетію можна задавати також двома парами відповідних точок, які задовольняють наведені вище обмеження.

При гомотетії:

- 1) відстані між точками змінюються в одне і те ж число разів. Рівні відрізки відображаються на рівні відрізки.
- 2) образами колінеарних векторів є колінеарні вектори;
- 3) пряма переходить у пряму, причому паралельні прямі переходять у паралельні прямі;
- 4) відрізок переходить у відрізок, а точка, яка ділить відрізок у деякому відношенні, переходить у точку, яка ділить образ відрізка у такому ж

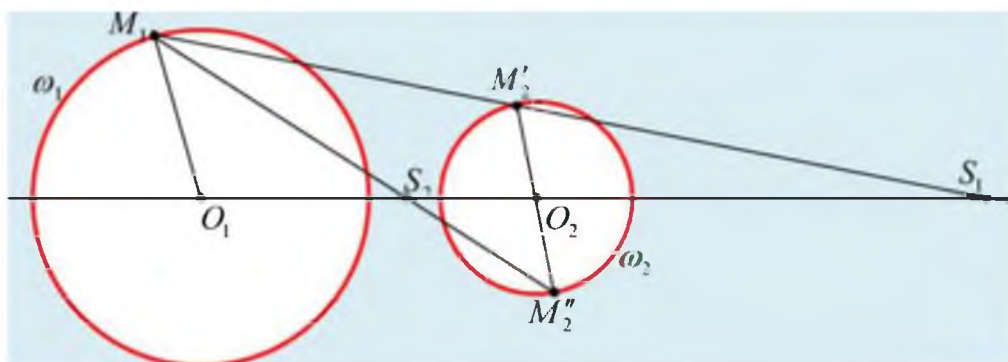
відношенні. Зокрема середина відрізка переходить у середину відрізка;

5) півплощина переводиться у півплощину;

6) зберігаються величини кутів. Зокрема перпендикулярні прямі при гомотетії переходять у перпендикулярні прямі;

7) при гомотетії H_O^k коло з радіусом R переходить у коло з радіусом $R' = |k| \cdot R$, центр якого знаходиться у точці, яка є образом центра заданого кола.

Існують дві різні гомотетії, які суміщають два не рівні кола.

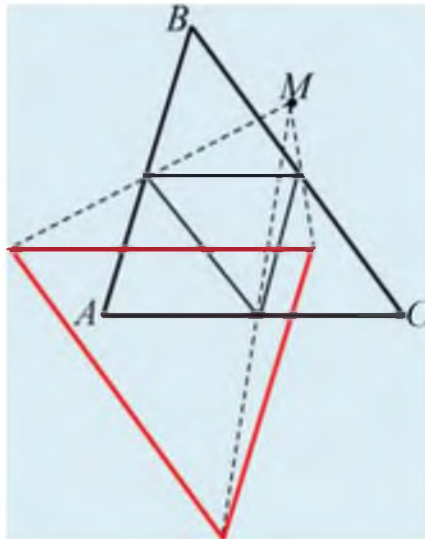


Перетворення площини, при якому відстані між точками змінюються в одне і те ж число k ($k > 0$) разів, називається **перетворенням подібності** з **коефіцієнтом подібності** k .

Якщо точки A та B відображаються при перетворенні подібності з коефіцієнтом k на точки A' та B' , то $A'B' = k \cdot AB$.

Приклад 9. Дано трикутник ABC площею S та довільну точку M . Обчислити площу трикутника з вершинами у точках, симетричних точці M відносно середин сторін трикутника ABC .

Розв'язання. Одержаний трикутник є образом трикутника з вершинами в серединах сторін даного трикутника при гомотетії з центром в точці M і коефіцієнтом $k = 2$. Очевидно, що він рівний даному трикутнику і має площу S .



РОЗДІЛ II

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ЗАДАЧАХ НА ПОБУДОВУ

2.1 Елементарні побудови

У шкільній геометрії часто доводиться виконувати зображення геометричних фігур за допомогою певних геометричних інструментів. Найбільш вживаними серед них вважається *циркуль* та *одностороння лінійка*.

В багатьох випадках за допомогою лінійки та циркуля можна зображувати на площині фігури, які мають певні властивості. Для цього потрібно виконати декілька послідовних дій, кожна з яких відповідає зображенню одного з елементів фігури (точки, відрізка, дуги тощо). Такий процес отримання фігур називають геометричними побудовами. Розділ геометрії, в якому вивчаються геометричні побудови, називають конструктивною геометрією.

Розв'язання конструктивної задачі зводиться до опису послідовності так званих *елементарних побудов*. Вибір окремих побудов у якості елементарних є певною мірою довільний.

До таких перетворень належать:

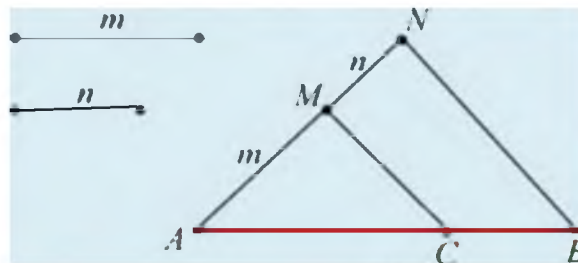
- 1) поділ даного відрізка на дві рівні частини;
- 2) побудова бісектриси кута;
- 3) побудова на даній прямій відрізка, що дорівнює даному;
- 4) побудова кута, рівного даному;
- 5) побудова прямої, що проходить через задану точку паралельно до даної прямої (даного вектора);
- 6) побудова прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої;
- 7) поділ відрізка у даному відношенні;
- 8) побудова трикутника: за трьома сторонами, за двома сторонами та кутом між ними, за стороною та двома прилеглими до неї кутами;
- 9) побудова прямокутного трикутника: за гіпотенузою та катетом, за двома катетами, за катетом та гострим кутом, за гіпотенузою та гострим кутом;

10) побудова прямої, що проходить через задану точку та дотикається до заданого кола.

Наведемо приклади виконання двох із них.

Приклад 10. Поділити заданий відрізок AB у відношенні $\frac{m}{n}$, де m та n — відомі відрізки.

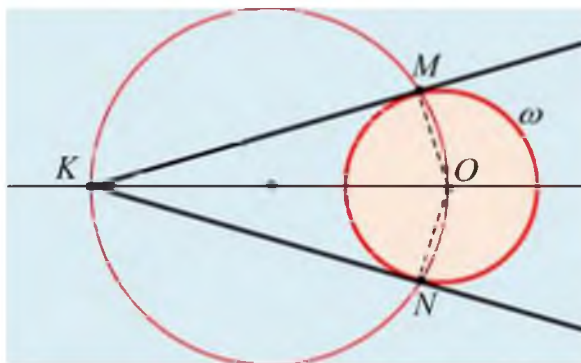
Розв’язання. На відрізку AB знайдемо таку точку C , щоб виконувалася рівність $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$. Для цього під довільним кутом до променя AB проведемо інший промінь з початком в точці A та послідовно відкладемо на ньому відрізки $AM = m$ та $MN = n$. Далі будемо відрізок промінь з початком у точці A та послідовно відкладемо на ньому відрізки $AM = m$ та $MN = n$. Побудуємо відрізок NB і через точку M паралельно до нього проведемо пряму. Нехай вона перетинає відрізок AB у точці C . Ця точка є шуканою і ділить відрізок AB у заданому відношенні $\frac{m}{n}$.



Приклад 11. Нехай задане коло $\omega(O, r)$ та точка K поза ним. Побудувати пряму, що проходить через дану точку та дотикається до кола.

Розв’язання. Проведемо інше коло з діаметром KO . Нехай воно перетинає коло дане у точках M та N . Прямі KM та KN є шуканими дотичними до кола, оскільки вони перпендикулярні до радіусів, проведених у точки M та N , бо кути з вершинами у цих точках, спираються на діаметр KO і є прямими.

Випадок, коли точка K розташована на колі, зводиться до побудови прямої, перпендикулярної до радіуса кола, який проведено в цю точку.



2.2 Основні етапи розв'язання конструктивних задач

Розв'язання конструктивних задач зазвичай відбувається за чотирма етапами:

1. **Аналіз.** На цьому етапі необхідно зрозуміти, які елементи повинні бути наявні у шуканій фігурі, а також як вони пов'язані між собою. Для цього можна створити схематичний рисунок, на якому приблизно зобразити дані та шукані елементи.
2. **Побудова.** На цьому етапі необхідно виконати послідовність елементарних побудов, які, відповідно до аналізу, приведуть до побудови шуканої фігури.
3. **Доведення.** На цьому етапі необхідно довести, що побудована фігура справді відповідає умовам задачі.
4. **Дослідження.** На цьому етапі необхідно дослідити такі питання:
 - Чи завжди можна виконати побудову вибраним способом?
 - Чи можна побудувати шукану фігуру іншим способом, якщо вибраний спосіб не можна застосувати?
 - Скільки розв'язків має задача?

