

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого(магістерського) рівня вищої освіти
на тему:

"СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ"

Виконала: студентка II курсу
групи СОМ(М)(З)2
Спеціальності: 014.04"Середня освіта
(Математика)"
Івасюк Уляна Василівна

Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, проф.
Заторський Роман Андрійович

Рецензент: Гарпуль О.З., канд. фіз.-мат.
наук, доцент кафедри математики та
інформатики і методики навчання

АНОТАЦІЯ

Магістерська робота присвячена вивченню симетрії в алгебрі, зокрема, застосуванню симетричних многочленів у позакласній роботі з математики.

Об'єкт дослідження – рівняння та системи рівнянь вищих порядків.

Предмет дослідження – метод, який дозволяє розв'язувати такі рівняння та системи рівнянь.

Мета дослідження: обґрунтувати доцільність використання даного методу у позакласній роботі з математики.

Дипломна робота викладена на 57 сторінках, містить 4 розділи та 23 джерела у списку літератури.

У першому розділі розглядається симетрія в природі, фізиці та математиці. Виділено основні типи та види симетрії.

У другому розділі дано означення про елементарні симетричні многочлени, степені суми. Розглянуто зв'язок між симетричними многочленами та елементарними симетричними многочленами, степеневими сумами та елементарними симетричними многочленами. Встановлено взаємозв'язок формул Ньютона та Вієта з елементарними симетричними многочленами. Також доведено основні теореми теорії симетричних многочленів від двох та трьох змінних.

У третьому розділі розглянуто практичне застосування теорії симетричних многочленів до розв'язування рівнянь, зворотніх рівнянь та систем рівнянь.

У четвертому розділі розглянуто вправи зі шкільних підручників, до яких можна використати теорію симетричних многочленів. Оскільки у підручниках міститься незначна частина таких завдань, то у другому підпункті цього розділу було виокремлено 30 рівнянь і 30 систем рівнянь, які можна використовувати на позакласній роботі з математики.

Ключові слова: симетрія, симетричні многочлени, елементарні симетричні многочлени, степеневі суми, рівняння, зворотні рівняння та системи рівнянь.

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1. Симетрія, як складова навколишнього середовища, фізичних процесів та математики	5
1.1. Симетрія у природі та фізичних явищах	5
1.2. Поняття симетрії у математиці	7
Висновки до розділу 1	8
Розділ 2. Теоретичні положення про симетричні многочлени	9
2.1. Означення симетричних многочленів	9
2.2. Вираження симетричних многочленів через елементарні симетричні многочлени	11
2.3. Вираження симетричних многочленів через степеневі суми	13
2.4. Симетричні многочлени від кількох змінних	16
Висновки до розділу 2	21
Розділ 3. Практичне застосування симетричних многочленів	22
3.1. Розв'язування рівнянь за допомогою симетричних многочленів	22
3.2. Розв'язування систем рівнянь за допомогою симетричних многочленів	33
3.3. Зворотні рівняння	41
Висновки до розділу 3	44
Розділ 4. Симетричні многочлени у шкільному курсі математики	45
4.1. Аналіз методики використання симетричних многочленів у шкільних підручниках	45
4.2. Задачі з використанням симетричних многочленів, які можна використовувати на позакласній роботі з математики	51
Висновки до розділу 4	54
Висновки	55
Список використаних джерел	56

Вступ

Актуальність теми: Часто учні, а інколи і студенти, стикаються з тим, що їм доводиться розв'язувати рівняння чи системи рівнянь вищих порядків. Переважно вони хочуть використати формулу дискримінанта або розв'язати їх якимось іншими штучними методами. Зрозуміло, що дана формула не завжди буде ефективною, а розв'язок може бути складним. Враховуючи труднощі, які стоять перед учнями, розглянемо метод, який дозволить вирішувати такі завдання більш ефективно. Даний метод є корисним не тільки для учнів, але й для студентів, які вивчають такі дисципліни як: математичний аналіз, елементарна математика, вища математика тощо.

Розглянемо рівняння

$$\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 2$$

Перепишемо його у вигляді

$$\sqrt[4]{41+x} = 2 - \sqrt[4]{41-x}$$

Стандартну схему розв'язку даного рівняння, яку застосували б учні, це піднесення лівої та правої частини до четвертого степеня.

$$(\sqrt[4]{41+x})^4 = (2 - \sqrt[4]{41-x})^4$$

Дана процедура є складною, і зазвичай на даному етапі учні допускають помилок!

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^5 - y^5 = 2101 \end{cases}$$

У першому рівнянні системи виражаємо x через y , і підставляємо його в друге рівняння системи. Отримаємо

$$\begin{cases} x = 1 + y, \\ (1 + y)^5 - y^5 = 2101; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + y, \\ (1 + y)^5 = y^5 + 2101. \end{cases}$$

Звичайно, можемо розв'язати рівняння п'ятого степеня, використавши Біном Ньютона:

$$(a+b)^n = c_0 a^n b^0 + c_1 a^{n-1} b^1 + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_{n-1} a^1 b^{n-1} + c_n a^0 b^n$$

Але метод, який ми розглянемо, дозволить розв'язувати такі рівняння та системи рівнянь такого типу значно швидше та ефективніше.

Як відомо з історії математики, близько 2000 років до н.е., більша частина математичних задач мала розрахунковий характер. Але вже тоді зустрічалися задачі, які при розв'язуванні зводилися до складання рівнянь чи систем рівнянь. Вміти розв'язувати рівняння 2 степеня було викликано потребою, яка стосувалася обчислення площ земельних ділянок. Математики постійно стикалися із задачами, які зводилися до складання рівнянь n -го степеня, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язування багатьох економічних задач зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь n -го степеня, $n > 4$. На даний момент, ще не виведена загальна формула, яка б дала змогу розв'язувати такі рівняння. Тому і буде розглядатися метод, який дозволить вирішувати певну частину таких рівнянь.

Об'єкт дослідження: рівняння та системи рівнянь вищих порядків.

Предмет дослідження: метод, який дозволяє розв'язувати такі рівняння та системи рівнянь.

Мета дослідження: обґрунтувати доцільність використання даного методу у позакласній роботі з математики

Поставлені завдання:

1. Опрацювати науково-методичну літературу, яка стосується заданої теми.
2. Дослідити симетрію відносно алгебри.
3. Розглянути рівняння та системи рівнянь шкільного курсу математики.
4. Застосувати теорію симетричних многочленів до розв'язування рівнянь та систем рівнянь.
5. Обґрунтувати доцільність використання даного методу у шкільній математиці.

Розділ 1

СИМЕТРІЯ, ЯК СКЛADOVA НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА, ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ТА МАТЕМАТИКИ

1.1. Симетрія у природі та фізичних явищах

Симетрія - це витвір природи, який створює гармонію та рівновагу. Більшість об'єктів у реальному світі є симетричними. Людина вже на зорі цивілізації мала уявлення про симетрію, за її законами будувала свої споруди, виготовляла предмети побуту і все це визначалося не тільки практичними вимогами, але в якійсь мірі, і естетичними. Століттями симетрія залишалася темою, яка захоплювала філософів, астрономів, математиків, художників, архітекторів і фізиків. Стародавні греки були одержимі нею, вони вважали що Всесвіт симетричний просто тому, що симетрія прекрасна. Симетрія включає в себе інтеграцію математики та мистецтва, що дозволяє чудово продемонструвати візуальні ефекти. Ми знаходимо симетрію в таких об'єктах, як: наше відображення в дзеркалі, шестикутні бджолині соти, красиві візерунки крил метелика, що є майже ідеальною двосторонньою симетрією. Павутина, що створює майже ідеальні круглі мережі, які мають радіальні опори на майже однаковій відстані, що виходять із середини. Соняшник, який має радіальну симетрію та цікавий тип числової симетрії, відомий як послідовність Фібоначчі(1,2,3,5,8,13,...).

Людину притягує симетрія. Ми вважаємо красивим обличчя, коли риси розташовані симетрично. Нас приваблюють рівні пропорції. Німецький математик Г.Вейль писав "Симетрія — важлива тема, яка має значення в мистецтві та природі. Математика лежить в основі симетрії, і було б дуже важко знайти кращий приклад, на якому можна було б продемонструвати роботу математичного інтелекту"[6]. У пункті 1.2. розглянемо симетрію з точки зору математики.

До 20 століття принципи симетрії відігравали незначну роль у теоретичній фізиці. У фізиці симетрія є ширшим поняттям, ніж відбиваюча форма крил метелика. У фізиці бути симетричним означає бути незмінним після різноманітних перетворень. в 1865 році рівняння Максвелла симетрії електродинаміки не були повністю оцінені протягом понад 40 років. Ця ситуація різко змінилася в 20 столітті, починаючи з Ейнштейна. Він в 1905 році поставив симетрію на перше місце, розглянув принцип симетрії як основну властивість природи, яка обмежує допустимі динамічні закони. Ейнштейн визнав закладену в рівняннях Максвелла симетрію, і підніс її до симетрії простору-часу. Згодом ця

точка зору досягла великого успіху з побудовою загальної теорії відносності Ейнштейна. Пізніше, У 1918 році Еммі Нетер опублікувала теорему, яка пояснювала глибокий зв'язок між симетрією та фізичними законами. Теорема Нетер дозволила фізикам взяти властивість просторової симетрії, і знайти відповідний закон збереження. Теорема Неттер говорить, що для кожної симетрії у фізиці існує відповідний закон збереження. З розвитком квантової механіки в 1920-х роках принципи симетрії почали відігравати ще більш фундаментальну роль. У другій половині 20 століття симетрія була найбільш домінуючою концепцією у дослідженні та формулюванні фундаментальних законів фізики.

Сьогодні майже кожен відомий фізичний закон є симетричним у часі. Ці закони залишаються незмінними, навіть якщо напрямок часу змінюється на протилежний. Однак це суперечить нашому досвіду, оскільки час тече в одному напрямку, а минуле недоступне. Єдиним відомим фізичним законом, який не є симетричним у часі, є другий закон термодинаміки, який стверджує, що ентропія не може зменшуватися з часом. Здається, що час тече в напрямку зростання ентропії. Природа цієї стріли часу є однією з найбільших таємниць сучасної фізики, і її необхідно розгадати, якщо наука хоче досягти своєї кінцевої мети — відкриття "Теорії всього".