На етапі аналізу необхідно встановити такі залежності між елементами шуканої та даних фігур, які дозволять побудувати шукану фігуру. Для цього можна використовувати такі методи:

- **Аналіз умов задачі.** Вивчення умов задачі може допомогти виявити необхідні зв'язки між елементами шуканої та даних фігур.
- **Створення схематичного рисунка.** Схематичний рисунок

може допомогти уявити, як розташовуються дані та шукані елементи.

- **Припущення про розв'язок.** Іноді можна припустити, що задача вже розв'язана, і на основі цього припущення встановити необхідні зв'язки.

На етапі побудови необхідно виконати послідовність елементарних побудов, які, відповідно до аналізу, приведуть до побудови шуканої фігури.

На етапі доведення необхідно довести, що побудована фігура справді відповідає умовам задачі. Для цього можна використовувати такі методи:

- **Аналіз елементів шуканої фігури.** Вивчення елементів шуканої фігури може допомогти виявити, що вони відповідають умовам задачі.

- **Аналіз побудови.** Вивчення побудови шуканої фігури може допомогти виявити, що вона відповідає умовам задачі.

На етапі дослідження необхідно дослідити такі питання:

- Чи завжди можна виконати побудову вибраним способом? Це питання можна досліджувати, розглядаючи різні випадки, у яких можуть виникнути труднощі при виконанні побудови.

- Чи можна побудувати шукану фігуру іншим способом, якщо вибраний спосіб не можна застосувати? Це питання можна досліджувати, розглядаючи різні способи побудови, які можуть бути застосовані для даної задачі.

- Скільки розв'язків має задача? Це питання можна досліджувати, розглядаючи різні можливості розташування даних елементів на площині.

Проілюструємо реалізацію всіх етапів наведеної вище схеми розв'язання задачі на побудову на наступному прикладі.

Приклад 12. Побудувати трикутник за точками, в яких продовження висоти, медіани та бісектриси, що проведені з однієї вершини, перетинають описане навколо нього коло.

Розв'язання. Аналіз. Нехай $\triangle ABC$ – шуканий, ω – описане навколо нього

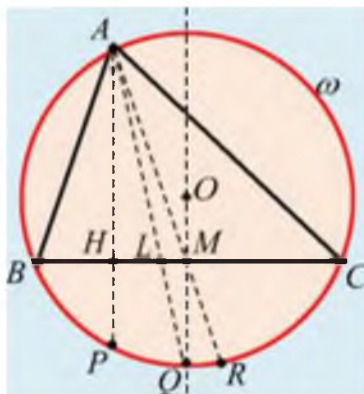
коло, P, Q, R – відповідно точки, у яких продовження висоти AN , медіани AM та бісектриси AL перетинають це коло. Очевидно, що точки P, Q, R не можуть лежати на одній прямій і однозначно визначають коло ω . Оскільки AL є бісектрисою кута A , то $\angle BAL = \angle CAL$, тому дуги BQ та QC рівні. Отже, точка Q є серединою дуги BC . Тому прямі AP та OQ , які перпендикулярні до сторони BC , будуть паралельними між собою. Прямі BC, AR та OQ перетинаються в одній точці M , тому, провівши через цю точку пряму, перпендикулярну до OQ , на перетині з колом ω отримаємо вершини B та C . Для відшукування вершини A через точку P достатньо провести пряму $PA \perp BC$.

Побудова.

- 1) будуюмо коло ω , що проходить через точки P, Q, R . Нехай центр кола знаходиться у точці O ;
- 2) через точку P проводимо пряму паралельну до прямої OQ . На перетині з колом ω знаходимо першу вершину трикутника – точку A ;
- 3) будуюмо точку M , яка знаходиться на перетині прямих AR та OQ ;
- 4) через точку M проводимо пряму перпендикулярно до OQ . На перетині її з колом ω знаходимо дві інші вершини трикутника – точки B та C .

Доведення. Оскільки $PA \perp BC$, то точка P належить продовженню висоти AN . Пряма BC проведена перпендикулярно до OQ , тому $BM = MC$. Отже, відрізок AM є медіаною. З тих же міркувань випливає, що дуги BQ та QC рівні, тому $\angle BAL = \angle CAL$ і відрізок AO – бісектрисою кута A .

Дослідження. Існує єдине коло ω , яке проходить через точки P, Q, R (якщо дані точки лежать на одній прямій, то задача не має розв'язків). Кожна наступна побудова точок та прямих здійснювалася однозначно, тому при не колінеарності заданих точок, задача завжди має єдиний розв'язок.



2.3 Метод геометричних перетворень

Геометричні перетворення можуть бути корисним інструментом у конструктивній геометрії. Вони дозволяють перетворити шукану або задану фігуру таким чином, щоб легше зрозуміти, як вона пов'язана з іншими елементами. Це може зробити побудову простішою або звести її до однієї з елементарних задач. Серед різних геометричних перетворень площини найчастіше використовуються:

- 1) паралельне перенесення;
- 2) осьова симетрія;
- 3) поворот;
- 4) центральна симетрія;
- 5) гомотетія та перетворення подібності.

Означення та основні властивості цих перетворень ми розглянули у попередньому розділі. Тут наведемо приклади розв'язання задач на побудову із застосуванням цих методів.

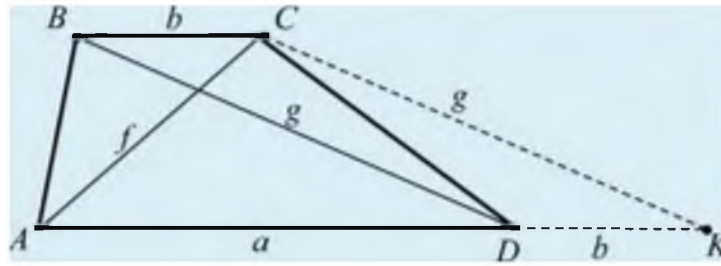
Паралельне перенесення

Приклад 13. Побудувати трапецію за її основами та діагоналями.

Розв'язання. Аналіз. Нехай трапеція $ABCD$ шукана та $AD = a$, $BC = b$, $AC = f$, $BD = g$ – задані елементи. Виконаємо паралельне перенесення діагоналі BD , на вектор BC . Тоді образом точки B буде точка C , точки D – точка K , а діагоналі BD – відрізок CK такий, що $CK = BD$ і $CK \parallel BD$. У результаті перенесення ми отримали трикутник ACK з відомими сторонами $AC = f$, $CK = g$ та $AK = a + b$.

Побудова. Будуємо трикутник ACK із сторонами $AC = f$, $CK = g$ та $AK = a + b$. На стороні AK , відкладаємо відрізок $DK = b$ і знаходимо точку D . Тоді будуємо останню невідому вершину трапеції – точку B , яка знаходиться на відстані b від точки C та на відстані g від точки D .

Дослідження. Якщо сума будь яких двох із відрізків f , g та $a + b$ більша від третього, то дана задача завжди має єдиний розв'язок.



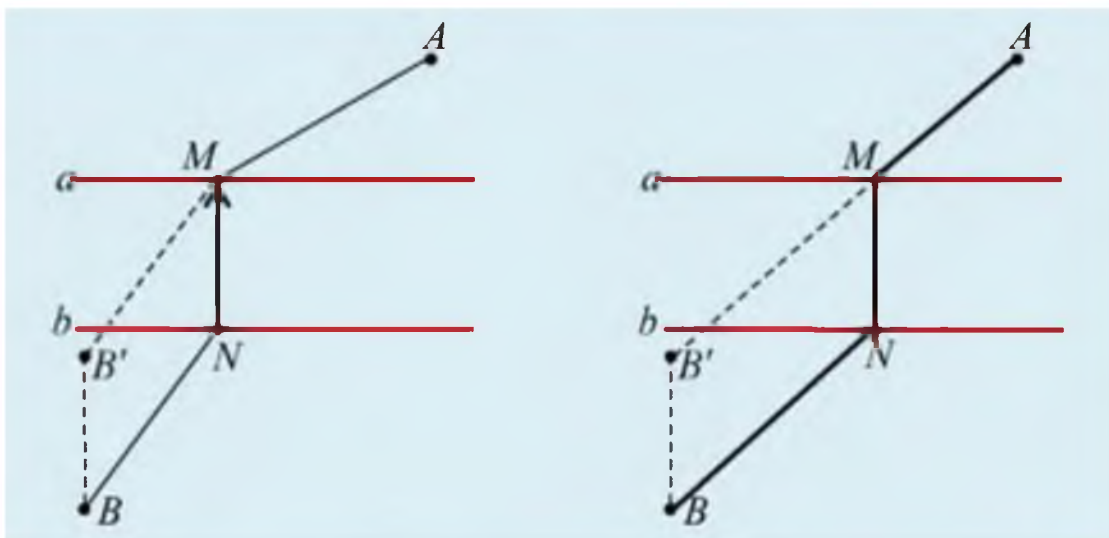
Приклад 14. Між пунктами A та B тече канал. Де варто вибрати місце для мосту, щоб шлях від A до B був найкоротшим?

Розв'язання. Позначимо два паралельні береги каналу прямими a і b . Міст через канал позначимо відрізком MN , перпендикулярним до прямих a і b . Задача полягає в тому, щоб знайти таке положення точки M на прямій a (або точки N на прямій b), при якому довжина ламаної $AMNB$ була б мінімальною.

Щоб зменшити відстань між відрізками AM та BN , перенесемо відрізок BN на вектор NM . При цьому точка N переходить у точку M , а точка B — у B' . Оскільки $BN = B'M$, то потрібно знайти таке положення точки M , при якому ламана $B'MA$, матиме найменшу довжину. Очевидно, що це буде тоді, коли точки B' , M та A лежатимуть на одній прямій.

Побудова виконується в такій послідовності:

- Проводимо пряму перпендикулярну до прямої a та відкладаємо на ній відрізок BB' , який дорівнює ширині каналу.
- Проводимо пряму AB' . Вона перетинає пряму a у шуканій точці M .
- Ламана $AMNB$ має найменшу довжину. Зауважимо, що задача завжди має єдиний розв'язок.



Осьова симетрія

Приклад 15. Задано гострий кут та точка A , що знаходиться між його сторонами. Потрібно на сторонах кута вибрати точки B та C так, щоб периметр трикутника ABC був мінімальним.

Розв'язання. Нехай задана точка A міститься між сторонами кута α . Знайдемо симетричні їй точки відносно сторін кута. Отримаємо точки M_1 та M_2 . Проведемо пряму M_1M_2 , яка перетне сторони кута у деяких точках B та C . Тоді трикутник ABC шуканий.

Дійсно, за властивістю осьової симетрії отримаємо, що $AB = BM_1$ та $AC = CM_2$. Тоді знайдемо периметр трикутника ABC :

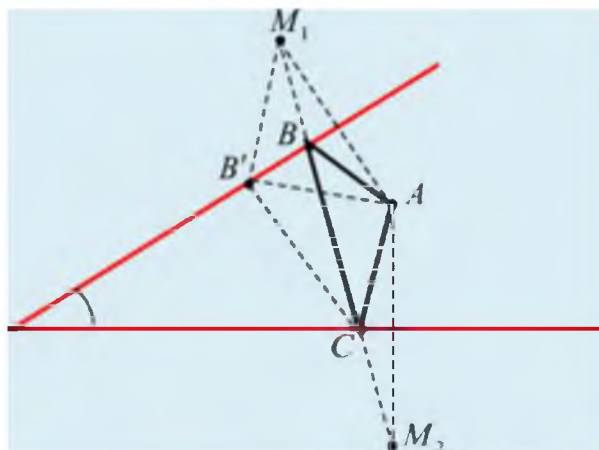
$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = BM_1 + BC + CM_2 = M_1M_2$$

При іншому положенні точки B на стороні кута (наприклад, для точки B') матимемо:

$$P_{\triangle AB'C} = AB' + B'C + CA = B'M_1 + B'C + CM_2 > M_1M_2$$

Аналогічно збільшиться периметр трикутника ABC при зміні положення точки C на іншій стороні кута. Таким чином, точки B та C – шукані.

Очевидно, що якщо заданий кут гострий, то пряма M_1M_2 завжди перетне сторони кута, тому поставлена задача матиме єдиний розв'язок.



Приклад 16. Побудувати трикутник за відомою стороною, її протилежним кутом та різницею двох інших сторін.

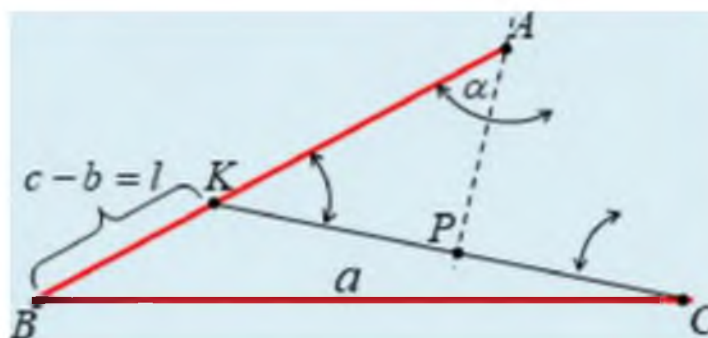
Розв'язання. Нехай трикутник ABC шуканий з відомими елементами: $BC = a$, $AB - AC = l$, $\angle A = \alpha$. Для відрізка AC знайдемо симетричний відносно

бісектрисикута $\angle A = \alpha$, в результаті цього на стороні AB отримаємо точку K така, що $AK = AC$. Очевидно, що $AB - AC = AB - AK = BK = l$ та $\angle BKC = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$.

Тоді, у трикутнику BKC відомі дві сторони та кут між ними, а тому його можна побудувати.

Побудова:

- 1) Будуємо кут величиною $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, з вершиною у точці K .
- 2) Відкладаємо відрізок $BK = l$ на одній зі сторін побудованого кута.
- 3) Будуємо коло $\omega(B, a)$, яке перетинає другу сторону цього кута в точці C .
- 4) Проводимо серединний перпендикуляр до відрізка KC .
- 5) Точка A є точкою перетину побудованого серединного перпендикуляра із продовженням сторони BK побудованого кута.
- 6) Трикутник ABC – шуканий.



Доведення. Згідно з побудовою $BC = a$. Оскільки пряма AP є серединним перпендикуляром до відрізка KC , то $\triangle AKC$ – рівнобедрений. Це означає, що $AB - AC = AB - AK = BK = l$ і $\angle A = \pi - 2\angle AKC = \pi - 2(\pi - \angle BKC) = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \pi = \alpha$, тобто побудований трикутник відповідає умовам задачі.

Дослідження. Оскільки $\angle BKC$ – тупий, то у трикутнику BKC сторона a найбільша. Якщо виконується умова $a > l$, то цей трикутник завжди можна побудувати. Оскільки $\angle CKA$ гострий, то серединний перпендикуляр до

відрізка KC завжди перетне промінь, що є продовженням сторони BK . Тому задача при умові $a > l$ завжди має єдиний розв'язок.

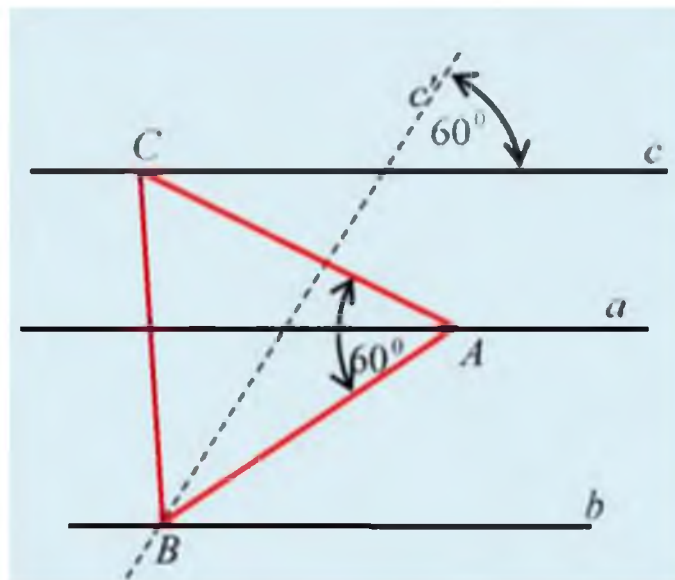
Поворот

Приклад 17. Побудувати рівносторонній трикутник із вершинами на трьох заданих паралельних прямих.

Розв'язання. Нехай задані три паралельні прямі a , b , c та рівносторонній трикутник ABC – шуканий. При повороті на кут 60° навколо точки A пряма c перейде у деяку пряму c' , а вершина C — у точку B , яка очевидно буде належати як прямій b , так і прямій c' .

Побудова трикутника з поворотом виконується наступним чином:

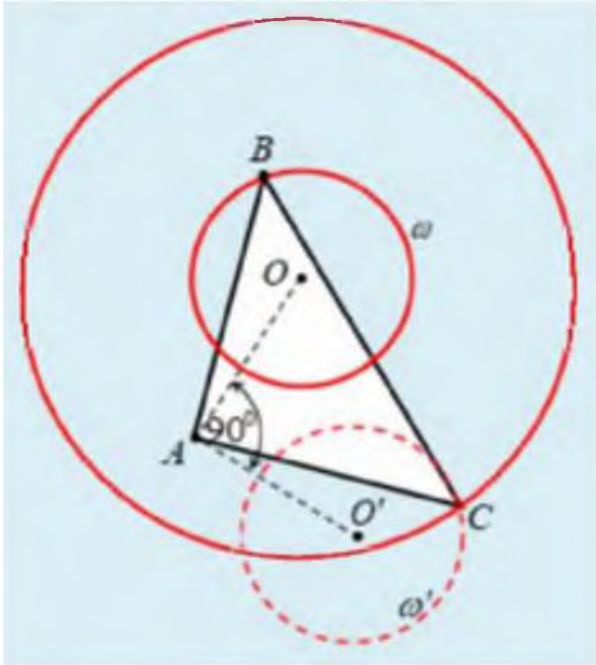
- 1) На одній із прямих вибираємо довільну точку.
- 2) Повертаємо одну з двох інших прямих навколо цієї точки на кут 60° .
- 3) Точка перетину повернутої прямої з третьою прямою стане другою вершиною трикутника.
- 4) Третя вершина трикутника розташовується на третій прямій так, щоб утворювати кути 60° з кожною з двох інших вершин.