1.2. Поняття симетрії у математиці

У математиці симетрія означає, що одна фігура ідентична іншій формі, коли її переміщують, обертають або перевертають. Якщо об'єкт не має симетрії, ми говоримо, що об'єкт асиметричний. Поняття симетрії найчастіше зустрічається в геометрії. Дітей знайомлять із симетрією вже з 2 класу, де їх вчать визначати й описувати властивості двовимірних фігур. У шкільних підручниках симетрія розглядається з точки зору геометрії, хоча, симетрія є всюди і у всьому.

Розглянемо основні типи симетрії, які можна спостерігати в різних випадках:

- 1) *Трансляційна симетрія;*
- 2) *Обертальна симетрія;*
- 3) *Рефлексивна симетрія;*
- 4) *Симетрія ковзання.*

Розглянемо детально кожну із симетрій. Якщо об'єкт переміщується з однієї позиції в іншу з однаковою орієнтацією при русі вперед і назад, це називається трансляційною симетрією. Іншими словами, трансляційна симетрія визначається як ковзання об'єкта навколо осі. У випадку, коли об'єкт обертається в певному напрямку навколо точки, це називається обертальною симетрією, також відомою як радіальна симетрія. Рефлексивна симетрія, є типом симетрії, коли одна половина об'єкта відображає іншу половину об'єкта. Симетрія ковзання – це комбінація трансформацій трансляції та відбиття (рефлексивна симетрія).

Вже більш детально учні розглядають симетрію у 9 класі. Найчастіше досліджують симетрію у просторі R^2 . В даному просторі існують такі види симетрії, як:

- 1) *симетрія відносно x (осьова симетрія) ;*
- 2) *симетрія відносно y (осьова симетрія);*
- 3) *симетрія відносно початку координат (центральна симетрія);*
- 4) *симетрія відносно прямої $y=x$.*

Симетрія є однією з основ математики. Це також одна з точок, де математика перетинається з мистецтвом та архітектурою. Зазвичай ми думаємо про симетрію як про те, що ми можемо бачити, щось, що асоціюється з візерунками та формами. Але більш загальна концепція симетрії — незмінність. Інші об'єкти також можуть бути симетричними, включаючи математичні вирази. Надалі будемо розглядати симетрію відносно алгебри.

Висновки до розділу 1

У першому розділі було розглянуто поняття симетрії, прояви якої зустрічаються у багатьох сферах науки, а саме: у природі, у фізичних явищах, у математиці тощо. Було виокремлено основні типи симетрії, такі як: трансляційна, обертальна, рефлексивна та симетрія ковзання. А також було розглянуто такі види симетрії, як: осьова (симетрія відносно прямої), центральна (симетрія відносно точки) та дзеркальна (симетрія відносно площини).

Симетрія є важливим та універсальним явищем. Головною її ознакою є незмінність. Вона описує властивість об'єктів бути взаємно відображеними або еквівалентними в певний спосіб. Розуміння симетрії сприяє розвитку наукових теорій, художніх творінь та розкриттю законів природи, підкреслюючи її всеосяжну роль у різних галузях знань.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

2.1. Означення симетричних многочленів

Розглянемо многочлени від двох змінних $f(x, y) = x + y$ та $g(x, y) = xy$ де x, y - одночлени

Будемо називати такі многочлени симетричними, оскільки

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.1. Многочлен від двох змінних називається симетричним, якщо він є інваріантним відносно перестановок змінних

$$f(x, y) = f(y, x)$$

$$g(x, y) = g(y, x)$$

Приклад 2.1

$$f(x, y) = 2x^4 + 7x^2y + 2xy + 7y^2x + 2y^4 - 10$$

Перевіримо, чи даний многочлен є симетричним. Замінімо x на y , а y на x . Отримаємо

$$f(x, y) = 2x^4 + 7x^2y + 2xy + 7y^2x + 2y^4 - 10 = 2y^4 + 7y^2x + 2yx + 7x^2y + 2x^4 - 10 = f(y, x)$$

Многочлен симетричний, бо він не змінився відносно перестановок змінних

Приклад 2.2

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2, \\ xy = 2(x + y) \end{cases}$$

Перевіримо, чи дана система є симетричною. Замінімо x на y , а y на x . Отримаємо

$$\begin{cases} y^4 + x^4 = 17(y + x)^2, \\ yx = 2(y + x) \end{cases}$$

Система є симетричною відносно перестановок змінних x та y

Приклад 2.3

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$

Перевіримо, чи даний многочлен є симетричним. Замінімо x на y , а y на x . Отримаємо

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \neq y^2 + 2yx - x^2 = f(y, x)$$

$$f(x, y) \neq f(y, x)$$

Многочлен не є симетричним, оскільки не є інваріантним відносно перестановок змінних x та y

Надалі будемо розглядати тільки симетричні многочлени

Для зручності, введемо позначення:

$$f(x, y) = x + y = \sigma_1$$

$$g(x, y) = xy = \sigma_2$$

Будемо називати σ_1, σ_2 елементарними симетричними многочленами

Отже, будь-який симетричний многочлен $f(x, y)$ від двох змінних можна представити через елементарні симетричні многочлени σ_1, σ_2

Означення 2.2. Будь-який симетричний многочлен від трьох змінних x, y, z можна представити через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\sigma_1 = x + y + z$$

$$\sigma_2 = xy + xz + yz$$

$$\sigma_3 = xyz$$

Означення 2.3. Будь-який симетричний многочлен від n змінних $x_1, \dots, x_n$, можна єдиним способом представити через елементарні симетричні многочлени

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{i < j} x_i x_j$$

.....

$$\sigma_n = x_1x_2x_3 \dots x_n$$

Приклад 2.4

Виразити симетричний многочлен $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ через елементарні симетричні многочлени

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = \sigma_1^2$$

Приклад 2.5

Виразити симетричний многочлен $f(x, y) = x^2 + y^2$ через елементарні симетричні многочлени

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Книга Болтянского В.Г. та Віленкіна Н.Я. "Симметрия в алгебре" найбільш повно висвітлює застосування теорії симетричних многочленів до розв'язання задач шкільної алгебри

2.2. Вираження симетричних многочленів через елементарні симетричні многочлени

Розглянемо елементарні симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ від n змінних, де

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_ix_j \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= x_1x_2x_3x_4x_5\dots x_n\end{aligned}$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.4. Будь-який многочлен від n змінних $x_1, \dots, x_n$, який є інваріантним відносно перестановок змінних $x_1, \dots, x_n$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$f(x_1, \dots, x_n) = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 \dots + k\sigma_n$$

де $a, b, c, \dots, k$ - деякі числа

Приклад 2.6

$$f(x, y) = x^3 + y^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

Приклад 2.7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 - xy = 7 \end{cases}$$

Оскільки, дана система є інваріантною відносно перестановок змінних, то можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1, σ_2

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^2 - 3\sigma_2 = 7 \end{cases}$$

Розв'язуємо дану систему методом підстановки. Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи. Отримаємо

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ 25 - 3\sigma_2 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

У першому рівнянні системи, виражаємо x через y , та підставляємо у друге рівняння.
Одержуємо

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ (5 - y)y = 6. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи. Маємо

$$\begin{aligned} 5y - y^2 &= 6 \\ y^2 - 5y + 6 &= 0 \end{aligned}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені: $y_1 = 2, y_2 = 3$

Тоді

$$x_1 = 3, x_2 = 2$$

Оскільки, система є симетричною, то і корені даної системи будуть симетричними
Відповідь: $(3;2);(2;3)$.

2.3. Вираження симетричних многочленів через степеневі суми

У прикладах 2.3. - 2.5., ми розглядали симетричні многочлени другого та третього порядку, і для вираження їх через елементарні симетричні многочлени було використано формули скороченого множення.

Розглянемо симетричний многочлен $f(x, y) = x + y$, n -го порядку
Введемо позначення: $f(x, y) = x + y = s_1$. Тоді

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = s_2$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 = s_3$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 = s_4$$

.....

$$f(x, y) = x^n + y^n = s_n$$

Будемо $s_1, s_2, \dots, s_n$ називати степеневими сумами

Означення 2.5. Будь-який симетричний многочлен від n змінних можна представити через степеневі суми $s_1, s_2, \dots, s_k$

Приклад 2.8.

$$f(x, y) = x^5 + y^5 = s_5$$

Приклад 2.9.

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = (x + y)^4 = s_1^4$$

Означення 2.6. Будь-який многочлен від n змінних $x_1, \dots, x_n$, який є інваріантним відносно перестановок змінних $x_1, \dots, x_n$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$f(x_1, \dots, x_n) = as_1 + bs_2 + cs_3 \dots + ks_k$$

де $a, b, c, \dots, k$ - деякі числа

Приклад 2.10.