Приклад 18. Побудувати прямокутний рівнобедрений трикутник із вершиною прямого кута у заданій точці та двома іншими вершинами на двох заданих концентричних колах.

Розв'язання. Нехай дано два концентричні кола з центром у точці O , точка A , що їм не належить і $\triangle ABC$ – шуканий. Розглянемо поворот навколо

точки A на кут 90° . Образом вершини B при такому повороті буде точка C , а образом меншого кола ω з центром у точці O – коло ω' з центром у точці O' . Тоді, другу вершину трикутника можна отримати, як точку перетину кола ω' із більшим колом.



Побудова. Виконуємо поворот меншого кола ω навколо точки A на кут 90° . Точка перетину образу цього кола при виконаному повороті з більшим колом є другою вершиною трикутника.

Очевидно, що у залежності від кількості спільних точок кола ω' та другого кола задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку.

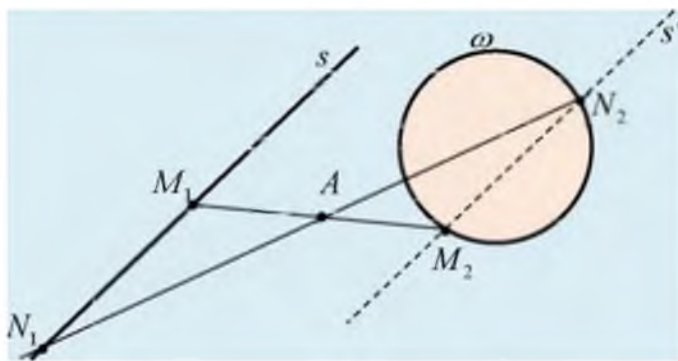
Центральна симетрія

Приклад 19. Через дану точку A провести пряму так, щоб відрізок цієї прямої, кінці якого знаходяться на даних прямій та колі ділився цією точкою навпіл.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Розв'язання. Нехай задані точка A , пряма s , коло ω , а відрізок M_1M_2

із серединою у точці A – шуканий. Оскільки $AM_1 = AM_2$, то точки M_1 та M_2 є центрально симетричними відносно точки A . Тоді вони будуть належати також центрально симетричним відносно точки A прямим s та s' . Тому один із кінців відрізка буде знаходитися у точці перетину кола ω та прямої s'



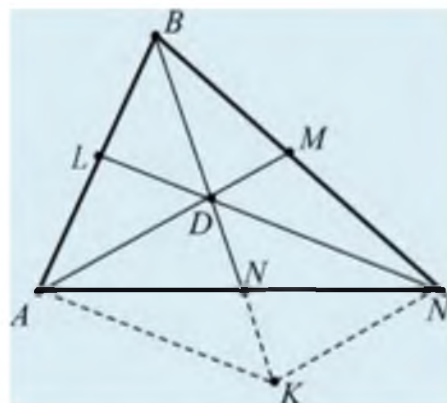
Побудова:

- 1) Симетризуємо пряму s відносно точки A . Отримаємо пряму s' .
- 2) Через спільну точку кола ω та прямої s' і точку A проводиться шукана пряма.

Кількість розв'язків залежить від наявності та кількості спільних точок кола ω та прямої s' . Тому дана задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку.

Приклад 20. Побудувати трикутник за його медіанами m_a , m_b та m_c .

Розв'язання. Нехай трикутник ABC – шуканий, медіани $AM = m_a$, $BN = m_b$ та $CL = m_c$ якого, перетинаються у точці D . Виконаємо симетрію точки D відносно точки N . Нехай її образом буде точка K . Тоді матимемо, що у чотирикутнику $ADCK$ діагоналі точкою перетину діляться пополам. Це означатиме, що він є паралелограмом.



Тоді за властивістю медіани трикутника у $\triangle ADK$ отримаємо:
 $AK = CD = \frac{2}{3}CL = \frac{2}{3}m_c$, $DK = 2DN = \frac{2}{3}m_b$, $AD = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m_a$. Отже, сторонами трикутника ADK є відомі відрізки $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ та $\frac{2}{3}m_c$.

Побудова проводиться за такою схемою:

- 1) За трьома сторонами $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ та $\frac{2}{3}m_c$ будуємо $\triangle ADK$.
- 2) Знаходимо точку N – середину сторони DK і будуємо сторону

$$AC = 2AN.$$

3) На прямій DK знаходимо точку B таку, що $BD = DK$.

4) $\triangle ABC$ – шуканий.

Задача завжди має єдиний розв'язок, якщо сума будь-яких двох заданих відрізків більша від третього.

Гомотетія та перетворення подібності

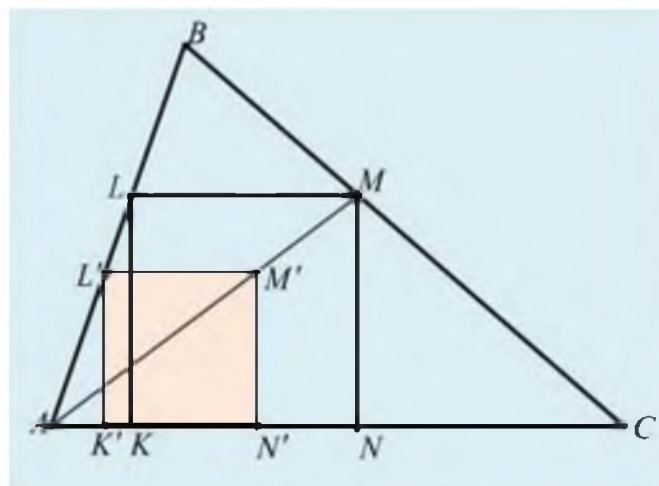
Приклад 21. У даний трикутник вписати квадрат.

Розв'язання. Нехай $\triangle ABC$ – даний трикутник та $K'L'MN'$ – квадрат, вершини K' та N' якого належать стороні AC , а вершина L' — стороні AB заданого трикутника. Проведемо промінь AM' , який перетне сторону BC у точці M .

Розглянемо гомотетію з центром у точці A та коефіцієнтом $k = \frac{AM}{AM'}$, яка точку M' переводить у точку M . Образами точок K' , L' , N' при вибраній гомотетії будуть точки K , L , N , які належать сторонам трикутника, причому $ML \parallel M'L'$, $MN \parallel M'N'$ та $KL \parallel K'L'$.

Чотирикутник $KLMN$ – шуканий квадрат. Дійсно, всі чотири вершини цього чотирикутника є точками на сторонах трикутника. Також він є прямокутником з рівними сторонами, тому що гомотетія зберігає перпендикулярність прямих і переводить рівні відрізки в рівні відрізки.

Побудова шуканого квадрата очевидна. Зазначимо, що у випадку гострокутного трикутника задача має три розв'язки, у випадку прямокутного трикутника – два, а у випадку тупокутного трикутника – один.



Приклад 22. Побудувати трикутник за його висотами.

Розв'язання. Аналіз. Нехай h_a , h_b та h_c – висоти трикутника ABC зі сторонами a , b , c та S – його площа. Тоді правильними є рівності $2S = ah_a = bh_b = ch_c$. Запишемо їх так: $\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}$. З останньої рівності можна

зробити висновок, що даний трикутник подібний до трикутника зі сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ та $\frac{1}{h_c}$. Нехай $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$ та $\tilde{h}_c$ – висоти трикутника $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ із сторонами h_a ,

h_b та h_c і $\tilde{S}$ – його площа. З рівностей $2\tilde{S} = h_a\tilde{h}_a = h_b\tilde{h}_b = h_c\tilde{h}_c$ або $\frac{\tilde{h}_a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{\tilde{h}_b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{\tilde{h}_c}{\frac{1}{h_c}}$

випливає, що трикутник $A'B'C'$ із сторонами, $\tilde{h}_b$ та $\tilde{h}_c$ теж подібний до трикутника із сторонами $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ та $\frac{1}{h_c}$. Тому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

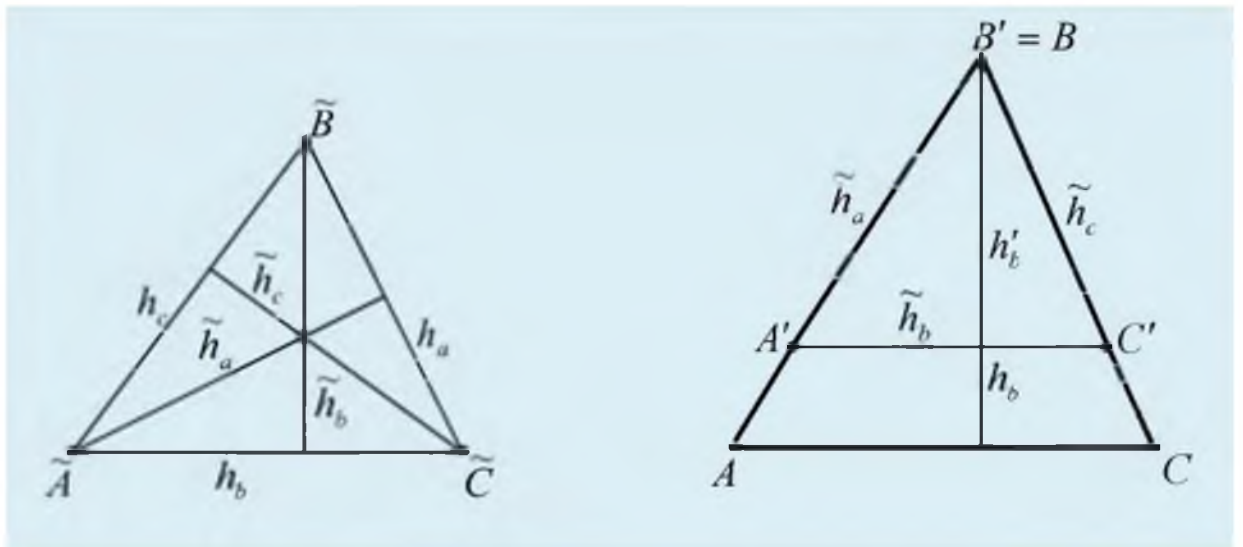
Побудова:

- 1) Будуємо $\triangle \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ із сторонами h_a , h_b та h_c .
- 2) У побудованому трикутнику проводимо висоти $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$ та $\tilde{h}_c$.
- 3) Будуємо $\triangle A'B'C'$ із сторонами $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$ та $\tilde{h}_c$.
- 4) Проводимо одну з висот $\triangle A'B'C'$. Нехай це буде висота h'_b .
- 5) Виконуємо гомотетію $H_{B'}^k$, де $k = \frac{h_b}{h'_b}$.
- 6) Образом $\triangle A'B'C'$ буде шуканий трикутник ABC .

Доведення випливає із аналізу.

Дослідження. Зрозуміло, що задача має єдиний розв'язок, якщо можлива побудова трикутників ABC та $A'B'C'$, тобто, якщо виконуються нерівності:

$$h_a + h_b > h_c, h_b + h_c > h_a, h_a + h_c > h_b \text{ та } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}, \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_b}$$



РОЗДІЛ ІІІ

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ШКОЛІ

3.1 Геометричні перетворення в шкільній математиці

Геометричні побудови є важливою частиною шкільної програми з математики. Учні початкової школи навчаються проводити прямі, кола, відрізки, паралельні та перпендикулярні прямі. У 5 – 6 класах вони освоюють більш складні побудови, такі як кути заданої градусної міри, трикутники, квадрати, прямокутні паралелепіпеди, конуси, циліндри, призми та піраміди.

Задачі на побудову, які можна розв'язати лише за допомогою циркуля і лінійки, є важливою частиною курсу геометрії. Вони мають не лише практичне значення, а й сприяють розвитку логічного та математичного мислення.

З темою «*Задачі на побудову*» учні знайомляться у 7 класі під кінець навчального року.

Під час розв'язування задач на побудову усі побудови виконують тільки за допомогою циркуля та лінійки без поділок, за допомогою яких можна виконати такі побудови: через задану точку провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB ; побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку.

Приклад 1. Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна зі сторін якого є даним променем. [8, 175 с.]

Розв'язання. На рисунку 1 зображено кут A та промінь OK . Нам потрібно побудувати кут, що дорівнює куту A , однією зі сторін якого є промінь OK .

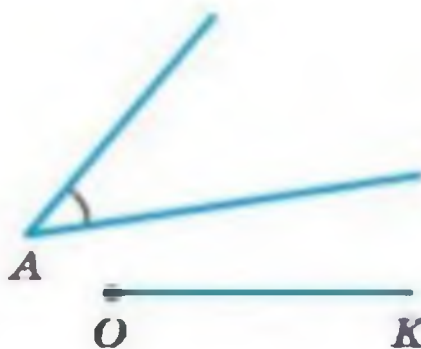


Рис. 1

Побудову виконуватимемо за такою схемою:

- 1) Будуємо коло довільного радіуса r із центром у точці A і знаходимо точки перетину цього кола зі сторонами кута A .
Позначимо їх через B і C (Рис. 2). Тоді $AB = AC = r$ як радіуси кола.

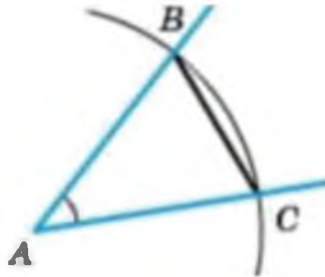


Рис.2

- 2) Будуємо коло радіуса r із центром у точці O , яке перетинає промінь OK у точці M (рис.3, а).
- 3) Проводимо коло радіуса BC із центром у точці M .
- 4) Нехай побудовані кола із центрами в точках O і M перетинаються в точках E та F (рис.3, б).
- 5) Проведемо промені OE та OF (рис.3, в).

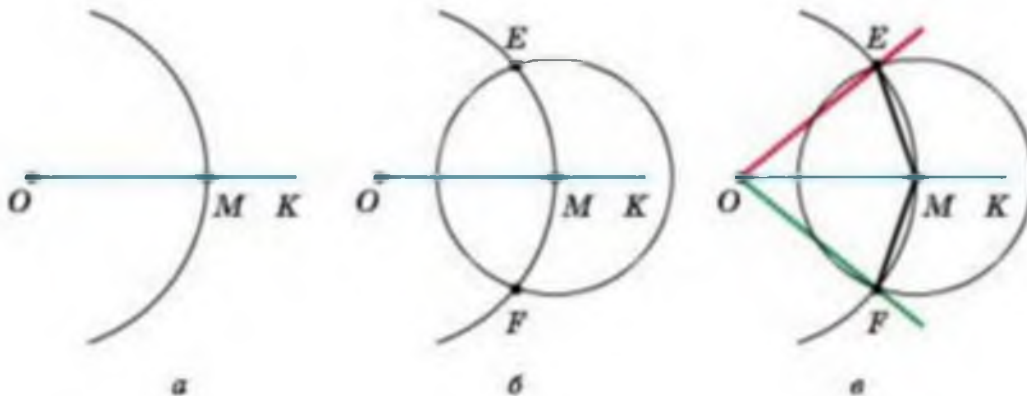


Рис. 3

Доведемо, що кожен із кутів EOM та FOM — шуканий. Покажемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$. Для цього розглянемо трикутники ABC (рис.2) і OEM (рис.3, в), які будуть рівними за третьою ознакою рівності трикутників. Дійсно: $AB = OE = AC = OM = r$ і за побудовою $EM = BC$. З рівності трикутників випливає рівність відповідних кутів. Значить $\angle EOM = \angle BAC$.

Аналогічно можна показати, що $\angle FOM = \angle BAC$. [8, 176 с.]

У курсі геометрії 8 класу вивчається тема «**Подібні трикутники**». Під

час вивчення даної теми учні дізнаються, що два трикутники є подібними, якщо у них відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

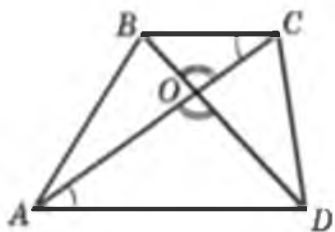
Учні також вивчають три ознаки подібності трикутників. Ці ознаки дозволяють визначити, чи є два трикутники подібними, знаючи лише деякі з їхніх властивостей.

Учні дізнаються, як застосовувати подібність трикутників під час розв'язування задач. Наприклад, вони можуть використовувати подібність трикутників, щоб знайти висоту трикутника, знаючи його основу і бічну сторону.

Нарешті, учні вивчають поняття про подібність довільних фігур. Подібні фігури – це фігури, у яких відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Приклад 2. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці O . Знайдіть основи трапеції, якщо $AO:OC = 5:3$. [9, 91 с.]

Розв'язання. Розглянемо $\triangle AOD$ і $\triangle COB$: $\angle AOD = \angle COB$ як вертикальні, $\angle CAD = \angle ACB$ як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих BC і AD січною AC . Отже, $\triangle AOD \sim \triangle COB$ за першою ознакою подібності трикутників.



З подібності трикутників випливає пропорційність відповідних сторін. Тоді $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{3}$. Нехай x – коефіцієнт пропорційності. Тоді $AD = 5x$, $BC = 3x$.