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x + y)^2 = 2s_1^2 = 2\sigma_1^2$$

Бачимо, що $s_1 = \sigma_1$. Отже, степеневу суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени

Розглянемо степеневу суму $s_2 = x^2 + y^2$
Виражаємо її через елементарні симетричні многочлени. Маємо

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Отже, степеневу суму s_2 можна виразити через елементарні симетричні многочлени

Спробуємо виразити s_3 через σ_1, σ_2 . Отримаємо

$$s_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

Можна б було зробити висновок, що будь-яку степеневу суму можна виразити через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Розглянемо степеневу суму $k - 1$ степеня від двох змінних

$$s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$$

Ліву та праву частину помножимо на σ_1 . Отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} &= \sigma_1(x^{k-1} + y^{k-1}) = (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k \\ &= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 s_{k-1} = s_k + \sigma_2 s_{k-2}$$

З даної рівності знаходимо, що

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.7. Будь-яку степеневу суму, можна виразити через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} \quad (2.1)$$

Скористаємося формулою 2.1, та виразимо степеневі суми через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ([5], стор.(10 - 12))

$$s_1 = x + y = \sigma_1$$

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$s_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$s_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$s_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$s_6 = x^6 + y^6 = \sigma_1(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$

$$\begin{aligned}s_7 &= x^7 + y^7 = \sigma_1(\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3) - \sigma_2(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = \\ &= \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3\end{aligned}$$

.....
Для того щоб знайти степеневу суму k -го порядку потрібно знайти всі попередні степеневі суми

Розглянемо многочлен $f(x, y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = s_4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = (x + y)^4$

Виражаємо з даної рівності s_4

$$\begin{aligned}s_4 &= (x + y)^4 - (4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) = (x + y)^4 - 4xy(x^2 + y^2) - 6(xy)^2 = \\ &= (x + y)^4 - 4xy((x + y)^2 - 2xy) - 6(xy)^2 = (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 8(xy)^2 - \\ &\quad - 6(xy)^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2\end{aligned}$$

Будь-який многочлен виду $f(x, y) = (a + b)^k$ можна представити через елементарні симетричні многочлени σ_1, σ_2 , для цього потрібно використати Біноміальну формулу Ньютона ([5], стор.(22-25))

$$(a + b)^n = c_0 a^n b^0 + c_1 a^{n-1} b^1 + c_2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_{n-1} a^1 b^{n-1} + c_n a^0 b^n$$

а для знаходження біноміальних коефіцієнтів $c_1, \dots, c_n$ потрібно використати трикутник Паскаля

2.4. Симетричні многочлени від кількох змінних

Розглянемо рівняння виду $t^2 + pt + q = 0$.

Дане рівняння можна розв'язати використавши теорему Вієта. Нехай x, y — корені квадратного рівняння. Тоді

$$\begin{cases} x + y = -p \\ xy = q \end{cases}$$

Оскільки x, y — корені, то

$$t^2 + pt + q = (t - x)(t - y) = t^2 - ty - tx + xy = t^2 - t(x + y) + xy = t^2 - t\sigma_1 + \sigma_2$$

Теорема 2.1. Корені рівняння $t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n = 0$ можна виразити через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

Доведення. Для квадратного рівняння $t^2 + pt + q = 0$, коренями якого є x та y , виконується

$$t^2 + pt + q = (t - x)(t - y) = t^2 - ty - tx + xy = t^2 - t(x + y) + xy = t^2 - t\sigma_1 + \sigma_2$$

Перевіримо, чи буде виконуватися для рівняння виду $t^3 + pt^2 + qt + k = 0$

Нехай x, y, z — корені даного рівняння. Тоді

$$\begin{cases} x + y + z = -p \\ xy + yz + xz = q \\ xyz = -k \end{cases}$$

Бачимо, що корені даного рівняння можна виразити через елементарні симетричні многочлени

$$\begin{aligned} t^3 + pt^2 + qt + k &= (t - x)(t - y)(t - z) = (t^2 - tx - ty + xy)(t - z) = t^3 - t^2z - t^2x + txz - t^2y + \\ &+ tyz + txy - xyz = t^3 - t^2(x + y + z) + t(xy + xz + yz) - xyz = t^3 - \sigma_1t^2 + \sigma_2t - \sigma_3 \end{aligned}$$

І навпаки, якщо

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z \\ \sigma_2 = xy + xz + yz \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} t^3 + pt^2 + qt + k &= t^3 - \sigma_1t^2 + \sigma_2t - \sigma_3 = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + xz)t - xyz = t^3 - \\ t^2x - t^2y - t^2z + txy + tyz + txz - xyz &= (t^2 - t(x + y) + xy)(t - z) = (t - x)(t - y)(t - z) \end{aligned}$$

Можемо зробити висновок, що теорема 2.1 буде виконуватися і для многочлена n -го степеня.

Нехай $k_1, \dots, k_n$ — корені рівняння: $t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n = 0$. Тоді

$$t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n = (t - k_1)(t - k_2)\dots(t - k_n) =$$

$$= t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n = k_i^n - \sigma_1 k_i^{n-1} + \sigma_2 k_i^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

де k_i – корені даного рівняння, $i = 1, \dots, n$.

$$\sum k_i = s_n(t_1, \dots, t_n) - s_{n-1}(t_1, \dots, t_n) \sigma_1 + s_{n-2}(t_1, \dots, t_n) \sigma_2 - s_{n-3}(t_1, \dots, t_n) \sigma_3 + \dots + (-1)^n \sigma_n \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) називають формулою Ньютона – зв'язку симетричних многочленів з степеневими сумами. Отже, корені будь-якого многочлена, в якого старший член рівний одиниці можна виразити через $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

Франсуа Вієт створив символічну алгебру, він зробив великий внесок з питань теорії рівнянь 1-4 степенів. Він довів теорему, яка встановлює взаємозв'язок між коефіцієнтами многочлена і його коренями. Дуже часто дана теорема використовується у теорії симетричних многочленів. На сьогоднішній день теорема Вієта є необхідною і важливою частиною шкільної програми

Приклад 2.11 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

Оскільки, степеневу суму можна представити через елементарні симетричні многочлени, то перепишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему та знаходимо $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = -1, \\ \sigma_3 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + xz + yz = -1, \\ xyz = -2. \end{cases}$$

За теоремою 2.1. складаємо рівняння: $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = t^2(t - 2) + (t - 2) = (t^2 - 1)(t - 2) = (t - 1)(t + 1)(t - 2)$$

Знаходимо розв'язки отриманого рівняння

$$\begin{cases} t_1 = 2, \\ t_2 = -1, \\ t_3 = 1. \end{cases}$$

Оскільки система є симетричною, то і розв'язки також будуть симетричними. Дана система буде має шість розв'язків.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1, \\ z_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1, \\ z_3 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 2, \\ y_4 = 1, \\ z_4 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -1, \\ y_5 = 2, \\ z_5 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -1, \\ y_6 = 1, \\ z_6 = 2. \end{cases}$$

Теорема 2.2. Будь-який симетричний многочлен від двох змінних, можна представити через елементарні симетричні многочлени σ_1, σ_2 .

Доведення. Нехай $f(x, y)$ складається з одночлена axy
Можливі випадки:

1. Показники степенів однакові
2. Показники степенів різні

Розглянемо перший випадок, коли показники степенів однакові

$$f(x, y) = ax^k y^k$$

Використавши властивості степенів, отримаємо: $x^k y^k = (xy)^k$. Тому

$$f(x, y) = a(xy)^k = a\sigma_2^k$$

Розглянемо тепер випадок, коли показники степенів різні

$$f(x, y) = x^m y^n$$

Бачимо, що при заміні змінних x на y , а y на x многочлен не буде симетричним. Тому, потрібно до нього додати одночлен $ax^n y^m$

$$f(x, y) = ax^m y^n + ax^n y^m = a(x^m y^n + x^n y^m)$$

Якщо $m < n$, то

$$f(x, y) = a(x^m y^m (x^{n-m} + y^{n-m})) = a((xy)^m s_{n-m}) = a\sigma_2^m s_{n-m}$$

Якщо n і m малі числа, то ми можемо використати формулу 2.1., та представити степеневу суму через елементарні симетричні многочлени. Якщо n або $m \geq 10$ дана формула не буде ефективною. Візьмемо для прикладу $n = 2026$, а $m = 3$. Тоді

$$f(x, y) = a\sigma_2^3 s_{2023}$$

Для того, щоб знайти степеневу суму 2023 порядку, потрібно знайти всі попередні 2022 степеневих сум, а це практично неможливо. Для знаходження таких степеневих сум, у

1779 році англійський математик Едуард Варінг винайшов формулу, яка дає можливість зразу знаходити степеневу суму k -го порядку ([5], стор.(15 - 17))

$$s_k = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \frac{(-1)^i (k-i-1)!}{i! (k-2i)!} k \sigma_1^{k-2i} \sigma_2^i \quad (2.3)$$

Знайдемо степеневу суму s_2 використавши формулу 2.3.

$$s_2 = \frac{(-1)^0 (2-1)!}{0!2!} 2 \sigma_1^2 \sigma_2^0 + \frac{(-1)^1 (2-2)!}{1!(2-2)!} 2 \sigma_1^{2-2} \sigma_2^1 = \sigma_1^2 - 2 \sigma_2$$

Знайдемо тепер s_3

$$s_3 = \frac{(-1)^0 (3-1)!}{0!3!} 3 \sigma_1^3 \sigma_2^0 + \frac{(-1)^1 (3-2)!}{1!(3-2)!} 3 \sigma_1^{3-2} \sigma_2^1 = \sigma_1^3 - 3 \sigma_1 \sigma_2$$

Знайдемо ще одну степеневу суму s_6

$$s_6 = \frac{(-1)^0 (6-1)!}{0!6!} 6 \sigma_1^6 \sigma_2^0 + \frac{(-1)^1 (6-2)!}{1!(6-2)!} 6 \sigma_1^{6-2} \sigma_2^1 + \frac{(-1)^2 (6-3)!}{2!(6-4)!} 6 \sigma_1^{6-4} \sigma_2^2 + \\ + \frac{(-1)^3 (6-4)!}{3!0!} 6 \sigma_1^0 \sigma_2^3 = \sigma_1^6 - 6 \sigma_1^4 \sigma_2 + 9 \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2 \sigma_2^3$$

Можемо зробити висновок, що дана формула буде виконуватися для степеневі суми k -го порядку.

Теорема 2.3. Будь-який многочлен, який є інваріантним відносно перестановок змінних x, y, z можна виразити через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, де

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z, \\ \sigma_2 = xy + xz + yz, \\ \sigma_3 = xyz. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо многочлен $f(x, y, z) = axyz$, де $axyz$ —одночлен. Як і в теоремі 2.2, можливі два випадки

1. Коли показники степенів однакові
2. Показники степенів різні

У першому випадку, коли показники степенів однакові, будемо мати

$$f(x, y, z) = ax^k y^k z^k = a(xyz)^k = a \sigma_3^k$$

Розглянемо тепер випадок, коли показники степенів різні

$$f(x, y, z) = x^k y^n z^m$$

Зрозуміло, що при перестановці змінних многочлен не буде симетричним. Тому, потрібно до нього додати одночлени: $x^k y^m z^n$, $x^n y^k z^m$, $x^n y^m z^k$, $x^m y^n z^k$, $x^m y^k z^n$

Многочлен, який буде складатися з такого одночлена, називатимемо орбітою даного одночлена, і будемо позначати: $O(x^k y^n z^m)$.

$$O(x^k y^n z^m) = x^k y^n z^m + x^k y^m z^n + x^n y^k z^m + x^n y^m z^k + x^m y^n z^k + x^m y^k z^n$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.8. Орбіту будь-якого многочлена від n змінних можна виразити через степеневі суми $s_1, s_2, \dots, s_k$

Розглянемо одночлен $x^k y^n z^m$. Можливі випадки:

1. $x^k y^n z^m$

2. $x^k y^n z^0$

3. $x^k y^k z^0$

4. $x^k y^0 z^0$

У 4 випадку, орбіта одночлена $x^k y^0 z^0$ матиме вигляд

$$O(x^k y^0 z^0) = x^k y^0 z^0 + x^0 y^k z^0 + x^0 y^0 z^k = x^k + y^k + z^k = O(x^k) = s_k$$

У 2 випадку, орбіта одночлена $x^k y^n z^0$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} O(x^k y^n) &= O(x^k)O(y^n) - O(x^{k+n}) = (x^k + y^k + z^k)(x^n + y^n + z^n) - (x^{k+n} + y^{k+n} + z^{k+n}) = \\ &= x^{k+n} + y^{k+n} + z^{k+n} + x^k y^n + x^k z^n + y^k x^n + y^k z^n + z^k x^n + z^k y^n - (x^{k+n} + y^{k+n} + z^{k+n}) = \\ &= x^k y^n + x^k z^n + y^k x^n + y^k z^n + z^k x^n + z^k y^n = O(x^k y^n) = s_k s_n - s_{k+n} \end{aligned}$$

У третьому випадку, орбіта одночлена $x^k y^k z^0$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} O(x^k y^k) &= \frac{1}{2}((O(x^k))^2 - O(x^{2k})) = \frac{1}{2}(x^k + y^k + z^k)^2 - (x^{2k} + y^{2k} + z^{2k}) = \frac{1}{2}(x^{2k} + y^{2k} + z^{2k} + \\ &+ 2x^k y^k + 2x^k z^k + 2y^k z^k - (x^{2k} + y^{2k} + z^{2k})) = \frac{1}{2}(2(x^k y^k + x^k z^k + y^k z^k)) = O(x^k y^k) = \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k}) \end{aligned}$$

У першому випадку, орбіта одночлена $x^k y^n z^m$ матиме вигляд

$$O(x^k y^m z^n) = (xyz)^n O(x^{k-n} y^m z^0) = \sigma_3^n O(x^{k-n} y^m z^0)$$

Враховуючи випадок 2, будь-яку орбіту вигляду $O(x^k y^n)$ можна виразити через степеневу суму. Тому ([5], стор.(48 - 50))

$$O(x^k y^m z^n) = \sigma_3(s_k s_n - s_{k+n}) \quad (2.4)$$

ОЗНАЧЕННЯ 2.9. Орбіту будь-якого многочлена від n змінних можна виразити через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$

Приклад 2.11

$$\begin{aligned} O(x^4 y^2 z) &= (xyz)O(x^3 y) = \sigma_3(O(x^3)O(x) - O(x^4)) = \sigma_3(s_3 s_1 - s_4) = \sigma_3((\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + \\ &+ 3\sigma_3)\sigma_1 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1 \sigma_3)) = \sigma_3(\sigma_1^2 \sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_3 \sigma_1) = \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_2^2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3^2 \end{aligned}$$

Висновки до розділу 2

У даному розділі було розглянуто найпростіші симетричні многочлени, які розглядаються у шкільному курсі математики. Введено поняття про елементарні симетричні многочлени, степеневі суми. Вираження степеневих сум через елементарні симетричні многочлени. Представлення будь-якого многочлена, який є інваріантним відносно перестановок змінних через елементарні симетричні многочлени. Доведено основні теореми теорії симетричних многочленів від двох та трьох змінних. Для доведення теореми 2.3. введено поняття орбіти одночлена. Враховуючи складність застосування формули 2.1. для степеневих сум порядку ≥ 6 , виведено формулу, яка дає змогу зразу знаходити степеневу суму s_k -го порядку без шукання попередніх s_{k-1} степеневих сум. Встановлено взаємозв'язок формул Ньютона та Вієта з елементарними симетричними многочленами, а також, вираження коренів рівняння n -го степеня, у якого старший коефіцієнт рівний одиниці через елементарні симетричні многочлени.

РОЗДІЛ 3

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ СИМЕТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

3.1. Розв'язування рівнянь за допомогою симетричних многочленів

Приклад 3.1 Розв'язати рівняння ([5], стор.(26))

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$$

Зробимо заміну: $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = v$. Тоді

$$u + v = 2$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_3

$$u^3 + v^3 = (\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}})^3 + (\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}})^3 = 2$$

Отримаємо

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u^3 + v^3 = 2. \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних x та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = u + v, \quad \sigma_2 = uv$$

У другому рівнянні системи маємо степеневу суму s_3 . За означенням 2.7., будь-яку степеневу суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи, будемо мати

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ 8 - 6\sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, то

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ uv = 1; \end{cases}$$

Виражаємо u через v у першому рівнянні системи та підставляємо в друге, отримаємо

$$\begin{cases} u = 2 - v, \\ (2 - v)v = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 - v, \\ (v^2 - 2v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 - v, \\ (v - 1)^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1, \\ v = 1. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = v$

$$\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 1$$

$$1 - \sqrt{x} = 1$$

$$x = 0$$

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 3.2 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1$$

Зробимо заміну: $\sqrt[3]{10 - x} = u$, $-\sqrt[3]{3 - x} = v$. Тоді

$$u + v = 1$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_3

$$u^3 + v^3 = 10 - x - (3 - x) = 7$$

Отримаємо

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^3 = 7. \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних x та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = u + v, \quad \sigma_2 = uv$$

У другому рівнянні системи маємо степеневу суму s_3 . За означенням 2.7. та формулою 2.1., можемо систему подати у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 7. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1 - 3\sigma_2 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = -2. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, то

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ uv = -2; \end{cases}$$

Виражаємо u через v у першому рівнянні системи та підставляємо в друге, отримаємо

$$\begin{cases} u = 1 - v, \\ (1 - v)v = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ (v^2 - v - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ v_1 = 2, v_2 = -1. \end{cases}$$

Оскільки система симетрична, то і розв'язки також будуть симетричними

$$\begin{cases} u_1 = -1, \\ v_1 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = -1. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $\sqrt[3]{10 - x} = u$,

$$\sqrt[3]{10 - x} = -1$$

$$10 - x = -1, \quad x_1 = 11.$$

У випадку, коли $u = 2$, матимемо

$$\sqrt[3]{10 - x} = 2$$

$$10 - \sqrt{x} = 8, \quad x_2 = 2.$$

Відповідь: $x = 2, x = 11$.

Приклад 3.3 Розв'язати рівняння

$$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$$

Зробимо заміну: $\sqrt{17 - x^2} = y$, $y \geq 0$. Тоді

$$x + y + xy = 9$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_2

$$x^2 + y^2 = x^2 + (\sqrt{17 - x^2})^2$$

Отримаємо

$$\begin{cases} x + y + xy = 9, \\ x^2 + y^2 = x^2 + (\sqrt{17 - x^2})^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + xy = 9, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних x та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$$

У другому рівнянні системи маємо степеневу суму s_2 . За означенням 2.7., будь-яку степеневу суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 9, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 = 9 - \sigma_1, \\ \sigma_1^2 - 2(9 - \sigma_1) = 17; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 = 9 - \sigma_1, \\ \sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 35 = 0. \end{cases}$$

Використавши теорему Вієта, знаходимо розв'язки другого рівняння системи:

$$\sigma_1 = 5, \sigma_1 = -7$$

Підставимо знайдені значення у перше рівняння системи. Будемо мати дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -7, \\ \sigma_2 = 16; \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 16. \end{cases}$$

Перша система має розв'язки

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки другої системи рівнянь. У першому рівнянні системи виражаємо x через y , та підставляємо у друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} x = -7 - y, \\ y(-7 - y) = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7 - y, \\ y^2 + 7y + 16 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи

$$y^2 + 7y + 16 = 0$$

$$D = 49 - 64 = -15 < 0$$

$D < 0$, то $y_{3,4} = \frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{2}$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{-7 - i\sqrt{15}}{2}, \\ y_3 = \frac{-7 + i\sqrt{15}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{-7 + i\sqrt{15}}{2}, \\ y_4 = \frac{-7 - i\sqrt{15}}{2}. \end{cases}$$

Надалі, при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, у випадку, коли $D < 0$ розглядати не будемо, тому що корені будуть комплексними.

Відповідь: $x_1 = 1; x_2 = 4$.

Приклад 3.4 Розв'язати рівняння ([5], стор.(26))

$$x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$$

Зробимо заміну: $\sqrt[3]{35-x^3}=y$. Тоді

$$xy(x+y)=30$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_3 .

$$x^3+y^3=x^3+(35-x^3)$$

Отримаємо

$$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=x^3+(35-x^3); \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних x та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$$

У другому рівнянні системи маємо степеневу суму s_3 . За означенням 2.7., будь-яку степеневу суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$$

Матимемо систему

$$\begin{cases} \sigma_1\sigma_2=30 \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=35 \end{cases}$$

З даної системи знаходимо значення σ_1, σ_2

$$\begin{cases} \sigma_2 = \frac{30}{\sigma_1}, \\ \sigma_1^3 - 3 \cdot 30 = 35; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 = \frac{30}{\sigma_1}, \\ \sigma_1^3 = 125; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6; \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = 3$.