Як відомо, середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ. Тому отримаємо рівняння: $5x + 3x = 48$, звідки $x = 6$. Отже, $AD = 30$ см, $BC = 18$ см.

В курсі геометрії 9 класу вивчається тема «*Геометричні перетворення*», а разом з нею учні вивчають всі основні види геометричних перетворень, а саме:

- центральна симетрія;
- осьова симетрія;
- поворот;

- паралельне перенесення;
- гомотетія

Вони дізнаються про властивості цих перетворень та про їх застосування в природі, техніці та архітектурі.

3.2 Використання ІКТ на уроках геометрії

У сучасному світі інформаційні технології відіграють ключову роль у всіх сферах життя людини. Вони є невід'ємною частиною освіти, дозволяючи дітям отримувати знання в цікавій та інтерактивній формі.

Завдяки розвитку мультимедійних технологій стало можливим створення комп'ютерних навчальних інтегрованих середовищ (КНІС). Вони поєднують у собі різні навчальні ресурси, такі як тексти, відео, аудіо, анімації, інтерактивні завдання та тести.

КНІС дозволяють дитині самостійно, у зручному для себе темпі та в цікавій формі освоювати будь-яку навчальну дисципліну. Вони допомагають:

- Закріпити теоретичні знання на практиці.
- Розвивати критичне мислення та творчі здібності.
- Навчитися працювати в команді.
- Підвищення мотивації до навчання.

КНІС є ефективним інструментом для навчання дітей різного віку та з різними освітніми потребами. Вони можуть використовуватися як у традиційних школах, так і в дистанційному навчанні.

Сучасні мультимедійні технології дозволяють інтегрувати такі важливі передумови для організації навчально-виховного процесу, як:

Мотивація. Мультимедіа можуть використовуватися для створення цікавого та захоплюючого навчального середовища, яке стимулює інтерес учнів до навчання.

Наочність. Мультимедіа можуть використовуватися для відображення абстрактних понять та явищ у наочній формі, що покращує їхнє розуміння учнями.

Індивідуалізація. Мультимедіа можуть використовуватися для адаптації навчального процесу до індивідуальних потреб та темпів навчання учнів.

Моніторинг. Мультимедіа можуть використовуватися для відстеження прогресу учнів у навчанні, що допомагає вчителям надавати їм індивідуальну підтримку.

Проведення уроку з використанням інформаційних технологій може мати такі переваги:

- Збільшується ефективність засвоєння знань. Мультимедіа можуть допомогти учням краще засвоїти навчальний матеріал, зробивши його більш цікавим та доступним.
- Збільшується мотивація учнів до навчання. Мультимедіа можуть допомогти зацікавити учнів у навчанні та підвищити їхню мотивацію до досягнення успіхів.
- Збільшується індивідуальний темп навчання. Мультимедіа можуть використовуватися для адаптації навчального процесу до індивідуальних потреб та темпів навчання учнів.

Комп'ютер є важливим доповненням до традиційних методів навчання, але він не може повністю замінити вчителя. Вчитель повинен використовувати комп'ютерні технології творчо та з метою підвищення ефективності навчання.

При виборі навчальної комп'ютерної програми слід враховувати такі фактори:

- 1) Зміст навчального матеріалу: програма повинна відповідати навчальній програмі та рівню підготовки учнів.
- 2) Вік та інтереси учнів: програма повинна бути цікавою та доступною для учнів відповідного віку та з їхніми інтересами.
- 3) Можливості комп'ютерного обладнання: програма повинна відповідати технічним можливостям комп'ютерів, які використовуються для навчання.

Наявність різних програмно-педагогічних розробок надає вчителю свободу вибору програми, яка найкраще відповідає його навчальним цілям і

потребам учнів.

Забезпечення підростаючого покоління математичною освітою – це непросте, але важливе завдання. Вивчення математики вимагає зусиль, але воно приносить багато користі. Математика розвиває логічне мислення, гнучкість розуму та здатність прогнозувати події. У сучасному світі ці навички необхідні кожній людині.

Математика завжди була одним із найскладніших навчальних предметів. Тому для успішного навчання учнів вчителю необхідно володіти глибокими знаннями предмета. Він також повинен знати сучасні методи навчання математики та вміти їх застосовувати.

Наприклад текстовий редактор **Word** є потужним інструментом, який може бути використаний для створення різноманітних матеріалів, які можуть допомогти зробити урок математики цікавішим.

Розглянемо кілька конкретних прикладів того, як можна використовувати текстовий редактор Word для створення цікавих матеріалів для уроків математики:

- Таблиці та схеми можуть бути використані для наочного представлення математичних ідей. Наприклад, можна використовувати таблицю для порівняння різних математичних формул або схему для ілюстрації послідовності математичних операцій.
- Ілюстрації можуть допомогти учневі краще зрозуміти математичні поняття. Наприклад, можна використовувати ілюстрацію для зображення геометричної фігури або для пояснення математичного процесу.
- Карти інструкцій можуть бути використані для керівництва учнями в процесі виконання математичного завдання. Наприклад, можна використовувати карту інструкцій для пояснення, як розв'язати рівняння або як побудувати графік функції.
- Календарі можуть бути використані для планування уроків математики або для відстеження прогресу учнів.

- Крім того, текстовий редактор Word можна використовувати для створення роздаткового матеріалу, тестів та текстів контрольних робіт. Це може допомогти вчителю заощадити час і забезпечити, щоб всі учні мали однаковий доступ до матеріалів.

Для того, щоб зробити матеріали для уроків математики цікавішими, можна дотримуватись таких порад:

- Використовуйте яскраві кольори та цікаві шрифти.
- Додайте ілюстрації та зображення.
- Використовуйте цікаві ігри та завдання.
- Зробіть матеріали актуальними та пов'язаними з реальним світом.

Використання текстового редактора Word разом із цими порадами може допомогти зробити уроки математики більш цікавими та ефективними для учнів.

Графічний редактор **Paint** — це програма для малювання та редагування зображень, яка входить до складу операційної системи Windows. Її можна використовувати для створення геометричних фігур та виконання над ними геометричних перетворень, наприклад, паралельного перенесення, повороту тощо.

Використовуючи програму **PowerPoint**, вчитель може зробити пояснення нового матеріалу більш цікавим та ефективним. Такі презентації приваблюють увагу учнів, а також допомагають їм краще зрозуміти та запам'ятати вивчене.

Наприклад, під час пояснення теми «Геометричні перетворення» презентація може містити такі елементи:

- Ілюстрації та візуалізації, які допоможуть учням краще зрозуміти абстрактні поняття.
- Дії та завдання, які активізують діяльність учнів та допоможуть їм краще засвоїти матеріал.
- Відео та аудіо матеріали, які зроблять пояснення більш цікавим та захопливим.

Таким чином, PowerPoint може стати цінним інструментом для вчителів, які хочуть підвищити ефективність свого навчання.

Навчання за допомогою додатка **Google Classroom** – це ефективний спосіб організації освітнього процесу. Платформа має ряд переваг, які роблять її

привабливою для вчителів і учнів.

Однією з основних переваг Google Classroom є різноманітність можливостей для створення та розповсюдження завдань. Вчитель може створювати оголошення, завдання, запитання та інші види навчальних матеріалів. Завдання можуть бути різноманітними за складністю, формою і змістом. Наприклад, можна створювати тести, опитування, контрольні та самостійні роботи, завдання на творчість або дослідження. До завдань можна прикріплювати посилання на веб-ресурси, відео, зображення тощо.

Друга перевага Google Classroom – це управління часом. Вчитель може вказати термін здачі кожного завдання, що допомагає учням організувати свою роботу і не пропустити дедлайни.

Третя перевага – це контроль виконання завдань і оцінювання. Вчитель може відстежувати виконання завдань усіма учнями в класі, а також оцінювати їхні роботи. Оцінювання може бути ручним або автоматизованим. Система оцінювання може бути адаптована під будь-яку шкалу оцінок.

Четверта перевага – це комунікація в Classroom. Вчитель і учні можуть спілкуватися всередині Classroom за допомогою оголошень, коментарів до завдань та приватних повідомлень. Це допомагає їм швидко і ефективно вирішувати виникаючі питання.

П'ята перевага – це звіти для батьків. Вчитель може надсилати батькам звіти про успіхи їхніх дітей. Батьки можуть отримувати звіти щодня або щотижня.

Додаток Google Classroom можна використовувати не тільки для виконання домашніх завдань, але й для організації інших навчальних активностей. Наприклад, можна використовувати його для проведення онлайн-уроків, обговорення тем, виконання групових проектів тощо.

Вміле використання ІКТ допомагає зробити навчання цікавим, різноманітним та ефективним. Google Classroom – це один із інструментів, які можна використовувати для досягнення цієї мети.

3.3 Геометрія в українському орнаменті.

Українська народна культура має глибоке коріння. Одним із її проявів

є вишивка, яка в давнину була не лише прикрасою, а й мала сакральне значення. Геометричні орнаменти, що домінували в українській вишивці, символізували різні аспекти життя українців: природу, родинні зв'язки, вірування тощо.