Приклад 3.5 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$$

Зробимо заміну:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = u, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = v$$

Тоді

$$u + v = 1$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_5 .

$$u^5 + v^5 = \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} - x$$

Отримаємо

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^5 + v^5 = 1 \end{cases}$$

За означенням 2.7. та формулою 2.1., система матиме вигляд

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 1; \end{cases}$$

Підставляємо значення σ_1 у друге рівняння системи, матимемо

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1^5 - 5 \cdot 1^3\sigma_2 + 5 \cdot 1\sigma_2^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 5\sigma_2^2 - 5\sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 5\sigma_2(\sigma_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Добуток рівний нулю, тоді і тільки тоді, коли один із множників дорівнює нулю. Отже

$$5\sigma_2 = 0, \quad \sigma_2 - 1 = 0$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_2 = 1$$

Маємо дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

Розглянемо першу систему. Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ uv = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ (1 - v)v = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ v^2 - v = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ v = 0, \quad v = 1. \end{cases}$$

Отримуємо розв'язок першої системи

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 0, \\ v_2 = 1; \end{cases}$$

Тепер розглянемо систему

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ uv = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ (1 - v)v = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1 - v, \\ v^2 - v + 1 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо корені квадратного рівняння: $v^2 - v + 1 = 0$

$$D = 1 - 4 = -3 < 0$$

Рівняння буде мати комплексні корені, а отже і система рівнянь також буде мати комплексні корені, а для ірраціональних рівнянь беруться ті значення невідомих, які належать множині дійсних чисел.

Повернемося до заміни: $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = u$

1 випадок, коли $u = 1$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = 1$$

$$\frac{1}{2} + x = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

2 випадок, коли $u = 0$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = 0$$

$$\frac{1}{2} + x = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Приклад 3.6 Розв'язати рівняння

$$\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 2$$

Зробимо заміну:

$$\sqrt[4]{41 + x} = u, \quad \sqrt[4]{41 - x} = v, \quad u; v \geq 0$$

Тоді

$$u + v = 2$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_4 .

$$u^4 + v^4 = 41 + x + 41 - x$$

Отримаємо

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u^4 + v^4 = 82 \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних x та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$$

За означенням 2.7., виразимо степеневу суму через елементарні симетричні многочлени, для цього використаємо формулу 2.1., матимемо

$$s_4 = u^4 + v^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82; \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ 16 - 16\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 82. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи. За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $\sigma_2^2 - 8\sigma_2 - 33 = 0$

$$\sigma_2 = 11, \sigma_2 = -3$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ uv = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 2, \\ uv = -3. \end{cases}$$

Розглянемо другу систему. У першому рівнянні системи виражаємо u через v , та підставляємо у друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} u = 2 - v, \\ (2 - v)v = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 - v, \\ v^2 - 2v - 3 = 0. \end{cases}$$

Корені квадратного рівняння: $v^2 - 2v - 3 = 0$

$$v_1 = 3, v_2 = -1$$

Оскільки система симетрична, то і розв'язки також симетричні

$$\begin{cases} v_1 = 3, \\ u_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = -1, \\ u_2 = 3. \end{cases}$$

Знайдені значення не задовольняють рівняння, оскільки $u, v \geq 0$

Розглянемо тепер систему

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ uv = 11; \end{cases}$$

У першому рівнянні системи виражаємо u через v , та підставляємо у друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} u = 2 - v, \\ (2 - v)v = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 - v, \\ v^2 - 2v + 11 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо корені квадратного рівняння: $v^2 - 2v + 11 = 0$

$$D = 4 - 44 = -40 < 0$$

Рівняння буде мати комплексні корені, а отже і система рівнянь також буде мати комплексні корені.

Відповідь: $\emptyset$

Приклад 3.7 Розв'язати рівняння ([4], стор.(26))

$$\sqrt[4]{78 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}}} - \sqrt[4]{84 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}} = 0$$

Виконаємо деякі тотожні перетворення

$$\sqrt[4]{78 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}}} = \sqrt[4]{84 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}}$$

$$78 + \sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} = 84 - \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}}$$

$$\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{30 - \sqrt{x}} = 6$$

Зробимо заміну:

$\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{30 - \sqrt{x}} = v$. Тоді

$$u + v = 6$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_3 .

$$u^3 + v^3 = 24 + \sqrt{x} + 30 - \sqrt{x} = 54$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^3 = 54 \end{cases}$$

За означенням 2.7., система матиме вигляд

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 54 \end{cases}$$

З даної системи знаходимо значення σ_1, σ_2 . Підставляємо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6, \\ 6^3 - 18\sigma_2 = 54; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 6, \\ -18\sigma_2 = -162; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 6, \\ \sigma_2 = 9. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = 9. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язки системи: $u = v = 3$

Повернемося до заміни: $\sqrt[3]{24 + \sqrt{x}} = u$

$$24 + \sqrt{x} = 27;$$

$$\sqrt{x} = 3;$$

$$x = 9.$$

Відповідь: $x = 9$.

Приклад 3.8 Розв'язати рівняння

$$z^4 + (1 - z)^4 = 1$$

Зробимо заміну: $y = 1 - z$. Тоді

$$y + z = 1$$

Введемо допоміжне рівняння, щоб отримати степеневу суму s_4

$$z^4 + y^4 = 1$$

Отримаємо

$$\begin{cases} y + z = 1, \\ z^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Дана система є симетричною відносно перестановок змінних z та y , і можемо її представити через елементарні симетричні многочлени σ_1 і σ_2 , де

$$\sigma_1 = z + y, \quad \sigma_2 = zy$$

За означенням 2.7., будь-яку степеневу суму можна виразити через елементарні симетричні многочлени

$$s_4 = z^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1 - 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 2\sigma_2(\sigma_2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Добуток рівний нулю, коли один із множників дорівнює нулю, тому

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0, \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Будемо мати дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = z + y$, $\sigma_2 = zy$, то

$$\begin{cases} z + y = 1, \\ zy = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} z + y = 1, \\ zy = 2. \end{cases}$$

Перша система має розв'язки

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ z_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 0, \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки другої системи рівнянь. У першому рівнянні системи виражаємо y через z , та підставляємо у друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} y = 1 - z, \\ (1 - z)z = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - z, \\ z^2 - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо корені квадратного рівняння: $z^2 - z + 2 = 0$

$$z^2 - z + 2 = 0$$

$$D = 1 - 8 = -7 < 0$$

Оскільки, $D < 0$, то $z_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

3.2. Розв'язування систем рівнянь за допомогою симетричних многочленів

Приклад 3.9 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Зробимо заміну: $\sqrt{x} = u$, $-\sqrt{y} = v$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u + v = -2uv, \\ u^2 + v^2 = 20. \end{cases}$$

Система є інваріантною відносно перестановок змінних, можемо симетричні многочлени представити через елементарні симетричні многочлени. Матимемо

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\sigma_2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 20. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\sigma_2, \\ 4\sigma_2^2 - 2\sigma_2 = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -2\sigma_2, \\ 2\sigma_2^2 - \sigma_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи: $2\sigma_2^2 - \sigma_2 = 10$

$$\begin{aligned} D &= 1 + 80 = 81 \\ \sigma_2 &= \frac{5}{2}, \sigma_2 = -2 \end{aligned}$$

Маємо дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -5, \\ \sigma_2 = \frac{5}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = -2. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, то

$$\begin{cases} u + v = -5, \\ uv = \frac{5}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = -2. \end{cases}$$

Розглянемо тільки другу систему рівнянь, тому що нас задовольняє випадок $\sigma_2 < 0$.

У першому рівнянні системи виражаємо u через v , та підставляємо у друге рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} u = 4 - v, \\ (4 - v)v = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 - v, \\ v^2 - 4v - 2 = 0. \end{cases}$$

Корені квадратного рівняння: $v^2 - 4v - 2 = 0$

$$\begin{aligned} D &= 16 + 8 = 24 \\ v_1 &= \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6}$$

Оскільки система симетрична, то і розв'язки також симетричні

Повернемося до заміни: $-\sqrt{y} = v$

$$-\sqrt{y} = 2 + \sqrt{6}, \quad y_1 = 10 + 4\sqrt{6}$$

$$-\sqrt{y} = 2 - \sqrt{6}, \quad y_2 = 10 - 4\sqrt{6}$$

Відповідь: $(10 - 4\sqrt{6}; 10 + 4\sqrt{6}), (10 + 4\sqrt{6}; 10 - 4\sqrt{6})$

Приклад 3.10 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \\ x - y = \frac{1}{4}xy \end{cases}$$

Зробимо заміну: $t = -y$

$$\begin{cases} x^2 + t^2 = -\frac{5}{2}xt, \\ x + t = -\frac{1}{4}xt; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+t)^2 - 2xt + \frac{5}{2}xt = 0, \\ x + t = -\frac{1}{4}xt. \end{cases}$$

Система є інваріантною відносно перестановок змінних, можемо симетричні многочлени представити через елементарні симетричні многочлени. Матимемо

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -\frac{5}{2}\sigma_2, \\ \sigma_1 = -\frac{1}{4}\sigma_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2 = 0, \\ \sigma_1 = -\frac{1}{4}\sigma_2. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у перше рівняння системи. Тоді

$$\begin{cases} \frac{1}{16}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_2 = 0, \\ \sigma_1 = -\frac{1}{4}\sigma_2. \end{cases}$$

У першому рівнянні системи виносимо спільний множник за дужки

$$\frac{1}{2}\sigma_2\left(\frac{1}{8}\sigma_2 + 1\right) = 0$$

Добуток дорівнює нулю тоді, коли один із множників рівний нулю. Отже

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_2 = -8$$

Матимемо дві системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0, \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 2, \\ \sigma_2 = -8. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + t$, $\sigma_2 = xt$, то

$$\begin{cases} x + t = 0, \\ xt = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + t = 2, \\ xt = -8. \end{cases}$$

Перша система має розв'язки

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$$

Друга система має розв'язки

$$\begin{cases} x_3 = 4, \\ t_3 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ t_4 = 4. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $t = -y$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ y_1 = y_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 4, \\ y_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -4. \end{cases}$$

Відповідь: $(0;0)$, $(4;2)$, $(-2;-4)$

Приклад 3.11 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Робимо заміну: $-y = z$, отримаємо

$$\begin{cases} x^5 + z^5 = 3093 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Система є інваріантною відносно перестановок змінних, за означенням 2.7. та формулою 2.1., подамо степеневу суму s_5 через елементарні симетричні многочлени

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 3093, \\ \sigma_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ 243 - 45\sigma_2 + 15\sigma_2^2 = 3093. \end{cases}$$

Знайдемо корені другого рівняння системи

$$15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 - 2850 = 0$$

$$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 - 190 = 0$$

корені рівняння: $\sigma_2 = -10$, $\sigma_2 = 19$

Маємо дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 19. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + z$, $\sigma_2 = xz$, то

$$\begin{cases} x + z = 3, \\ xz = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = 3, \\ xz = 19. \end{cases}$$

Перша система має розв'язки

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ z_1 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ z_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язки другої системи

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3+i\sqrt{67}}{2}, \\ z_3 = \frac{3-i\sqrt{67}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{3-i\sqrt{67}}{2}, \\ z_4 = \frac{3+i\sqrt{67}}{2}. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $-y = z$, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3+i\sqrt{67}}{2}, \\ y_3 = \frac{-3+i\sqrt{67}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{3-i\sqrt{67}}{2}, \\ y_4 = \frac{-3-i\sqrt{67}}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $(5; 2), (-5; -2), (\frac{3+i\sqrt{67}}{2}; \frac{-3+i\sqrt{67}}{2}), (\frac{3-i\sqrt{67}}{2}; \frac{-3-i\sqrt{67}}{2})$.

Приклад 3.12 Розв'язати систему рівнянь ([4], стор.(22))

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \end{cases}$$

Домножимо ліву та праву частину другого рівняння системи на xy , Отримаємо

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{12}xy \end{cases}$$

Дана система рівнянь є інваріантною відносно перестановок змінних. Тому, за означенням 2.7. та формулою 2.1., її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{25}{12}\sigma_2. \end{cases}$$

Виконаємо деякі тотожні перетворення, отримаємо

$$\begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ 49 - \frac{49}{12}\sigma_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \frac{49}{12}\sigma_2 = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 7, \\ \sigma_2 = 12. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

У першому рівнянні системи виражаємо x через y та підставляємо у друге рівняння системи, отримуємо

$$\begin{cases} x = 7 - y, \\ (7 - y)y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 - y, \\ y^2 - 7y + 12 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 - 7y + 12 = 0$

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 4$$

Оскільки система симетрична, то і розв'язки також будуть симетричними, тому

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;3), (3;4)$.

Приклад 3.13 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \\ x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5 \end{cases}$$

Зробимо заміну: $x^{\frac{1}{4}} = u$, $y^{\frac{1}{5}} = v$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^3 + v^3 = 35. \end{cases}$$

Система є інваріантною відносно перестановок змінних, можемо симетричні многочлени представити через елементарні симетричні многочлени. Матимемо

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 35. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ 125 - 15\sigma_2 - 35 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ 3\sigma_2 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 6. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$, то

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6; \end{cases}$$

Розв'язки даної системи

$$\begin{cases} u_1 = 2, \\ v_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 3, \\ v_2 = 2. \end{cases}$$

Повернемося до заміни: $x^{\frac{1}{4}} = u$, $y^{\frac{1}{5}} = v$

$$\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 243; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 81, \\ y_2 = 32. \end{cases}$$

Відповідь: $(16; 243)$, $(81; 32)$.

Приклад 3.14 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7} \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Оскільки, система є інваріантною відносно перестановок змінних. За формулою 2.1., подамо степеневі суми через елементарні симетричні многочлени

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$s_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$

$$s_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2}{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2} = \frac{31}{7}, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2 = 3. \end{cases}$$

Помножимо ліву та праву частину першого рівняння системи на 7, матимемо

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 31(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2), \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 3. \end{cases}$$

Поділимо на σ_1 перше рівняння системи

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 5\sigma_2^2) = 31(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) \\ \sigma_2 = \sigma_1^2 - 3 \end{cases}$$

Підставимо значення σ_2 у перше рівняння

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1^2 - 3, \\ 7\sigma_1^4 - 35\sigma_1^2\sigma_2 + 35\sigma_2^2 - 31\sigma_1^2 + 93\sigma_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1^2 - 3, \\ 7\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2 + 36 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи: $7\sigma_1^4 - 43\sigma_1^2 + 36 = 0$

Зробимо заміну: $\sigma_1^2 = t$

$$7t^2 - 43t + 36 = 0$$

$$D = 1849 - 1008 = 841$$

$$t_{1,2} = \frac{43 \pm 29}{14}$$

Отже, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{36}{7}$

Повернемося до заміни: $t = \sigma_1^2$. Знаходимо значення σ_1

$$\sigma_1^2 = 1, \sigma_1 = \pm 1$$

$$\sigma_1^2 = \frac{36}{7}, \sigma_1 = \pm \frac{6}{\sqrt{7}}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm \frac{6}{\sqrt{7}}, \\ \sigma_2 = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} x + y = \pm 1, \\ xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \pm \frac{6}{\sqrt{7}}, \\ xy = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Перша система матиме розв'язки

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = 1. \end{cases}$$

Друга система матиме 4 розв'язки. Розглянемо випадок, коли

$$\begin{cases} x + y = \frac{6}{\sqrt{7}}, \\ xy = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

У першому рівнянні системи виражаємо x через y і підставляємо у друге рівняння. Маємо

$$\begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt{7}} - y \\ y(\frac{6}{\sqrt{7}} - y) = \frac{15}{7} \end{cases}$$

Знайдемо корені другого рівняння системи

$$y^2 - \frac{6}{\sqrt{7}}y + \frac{15}{7} = 0$$

$$D = \frac{36}{7} - \frac{60}{7} = -\frac{24}{7}$$

$D < 0$, то рівняння матиме комплексні розв'язки

$$y_{5,6} = \frac{\frac{6}{\sqrt{7}} \pm i\sqrt{\frac{24}{7}}}{2} = \frac{6 \pm i\sqrt{24}}{14} = \frac{3 \pm i\sqrt{6}}{7}$$

$$x_{5,6} = \frac{6}{\sqrt{7}} - \frac{3 \pm i\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{3 \mp i\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

Оскільки, система рівнянь симетрична, то і її розв'язки також будуть симетричними

$$\begin{cases} x_5 = \frac{3 - i\sqrt{6}}{7}, \\ y_5 = \frac{3 + i\sqrt{6}}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \frac{3 + i\sqrt{6}}{7}, \\ y_6 = \frac{3 - i\sqrt{6}}{7}. \end{cases}$$

У випадку, коли

$$\begin{cases} x + y = -\frac{6}{\sqrt{7}}, \\ xy = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Система має такі розв'язки

$$\begin{cases} x_7 = \frac{-3 + i\sqrt{6}}{7}, \\ y_7 = \frac{-3 - i\sqrt{6}}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = \frac{-3 - i\sqrt{6}}{7}, \\ y_8 = \frac{-3 + i\sqrt{6}}{7}. \end{cases}$$

Приклад 3.15 Розв'язати систему рівнянь ([4], стор.(62))

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$

Виконаємо деякі тотожні перетворення, отримаємо

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ xy + xz + yz = xyz \\ xyz = 27 \end{cases}$$

За теоремою 2.1., складаємо кубічне рівняння

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0$$

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = (t - 3)(t^2 - 6t + 9) = (t - 3)(t - 3)^2 = (t - 3)^3$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = 3$$

розв'язки системи співпадають, тому

$$x = y = z = 3$$

3.3. Зворотні рівняння

Розглянемо многочлен $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0, n \in \mathbb{N}$. Якщо коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$, які рівновіддалені від його кінців співпадають, то такий многочлен називають зворотнім. Тобто $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}$.

Рівняння $f(z) = 0$ називається зворотнім, якщо $f(z)$ зворотній многочлен.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1. Будь-який зворотній многочлен парного степеня $f(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \dots + a_{2k-1} z + a_{2k}$ можна представити у вигляді

$$f(z) = z^k q(\sigma)$$

де $\sigma = z + \frac{1}{z}$, а q —деякий многочлен від σ степеня k

Доведемо, що будь-який зворотній многочлен можна представити через елементарні симетричні многочлени

$$f(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \dots + a_{2k-1} z + a_{2k} = z^k (a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_{2k-1} \frac{1}{z^k} + a_{2k} \frac{1}{z^k})$$

Оскільки $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}$, то

$$f(z) = z^k (a_0 (z^k + \frac{1}{z^k}) + a_1 (z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}) + \dots + a_k)$$

Степенева сума $s_k = x^k + y^k$

Зробимо заміну: $x = z, y = \frac{1}{z}$. Будемо мати

$$s_k = x^k + y^k = z^k + \frac{1}{z^k}$$

За означенням 2.7 степеневу суму можна представити через елементарні симетричні многочлени. Позначимо через $\sigma_1 = z^k + \frac{1}{z^k}$, а через $\sigma_2 = z^k \cdot \frac{1}{z^k} = 1$. Скористаємося формулою 2.1. та підставимо $\sigma_2 = 1$. Будемо мати

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$$

$$s_1 = z + \frac{1}{z} = \sigma_1$$

$$s_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2$$

$$s_3 = z^3 + \frac{1}{z^3} = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1$$

$$s_4 = z^4 + \frac{1}{z^4} = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2$$

$$s_5 = z^5 + \frac{1}{z^5} = \sigma_1(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 + 5\sigma_1$$

.....

Розглянемо випадок коли многочлен степеня $2k + 1$

$$f(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + \dots + a_{2k} z + a_{2k+1}$$

Оскільки $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, то

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1(z^{2k} + z) + \dots + a_k(z^{k+1} + z^k) = \\ &= a_0(z^{2k+1} + 1) + a_1z(z^{2k-1} + 1) + \dots + a_kz^k(z + 1) = (z + 1)q(z) \end{aligned}$$

де $q(z)$ —многочлен парного степеня

ОЗНАЧЕННЯ 3.2. Будь-який зворотній многочлен непарного степеня $f(z) = a_0z^{2k+1} + a_1z^{2k} + \dots + a_{2k}z + a_{2k+1}$ ділиться на $(z + 1)$, причому часткою від ділення є зворотній многочлен парного степеня

Приклад 3.16. Розв'язати рівняння

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^4 + 1 = 0$$

Виконаємо деякі тотожні перетворення

$$z^4(z^4 + 4z^2 - 10 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4}) = 0$$

$$z^4((z^4 + \frac{1}{z^4}) + 4(z^2 + \frac{1}{z^2}) - 10) = 0$$

$z = 0$ не є коренем рівняння

Зробимо заміну: $\sigma_1 = z + \frac{1}{z}$, а через $\sigma_2 = z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Будемо мати

$$s_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = \sigma_1^2 - 2$$

$$s_4 = z^4 + \frac{1}{z^4} = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2$$

$$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2 + 4\sigma_1^2 - 8 - 10 = 0$$

$$\sigma_1^4 = 16$$

Корені даного рівняння: 1)2; 2)-2; 3)2i; 4)-2i.