На жаль, у сучасному світі традиційна культура українців перебуває на межі зникнення. Народні традиції занепадають, а культурна спадщина втрачається. Це відбувається через низку чинників, серед яких глобалізація, урбанізація та політичні катаклізми.

Щоб зберегти українську культуру, необхідно приділяти більше уваги вивченню національних традицій та культурної спадщини. Потрібно популяризувати народну творчість, підтримувати традиційні промисли та ремесла. Важливо також виховувати у молоді патріотичні почуття, прищеплювати їм любов до рідної культури.

Український орнамент – це тисячолітня історія, що сягає часів язичництва. У ті далекі часи, коли люди жили в умовах постійних небезпек, символіка орнаменту була чисто практичною. Це були обереги, які захищали своїх господарів від злих сил і природних катаклізмів.

З часом символи-обереги стилізувалися і стали більше прикрасами. Однак, навіть у стилізованих орнаментах, легко вгадується їхнє практичне минуле і вірування давніх слов'ян.

Традиційна культура українців успадкувала від далекого минулого багато цінного, і орнаментика є важливою частиною цієї спадщини. Орнаменти можна зустріти майже скрізь: на одязі, посуді, меблях, предметах побуту. Одним з аспектів народної культури, де орнамент функціонує постійно, є виготовлення предметів із тканини, зокрема вишивка.

Орнамент – це декоративний візерунок або узор, який створюється шляхом ритмічного повторення геометричних елементів, стилізованих рослинних чи тваринних мотивів.

Рослинний орнамент складається з простих стилізованих рослинних елементів, таких як квіти, листя, гілки.

Зооморфний орнамент може бути реалістичним або стилізованим. Він може зображувати реальних тварин, як-от птахів, звірів, риб, або ж

фантастичних істот.

Антропоморфний орнамент – це стилізоване зображення людських силуетів.

Предметний орнамент складається з зображень предметів побуту, знарядь праці, відпочинку, атрибутики театрального мистецтва, музичних інструментів тощо.

Орнамент, що утворюється з окремих елементів тексту, називається *каліграфічним*.

Орнамент, що реалістично або стилізовано зображує природу або архітектуру, називається *пейзажним*.

Орнамент, що зображає герби, ордени, медалі, емблеми та значки, називається *геральдичним*.

Орнамент, що складається з геометричних елементів, які чітко чергуються, називається *геометричним*.

Геометричні орнаменти – один з найдавніших видів декоративно-прикладного мистецтва. Вони виникли на основі графічних символів, які використовувалися нашими предками для передачі важливої інформації.

Перші геометричні орнаменти з'явилися ще в епоху палеоліту. Вони були простими і схематичними, але вже містили в собі елементи сакрального значення. Наприклад, коло часто символізувало сонце, а хрест – вогонь.

У добу бронзи геометричні орнаменти стали більш складними і різноманітними. Вони стали використовуватися не тільки в вишивці, але і в інших видах декоративно-прикладного мистецтва, таких як ткацтво, гончарство, різьблення по дереву та каменю.

У давнину геометричні орнаменти не тільки прикрашали предмети побуту, але і несли в собі магічний сенс. Вони вважалися оберегами, які захищали людей від темних сил.

З часом первинний, магічний, зміст геометричних орнаментів був втрачений. Вони стали сприйматися, в першу чергу, з естетичної точки зору, як прикрасу.

Найбільш поширеними мотивами геометричних орнаментів є геометричні фігури:

- Ромбики – символ родючості і достатку.
- Хрестики – символ вогню, життя і захисту.
- Кола – символ сонця, світла і вічності.
- Овали – символ жіночності і материнства.
- Зигзаги – символ води, руху і змін.
- Трикутники – символ вогню, духовності і вищих сил.
- Шеврони – символ мудрості і знань.
- Меандри – символ нескінченності і вічності.
- Хвилясті лінії – символ води, життя і руху.
- Квадрати – символ порядку, гармонії і рівноваги.

Геометричні орнаменти мають багатовікову історію і традиції. Вони є невід'ємною частиною української культури і мистецтва.

Геометричні орнаменти зустрічаються в культурах різних народів світу. Вони є унікальним відображенням світогляду і духовності своїх творців.

Геометричні орнаменти мають не тільки декоративну, але і символічну функцію. Вони можуть нести в собі значення добра, зла, родючості, достатку, захисту та інші.

Геометричні орнаменти використовують у різних видах мистецтва, таких як архітектура, живопис, скульптура, декоративно-прикладне мистецтво.

Приклади геометричних орнаментів:

- В українській вишивці геометричні орнаменти часто зустрічаються у вигляді ромбовидних, трикутних, квадратних та інших фігур. Вони можуть бути простими або складними, з різноманітними комбінаціями елементів.
- У ткацтві геометричні орнаменти використовують для створення візерунків на тканинах. Вони можуть бути простими або складними, з різноманітними кольорами і фактурами.
- У гончарстві геометричні орнаменти використовують для прикраси посуду. Вони можуть бути нанесені на поверхню посуду за допомогою різних технік, таких як розпис, гравірування, різьблення.
- У різьбці по дереву геометричні орнаменти використовують для створення декоративних елементів, таких як меблі, посуд, шкатулки.

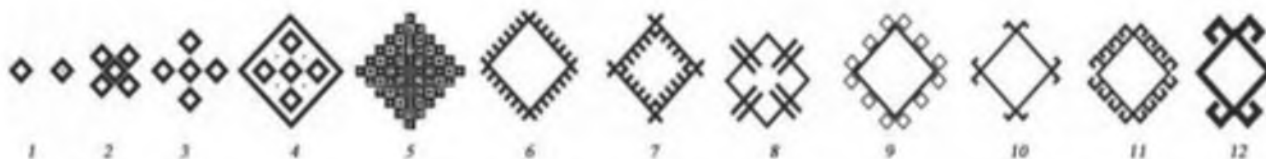
Вони можуть бути виконані в різних техніках, таких як плоска різьба, об'ємна різьба, пропінування.

Геометричні орнаменти - це унікальне і неповторне явище в світовому мистецтві. Вони є невід'ємною частиною культури і традицій різних народів світу.

Ромб

Ромб у вишивці є символом чоловічого та жіночого начала. Ці два начала у праукраїнській культурі уособлювали чоловіка та жінку, які разом творили родину та домашній затишок. Ромб, що складається з двох трикутників, символізує цю гармонію: три кути ромба утримує жінка, а четвертий – чоловік. Таким чином, ромб у вишивці – це символ єдності, достатку та родинного благополуччя.

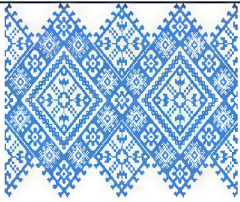
Існують різні види ромбічних елементів вишивки:



Ромб – це один з найпоширеніших символів української вишивки. Він також відомий як Трипільський квадрат і символізує борону, інструмент, який готує землю до посіву. Крім простого ромба, на вишивці часто зустрічаються ромби з гачками (вусиками) та інші його інтерпретації. Розглянемо основні з них.

Таблиця 1

Назва геометричної фігури на вишивці	Вид геометричної фігури на вишивці	Символічність
Ромб-жаба		Ромб символізує родючість, тому його часто використовували в архаїчних культурах.
Ромб з крапками		Ромб із крапкою посередині – це символ засіяного поля, яке для наших предків було символом достатку та добробуту.

Ромб-реп'ях (решітка)		Ромб з відміткою посередині та продовженими до кутів сторонами символізує зруб. Таку форму мають балки, які укладаються при будівництві хати.
Перехрещений ромб		Перехрещений ромб – це вічне коло життя, яке починається з землі, родючості і врожаю.
Ромб з крилами		Символом Душі є ромб з продовженими лініями, що нагадують крила. Цей символ схожий на птаха, який є символом свободи і духовності. Душа також є символом свободи і духовності, тому вона часто зображується у вигляді птаха.
Ромб-квадрат		Ромб-квадрат є символом Землі, яка є джерелом достатку, багатства та благополуччя. Розділ квадрата хрестом на чотири частини символізує родючість і плодючість, що є важливими для продовження роду і забезпечення добробуту.

Трикутник

Однією з ключових фігур у геометрії є трикутник. Він є одним із найпоширеніших символів і в українській вишивці. Він зустрічається в різних варіаціях, як у самостійних елементах, так і в складніших орнаментах.

Трикутник як символ життя

У багатьох культурах трикутник є символом життя. Він символізує три основні етапи життя людини: народження, життя і смерть. Трикутник також може означати три стихії: вогонь, воду і повітря.

У українській вишивці трикутник часто символізує життя і продовження роду. Він часто зустрічається в орнаментах, пов'язаних з родючістю, наприклад,

у ромбах, зірках і квітах.