Повернемося до заміни: $\sigma_1 = z + \frac{1}{z}$

$$1)z + \frac{1}{z} = 2;$$

$$z^2 - 2z + 1 = 0;$$

$$(z - 1)^2 = 0;$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 1.$$

$$2)z + \frac{1}{z} = -2;$$

$$z^2 + 2z + 1 = 0;$$

$$(z + 1)^2 = 0;$$

$$z_3 = -1, \quad z_4 = -1.$$

$$3)z + \frac{1}{z} = 2i;$$

$$z^2 - 2zi + 1 = 0;$$

$$D = -4 - 4 = -8, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-8} = 2i\sqrt{2};$$

$$z_5 = \frac{2i + 2i\sqrt{2}}{2} = i + i\sqrt{2} = i(1 + \sqrt{2});$$

$$z_6 = \frac{2i - 2i\sqrt{2}}{2} = i - i\sqrt{2} = i(1 - \sqrt{2});$$

$$4)z + \frac{1}{z} = -2i;$$

$$z^2 + 2zi + 1 = 0;$$

$$D = -4 - 4 = -8, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-8} = 2i\sqrt{2};$$

$$z_7 = \frac{-2i + 2i\sqrt{2}}{2} = -i + i\sqrt{2} = i(-1 + \sqrt{2});$$

$$z_8 = \frac{-2i - 2i\sqrt{2}}{2} = -i - i\sqrt{2} = i(-1 - \sqrt{2});$$

$$\text{Відповідь: } 1; -1; i(1 + \sqrt{2}); i(1 - \sqrt{2}); i(-1 + \sqrt{2}); i(-1 - \sqrt{2}).$$

Приклад 3.17. Розв'язати рівняння

$$2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$$

Виконаємо деякі тотожні перетворення

$$2(x^3 + 1) - 5(x^2 + x) = 0$$

$$2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 5x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(2x^2 - 7x + 2) = 0$$

$$(x + 1) = 0, (2x^2 - 7x + 2) = 0$$

$$(x + 1) = 0, \quad x_1 = -1$$

$$2x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$D = 49 - 16 = 33;$$

$$x_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4};$$

$$x_3 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } -1; \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}; \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}.$$

Висновки до розділу 3

У даному розділі розглянуто практичне застосування теорії симетричних многочленів до розв'язування рівнянь, зворотніх рівнянь та систем рівнянь. Наведено декілька прикладів зі шкільного підручника. У підручниках не значна частина рівнянь чи систем рівнянь, до яких можна застосувати даний метод. Тому, теорію симетричних многочленів у шкільному курсі математики не вивчають. Але, принцип дії даного методу використовують, і називають його заміною змінних. Даний метод доцільно розглядати у позакласній роботі з математики, тому що він буде не тільки корисним, але й цікавим.

РОЗДІЛ 4

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

4.1. Аналіз методики використання симетричних многочленів у шкільних підручниках

Розглянемо рівняння та системи рівнянь взятих зі шкільних підручників до яких можна застосувати теорію симетричних многочленів, а також з'ясуємо, який метод пропонується учням використати для їх вирішення.

Приклад 4.1 Розв'язати рівняння ([2], стор.(174, №15.22))

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$$

Учням пропонується зробити заміну: $x^2 + y^2 = u$, $x^2 \cdot y^2 = v$. Тоді

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 17, \\ u = 5; \end{cases}$$

Використаємо теорію симетричних многочленів до розв'язання системи
Дана система рівнянь є інваріантною відносно перестановок змінних. Тому, за означенням 2.7. та формулою 2.1., її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 17, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1^2 = 5 + 2\sigma_2, \\ (5 + 2\sigma_2)^2 - 4(5 + 2\sigma_2)\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 17. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи

$$(5 + 2\sigma_2)^2 - 4(5 + 2\sigma_2)\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 17$$

$$25 + 20\sigma_2 + 4\sigma_2^2 - 20\sigma_2^2 - 8\sigma_2^2 + 2\sigma_2^2 = 17$$

$$-2\sigma_2^2 = -8$$

$$\sigma_2^2 = 4$$

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_2 = -2$$

Маємо 4 системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -3, \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Розглянемо першу систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y, \\ y^2 - y - 2 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 - y - 2 = 0$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Розглянемо 2 систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -1, \\ \sigma_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 - y, \\ y^2 + y - 2 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 + y - 2 = 0$

$$y_3 = -2, \quad y_4 = 1;$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -2.$$

Третя система рівнянь має розв'язки

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 - 3y + 2 = 0$

$$y_5 = 2, \quad y_6 = 1;$$

$$x_5 = 1, \quad x_6 = 2.$$

Розглянемо 4 систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -3, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 - y, \\ y^2 + 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 + 3y + 2 = 0$

$$y_7 = -2, \quad y_8 = -1;$$

$$x_7 = -1, \quad x_8 = -2.$$

Відповідь: $(-1;2), (2;-1), (1;-2), (-2;1), (1;2), (2;1), (-1;-2), (-2;-1).$

Приклад 4.2 Розв'язати систему рівнянь ([2], стор.(173, №15.16))

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$$

Учням пропонується зробити заміну: $x + y = u$, $xy = v$. Тоді

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 - v = 7; \end{cases}$$

Використаємо теорію симетричних многочленів до розв'язання системи
Система є інваріантною відносно перестановок змінних, можемо симетричні многочлени представити через елементарні симетричні многочлени. Матимемо

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 5, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5 - \sigma_2, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_2 = 7. \end{cases}$$

Підставимо значення σ_1 у друге рівняння системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 - \sigma_2, \\ (5 - \sigma_2)^2 - \sigma_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

Шукаємо корені квадратного рівняння: $(5 - \sigma_2)^2 - \sigma_2 - 7 = 0$

$$25 - 10\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_2 - 7 = 0$$

$$\sigma_2^2 - 11\sigma_2 + 18 = 0$$

За теоремою Вієта знаходимо корені: $\sigma_2 = 9$, $\sigma_2 = 2$

Маємо дві системи рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -4, \\ \sigma_2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2. \end{cases}$$

Розглянемо першу систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -4, \\ \sigma_2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 - y, \\ y^2 + 4y + 9 = 0; \end{cases}$$

$$D = 16 - 36 = -20, \quad \sqrt{D} = 2i\sqrt{5}$$

$$y_1 = \frac{-4 + 2i\sqrt{5}}{2} = -2 + i\sqrt{5}, \quad y_2 = \frac{-4 - 2i\sqrt{5}}{2} = -2 - i\sqrt{5};$$

$$x_1 = -4 - (-2 + i\sqrt{5}) = -2 - i\sqrt{5}, \quad x_2 = -4 - (-2 - i\sqrt{5}) = -2 + i\sqrt{5}.$$

Розглянемо другу систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 3, \\ \sigma_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 - y, \\ y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 - 3y + 2 = 0$

$$y_3 = 2, \quad y_4 = 1;$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

Відповідь: $(-2 - i\sqrt{5}; -2 + i\sqrt{5}), (-2 + i\sqrt{5}; -2 - i\sqrt{5}), (1; 2), (2; 1).$

Приклад 4.3 Розв'язати систему рівнянь ([1], стор.(319, №42.19))

$$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$$

Виконаємо тотожні перетворення, отримаємо

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) - 47 = 0$$

Учням пропонується зробити заміну: $x + \frac{1}{x} = t$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Тоді

$$4(t^2 - 2) + 12t - 47 = 0$$

Використаємо теорію симетричних многочленів до розв'язання рівняння

Зробимо заміну: $x + \frac{1}{x} = \sigma_1$, $x \cdot \frac{1}{x} = \sigma_2$. У першому доданку маємо степеневу суму s_2

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

Оскільки $\sigma_2 = 1$, то $s_2 = \sigma_1^2 - 2$. Будемо мати

$$4(\sigma_1^2 - 2) + 12\sigma_1 - 47 = 0$$

$$4\sigma_1^2 - 8 + 12\sigma_1 - 47 = 0$$

$$4\sigma_1^2 + 12\sigma_1 - 55 = 0$$

$$D = 144 + 880 = 1024, \quad \sqrt{D} = 32$$

Корені квадратного рівняння: $\sigma_1 = \frac{-12 + 32}{8} = 2,5$ та $\sigma_1 = \frac{-12 - 32}{8} = -5,5$

Повернемося до заміни: $x + \frac{1}{x} = \sigma_1$. Отримаємо два рівняння

$$1)x + \frac{1}{x} = 2,5 \quad 2)x + \frac{1}{x} = -5,5$$

Розв'яжемо перше рівняння

$$x + \frac{1}{x} = 2,5;$$

$$x^2 - 2,5x + 1 = 0 \mid \cdot 10;$$

$$10x^2 - 25x + 10 = 0 \mid \div 5;$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9, \quad \sqrt{D} = 3;$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Розв'яжемо друге рівняння

$$x + \frac{1}{x} = -5,5;$$

$$x^2 + 5,5x + 1 = 0 \mid \cdot 10;$$

$$10x^2 + 55x + 10 = 0 \mid \div 5;$$

$$2x^2 + 11x + 2 = 0;$$

$$D = 121 - 16 = 105;$$

$$x_3 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}, \quad x_4 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}, x_4 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}.$$

Приклад 4.4 Розв'язати систему рівнянь ([3], стор.(75,№8.6))

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Учням пропонується зробити заміну: $\sqrt{\frac{x}{y}} = t > 0$.

Використаємо теорію симетричних многочленів до розв'язання системи. Виконаємо тожні перетворення

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = \frac{25}{4}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Дана система рівнянь є інваріантною відносно перестановок змінних. Тому, за означенням 2.7. та формулою 2.1., її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_2}{\sigma_2} = \frac{25}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \frac{25}{\sigma_2} = \frac{25}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_2 = 4. \end{cases}$$

Оскільки, $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$, то

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - y, \\ y^2 - 5y + 4 = 0. \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені квадратного рівняння: $y^2 - 5y + 4 = 0$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 4;$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1.$$

Відповідь: (1;4), (4;1).

Приклад 4.5 Розв'язати систему рівнянь ([4], стор.(240,№24.27))

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16. \end{cases}$$

Виконаємо тожні перетворення

$$\begin{cases} xy - x - y + 1 - 1 = 0, \\ xy(x+y) = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} xy - (x+y) = 0, \\ xy(x+y) = 16. \end{cases}$$

Учням пропонується зробити заміну: $x + y = u$, $xy = v$. Тоді

$$\begin{cases} v - u = 0, \\ uv = 16. \end{cases}$$

Використаємо теорію симетричних многочленів до розв'язання системи.

Дана система рівнянь є інваріантною відносно перестановок змінних. Тому, за означенням 2.7. та формулою 2.1., її можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2, \\ \sigma_1 \sigma_2 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1^2 = 16, \\ \sigma_1 = \sigma_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 4, & \sigma_1 = -4 \\ \sigma_1 = \sigma_2. \end{cases}$$

Маємо дві системи

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -4, \\ \sigma_2 = -4; \end{cases}$$

Розглянемо першу систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4, \\ \sigma_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y, \\ y^2 - 4y + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 - y, \\ (y - 2)^2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 2. \end{cases}$$

Розглянемо 2 систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = -4, \\ \sigma_2 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 - y, \\ y^2 + 4y - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи

$$y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$D = 16 + 16 = 32, \quad \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$y_2 = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}, \quad y_3 = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2};$$

$$x_2 = -4 - (-2 + 2\sqrt{2}) = -2 - 2\sqrt{2}, \quad x_3 = -4 - (-2 - 2\sqrt{2}) = -2 + 2\sqrt{2}.$$

Відповідь: $(2; 2), (-2 - 2\sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}), (-2 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2})$.

4.2. Задачі з використанням симетричних многочленів, які можна використовувати на позакласній роботі з математики

Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---|---|
| 1) $(x^2 + 1)^7 - (x^2 - 1)^7 = 2^7$; | 2) $t^4 + (1 - t)^4 = 1$; |
| 3) $3x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 3 = 0$; | 4) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$; |
| 5) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$; | 6) $12x^4 - 11x^2 + 12 = 16x^3 + 16x$; |
| 7) $10y^6 + y^5 - 47y^4 - 47y^3 + y^2 + 10y = 0$; | 8) $(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$; |
| 9) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$; | 10) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$; |
| 11) $x^4 + 1 = 2x^3 + x^2$; | 12) $2x^5 + 13x^2 + 2 = 13x^3 - 5(x^4 + x)$; |
| 13) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$; | 14) $\sqrt[4]{8 - x} + \sqrt[4]{89 + x} = 5$; |
| 15) $\sqrt[3]{8 + x} + \sqrt[3]{8 - x} = 1$ | 16) $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 35$ |
| 17) $\sqrt[4]{629 - x} = 8 - \sqrt[4]{77 + x}$; | 18) $\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1$; |
| 19) $\sqrt[4]{97 - x} = 5 - \sqrt[4]{x}$; | 20) $\frac{12}{x} + \frac{12}{\sqrt{1 - x^2}} - 35 = 0$; |
| 21) $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9$; | 22) $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 2$; |
| 23) $x\sqrt[3]{35 - x^3}(x + \sqrt[3]{35 - x^3}) = 30$; | 24) $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$; |
| 25) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; | 26) $(\frac{x + a}{2})^2 + (\frac{x - a}{2})^2 = a^6$; |
| 27) $(a - y)^2 = \sqrt[3]{a^6 - y^6}$; | 28) $\sqrt{1 - x^2} = (a - \sqrt{x})^2$; |
| 29) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a - x} = \sqrt[4]{b}$; | 30) $\sqrt[4]{a + x} + \sqrt[4]{a - x} = \sqrt[5]{2a}$; |

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 7 - xy, \\ x^2 + y^2 = 13 - xy; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y = 4, \\ x^4 + y^4 = 82; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 + 1 = 6xy; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy, \\ x - y = \frac{1}{4}xy; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} xy = 15, \\ x^2 + y^2 + x + y = 42; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^4 + y^4 = 1153 + x^2y^2, \\ x^2 + y^2 = 33 + xy; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 84, \\ x^2y^2 = 49 - (x^2 + y^2); \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x^6 + y^3 = 65; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 - xy, \\ x^4 + y^4 = 931 - x^2y^2; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x^5 - y^5 = 3093, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7}, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \\ x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} x + y = 7, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 6\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 5\sqrt{xy}, \\ x = 13 - y; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} x + y = 7 + \sqrt{xy}, \\ x^2 + y^2 + xy = 133; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3, \\ x^2 + y^3 = 82; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x + y = 14 - \sqrt{xy}, \\ x^2 + y^2 = 84 - xy; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \sqrt{x} = 2\sqrt{xy} + \sqrt{y}, \\ x + y = 20; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0, \\ 4x - 4y - xy = 0; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} x + xy + y = 12, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27. \end{cases}$$

Висновки до розділу 4

У даному розділі розглянуто практичне застосування теорії симетричних многочленів до розв'язування рівнянь та систем рівнянь взятих з шкільних підручників. Розглянуто методи, які використовують учні для їх вирішення. У підручниках незначна частина вправ, до яких можна застосувати даний метод. Тому, у другому підпункті цього розділу було виокремлено 30 рівнянь і 30 систем рівнянь, які можна використовувати на позакласній роботі з математики

Висновки

Зазвичай в учнів симетрія асоціюється з візерунками та формами, хоча більш загальна концепція симетрії — незмінність. Вивчення симетричних многочленів посідає важливе місце в курсі алгебри, їх властивості та застосування при розв'язуванні рівнянь, систем рівнянь, вилучення коренів, доведення тотожностей, звільнення від ірраціональності у дробах тощо.

Дана робота була присвячена вивченню симетрії з точки зору алгебри. У даній роботі було розглянуто найпростіші симетричні многочлени, які розглядаються у шкільному курсі математики. Дано означення, про елементарні симетричні многочлени, степеневі суми. Розглянуто зв'язок між симетричними многочленами та елементарними симетричними многочленами, степеневими сумами та елементарними симетричними многочленами. Встановлено взаємозв'язок формул Ньютона та Вієта з елементарними симетричними многочленами. Також, було доведено основні теореми теорії симетричних многочленів від двох та трьох змінних. Виведено формулу, яка дає змогу зразу знаходити степеневу суму s_k — го порядку без шукання попередніх s_{k-1} степеневих сум. Застосовано теорему Вієта до розв'язування рівнянь n — го степеня, у яких старший коефіцієнт рівний одиниці, та знаходженню його коренів за допомогою елементарних симетричних многочленів.

У третьому розділі розглянуто практичне застосування теорії симетричних многочленів до розв'язування рівнянь, зворотніх рівнянь та систем рівнянь. У розділі 4 розглянуто вправи зі шкільних підручників, до яких можна застосувати теорію симетричних многочленів. У підручниках незначна частина рівнянь чи систем рівнянь, до яких можна застосувати даний метод. Тому, було виокремлено 30 рівнянь і 30 систем рівнянь, які можна використовувати на позакласній роботі з математики. Даний метод доцільно розглядати у шкільному курсі математики, наприклад, на спецкурсах чи факультативах. Він буде не тільки цікавим, але й корисним та поглибить знання учнів із теми "Рівняння та системи рівнянь вищих порядків".

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 384 с.
- [2] Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.
- [3] Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с.
- [4] Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с.
- [5] Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. — Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. - 240 с.
- [6] Вейль Г. Симетрія. - М.: Наука, 1975.
- [7] Горобець В.О. Кочубей, С.Г.Симетрія в природі - Суми: СумДУ, 2017. - 91с.
- [8] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. — К.:Вища школа, 1976.—Ч. 2.— 402 с.
- [9] Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О.— Вінниця.:ВДПУ, 2002.—Ч.1.— 176 с.
- [10] Збірник задач з теорії многочленів. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2004 — 139 с.
- [11] Коваль Л.В., Скворцова С.О. Методика навчання математики — Харків: ЧП «Принт-Лідер», 2011. — 414 с

- [12] Л.В.Ізюмченко, В.В.Нішина, Р.Я.Ріжняк, Многочлени /Кіровоград 2009 — 52с.
- [13] Методичні рекомендації щодо написання магістерської роботи Київ 2018 — 32с.
- [14] Олексієнко Ю.О. Елементи теорії многочленів у шкільному курсі алгебри. Вісник студентського наукового товариства. Збірник наукових праць студентів, магістрантів аспірантів. Ніжин, 2021. Випуск 25. С.13-15
- [15] Прасолов В. В. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
- [16] Симетричні многочлени : навчально-методичний посібник з алгебри для студентів I курсу механіко-математичного факультету/ Н. П. Гиря, Л. Ю. Полякова. — Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2012. — 28 с.
- [17] Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів: навч.-метод. посіб. /Л. М. Ломонос, Н. П. Муранова, О. С. Муранов, А. В. Рилов. – К.: НАУ, 2011. – 96 с.
- [18] Урманцев Ю.А. «Симетрія природи і природа симетрії».- Москва: Думка, 1974.
- [19] <http://www.mmf.lnu.edu.ua/le/ta/1965>
- [20] <https://gdz4you.com/prezentaciyi/matematyka/symetriya-v-prirodi-19198/>
- [21] <https://moyaosvita.com.ua/biologija/dopovid-na-temu-simetriya-v-prirodi/>
- [22] <http://www.mmf.lnu.edu.ua/algprg/728>
- [23] <http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/9904/1/Kombinatoryka.pdf>