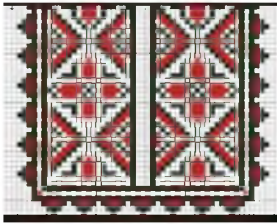
Трикутник як символ Трійці

Трикутник також є символом християнської Трійці. У цьому випадку трикутник складається з трьох однакових сторін, що символізують рівність трьох іпостасей Трійці: Бога Отця, Бога Сина і Бога Святого Духа.

Трикутник як символ Трійці зустрічається в українській вишивці в різних варіаціях. Він може бути зображений як трикутник, що складається з трьох однакових трикутників, або як трикутник, що містить в собі інший трикутник.

Таблиця 2

Назва геометричної фігури на вишивці	Фігура у вишивці	Символічність
Трикутник-стихія		Трикутник - це символ єдності трьох різних елементів. У різних культурах він може означати три стихії (воду, повітря та вогонь), три рівні буття (небо, землю та підземний світ), тривімірність світу або три особи Святої Трійці у християнській релігії.
Трикутник-шеврон		Трикутні шеврони – це фігури без основи. Вони можуть бути символами чоловічого або жіночого начала. Шеврони з вершинами догори символізують духовне чоловіче начало, а з вершинами донизу – жіноче.
Трикутник-вогонь		Трикутник – символ вогню нагадує собою язик полум'я.

Трикутник- Дух, Трикутник- Мати		Трикутник, вершина якого спрямована догори, – це сходинки до неба, а зображений вершиною донизу – це коріння, що сягають у землю.
Трикутник- «пісочний годинник»		Трикутники, що доторкаються вершинами, утворюють вічну єдність Світу та Антисвіту. Місце їх дотику – це портал, що веде з одного світу в інший.

Зірка

Зірка – це конфігурація трикутника, яка утворюється шляхом вставлення одного трикутника в інший. Зірки можуть мати п'ять, шість або сім променів.

Восьмикутна зірка (октаедрон) утворюється від проникнення одна в одну тригранних пірамід. Вона є символом духовного переродження людини, а також шляху душі в земному житті.

Разом зірки символізують гармонію між духовним і матеріальним світами, а також втілення Божого задуму на Землі. Вони також відомі як "квіти-зорі".

Хрест є символом досконалості, а також Духу. У багатьох культурах аналогом хреста є коло - символ Сонця, так зване солярне колесо.

У язичництві та християнстві коло символізує вищі сакральні цінності, пов'язані з культом неба і землі. Воно також є символом нескінченності, гармонії, круговерті небесних тіл, часу і земного життя.

Обидва символи є основою пізнання Всесвіту і часто зображуються разом (хрест у колі). Хрест і коло є головними елементами орнаменту. Наші предки зображали Сонце, зорю і місяць у вигляді кола або хреста. Іноді

хрест у колі перетворювався на чотирипелюсткову квітку. Як дана фігура інтерпретувалася у вишивці подано у таблиці 3.

Таблиця 3

Назва геометричної фігури на вишивці	Фігура у вишивці	Символічність
Коло- Досконалість		Коло – це простий, але багатозначний символ. Він означає досконалість, оскільки не має ні початку, ні кінця. Також коло символізує Дух, що є основою всього сущого. Ось чому воно часто використовується в релігійних символах, таких як мандали або хрест. Крім того, коло символізує сонце, яке є джерелом життя і світла.
Коло і Хрест		Хрест у колі - це символ, який об'єднує в собі два протилежні начала: вертикальне і горизонтальне, верхнє і нижнє, чоловіче і жіноче. Цей символ є відображенням гармонії і рівноваги, які існують у світі. Наші предки використовували хрест у колі для зображення небесних тіл і природних явищ. Наприклад, він символізував сонце, зорю, місяць, вогонь, воду. Іноді хрест у колі перетворювався на чотирипелюсткову квітку, яка також мала символічне значення. Наприклад, вона могла означати родючість, життя або перемогу добра над злом.

За типами орнаменти поділяються на :

Сітчастий орнамент

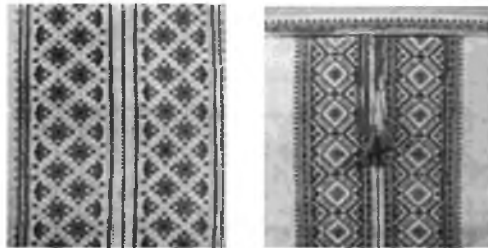
Основа ситчастого орнаменту – це комірка з орнаментальним

мотивом усередині. Розмір комірки може бути різним. Сітчастий орнамент характерний для тканин. Комірка може повторюватися в будь-якому напрямку.

Композиційно замкнений орнамент

Композиційно замкнений орнамент вписується у будь-яку форму. Він може бути частиною орнаментальної смуги чи комірки, або ж окремим елементом. Для створення цього типу орнаменту використовують прості геометричні форми та форми рослинного світу.

Часто в композиційно замкненому орнаменті поєднують рослинні та геометричні елементи.



Центричний – окремі елементи орнаменту вписані у квадрат, коло, ромб або інший багатокутник, розташований у центрі.



Стрічковий – у вигляді прямої чи криволінійної орнаментальної смужки, що прикрашає середину виробу чи обрамлює його.



Українська вишивка – це мистецтво, яке сягає глибокої давнини. Вона має особливе значення для української культури та традицій.

Вишивка є плоским зображенням, тому вона орієнтована по вертикалі. Головний принцип української вишивки - це поділ на три рівні: верх, середину та низ. Цей поділ можна порівняти з трьома рівнями Всесвіту: небом, землею та підземним світом.

У вишивці сорочки поділ на три рівні зберігається як у загальному комплексі вишивки, так і в орнаментативній полів та рукавів.

Комір сорочки часто вишивається меандровим орнаментом. Цей орнамент має зооморфне значення, оскільки його символізують змії. На пазухових розрізах також можна зустріти меандровий орнамент.

Ромбічні орнаменти та варіанти з квадратними мотивами виконуються при вишиванні переду сорочки.

В цілому орнаментальні композиції із застосуванням геометричних орнаментів у вишивках на одязі несли важливу інформативну та символічно-знакову функцію. Вони розповідали як про саму людину, так і про її життя.

Особливо важливою роллю вишивок було заклинання на щасливу долю, довге життя, багатство, здоров'я та захист від нечистої сили.

Вишивка - це не просто прикраса, а й символ української культури та традицій. Вона має глибоке значення для українців і є невід'ємною частиною їхнього життя.

ВИСНОВОК

Для реалізації мети дипломного дослідження були виконані наступні завдання:

- 1) сформульовано означення поняття рух, а також означення основних геометричних перетворень(паралельне перенесення, осьова симетрія, поворот, центральна симетрія);
- 2) пояснено як геометричні перетворення застосовуються в задачах на побудову;
- 3) проведено аналіз підручників з геометрії щодо теми «Геометричні перетворення»;
- 4) розглянуто можливості додатку Google Classroom;
- 5) проаналізовано геометричні перетворення в українському орнаменті.

Мета, з якою проводилося дипломне дослідження була досягнута: сформульовано основні теоретичні засади з теми «Геометричні перетворення», наведено приклади розв'язування задач, а також проаналізований матеріал, викладений у різних підручниках з геометрії.

У процесі дослідження була вивчена рекомендована методична література, а також більш детальне ознайомлення з інформаційно-комунікативними технологіями, особливо з додатком Google Classroom, у якого є певні недоліки, які були виявлені під час його вивчення, а саме недосконала система оцінювання та відсутність можливості більше спілкуватися з учнем віч-на-віч. Тож можна зробити висновок, що комп'ютер, як і інші інформаційні носії, виконує суто допоміжні функції і тільки співпраця людини і персонального комп'ютера в освіті дозволить зробити процес навчання більш ефективним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Апостолова Г. В. Геометрія: 8: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2008. – 272с.
2. Апостолова Г. В. Геометрія: 9: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Генеза, 2009. – 304с.
3. Бевз Г. та ін. Геометрія: 10: профільний рівень. Генеза, 2010. – 231с.
4. Бевз Г. та ін. Геометрія: 11: академічний рівень, профільний рівень. К.: Генеза, 2011. – 336с.
5. Бурда М., Тарасенкова М. Геометрія: підручник для 9 класу (нова програма). - К: УОВЦ «Оріон», 2017. – 224с.
6. Бурда М., Тарасенкова М. Геометрія: підручник для 10 класу (академічний рівень). - К: Зодіак-ЕКО, 2010. – 176с.
7. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії: Книжка для вчителя. – К.: Абрис, 1994.
8. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. Геометрія: підручник для 7 класу (нова програма). – Х.: Гімназія, 2017. – 224с.
9. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. Геометрія: підручник для 8 класу (нова програма). – Х.: Гімназія, 2016. – 208с.
10. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. Геометрія: підручник для 9 класу. – Х.: Гімназія, 2017. – 240 с.
11. Никифорчин О.Р., Собкович Р.І., Казмерчук А.І. та ін. Збірник тестових завдань з математики. - Івано-Франківськ. :Прикарпатський національний університет, 2011. – 268 с.