

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему: "Задачі оптимізації на факультативних заняттях у профільній
школі (економічний профіль)"

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта (Ма-
тематика)

Новак Віталія Миколаївна

Науковий керівник: доцент, к.ф.-м.н.

Никифорчин Ірина Володимирівна

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н.

Кульчицька Наталія

Володимирівна

Івано-Франківськ - 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА ЕКСТРЕМУМ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ	5
1.1. Квадратний тричлен в задачах на найбільше та найменше значення	5
1.2. Нерівність Коші, її наслідки та застосування для задач на оптимізацію	8
1.3. Застосування похідної на дослідження функцій на екстремум	12
Висновки до розділу 1	21
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ В ЕКОНОМІЦІ	22
2.1. Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції	23
2.2. Задачі лінійного програмування. Графічне розв'язування задач лінійного програмування. Приклади	30
Висновки до розділу 2	37
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТТЯ	38
3.1. Факультативне заняття за темою: «Похідні функції та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки»	38
3.2. Використання засобів дистанційного навчання	50
Висновки до розділу 3	52
ВИСНОВКИ	53
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	55
ДОДАТКИ	58
Додаток 1	58
Додаток 2	59
Додаток 3	60

ВСТУП

Всі галузі суспільного життя з великою швидкістю та без зупинки розвиваються. Цей розвиток неможливо здійснити без використання математики. Зрозуміло, що це стосується і економіки. Економічна діяльність - є однією з тих, для якої математична освіта є фундаментом для підготовки спеціалістів даного профілю.

На практиці економіст зустрічається із вирішенням різних завдань. Зокрема, із завданнями на вибір кращого (оптимального) вирішення ситуації. Наприклад, з декількох варіантів перевезення харчових продуктів вибрати найвигідніший, але при цьому врахувати терміни придатності продукції. Завдання, яке часто зустрічається на практиці – зменшення відходів деякої сировини, наприклад як з можливих варіантів розкрою тканини, вибрати такий, що план роботи виконається, але із меншою кількістю відходів тканини. Тому варто зазначити, що оптимізація є ключовим інструментом у сучасній економічній науці та практиці.

Сьогодні вміти використовувати математично-економічні знання потрібно не тільки економістам, а і всім відповідальним громадянам нашої держави. Перш за все, людина повинна знати як оптимізувати свій час, свої фінанси, свою діяльність. Наприклад, як мінімізувати витрати на паливо, як збільшити свій фінансовий дохід, як раціонально використати вільний час тощо.

Постійне зростання складності економічних проблем та завдань породжує попит на високо кваліфікованих фахівців з аналітичними та раціональними навичками. Вирішення реальних економічних завдань, таких як планування інвестицій, оптимізація бізнес-процесів, управління ризиками та фінансами, часто вимагає математичного моделювання та застосування методів оптимізації.

Для підготовки хороших спеціалістів з економіки треба використовувати і факультативні заняття. Учні на таких заняттях можуть більш глибоко вивчити різні аспекти оптимізації, а також навчитися їх застосовувати у реальних економічних ситуаціях.

Факультативні курси економічного спрямування для шкільної програми рекомендують впроваджувати в десятому та одинадцятому класах. В цей період учні вже свідомо мислять на рахунок фінансів, вміють раціонально використовувати їх та звичайно стараються оптимізувати витрати. Також вони зацікавлені в прибутку від своєї майбутньої

професії. Тому впровадження таких курсів на цьому рівні є доречним.

Мета дослідження: розглянути теоретичні та практичні аспекти навчання для розв'язування задач оптимізації на факультативних заняттях в профільній школі (економічний профіль)

Предмет дослідження: застосування задач оптимізації у процесі формування математичної, економічної та інформаційно-цифрової компетентностей на факультативних заняттях.

Об'єкт дослідження: навчальний процес факультативних занять у школах з економічним профілем.

Завдання дослідження:

1. розглянути основні принципи та інструменти постановки задач, побудови оптимізаційних економіко-математичних моделей, методи їх розв'язання та використання на практичній діяльності економіста;
2. розробка факультативного заняття.

Апробація дослідження:

Заняття, яке представлено в третьому розділі моєї кваліфікаційної роботи пройшло апробацію та має акт впровадження в Ланчинському ліцеї імені Ю. Шкрумеляка. Результати дослідження оприлюднені на VI Міжнародній науковій конференції "Актуальні проблеми теорії методики навчання математики" (м. Київ, 6-7 жовтня 2023 р.) з публікацією тез доповіді "Застосування похідної в задачах оптимізації на факультативних заняттях в профільній школі (економічний профіль)".

Структура роботи: вступ, три розділи, висновки до розділів, загальні висновки, список використаних джерел. Загальний обсяг роботи 60 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА ЕКСТРЕМУМ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

У сучасному світі, де наука і технологія надають нові можливості та розв'язують складні завдання, математична освіта виявляється надзвичайно важливою. Однією з ключових складових математичної освіти є вивчення аналізу функцій та їхніх властивостей. Один з найцікавіших та корисних аспектів аналізу функцій - це вивчення, як функції досягають екстремальних значень.

Дослідження функцій на екстремум є важливим поняттям в математиці, особливо в курсі математики з економічним спрямуванням. Основна ідея полягає в тому, щоб знайти значення функції, при яких вона досягає свого максимуму (найбільше значення) або мінімуму (найменше значення). Екстремальні точки функцій, такі як максимуми та мінімуми, важливі при вирішенні завдань оптимізації, моделюванні реальних ситуацій і прийнятті рішень в економіці, фізиці, інженерії, екології та інших галузях.

Людей завжди цікавило питання вибору найкращого (оптимального) варіанту серед усіх можливих. Завдання полягають у пошуку найбільшого або найменшого значення з метою знаходження оптимального рішення. Ці завдання об'єднуються під поняттям "задачі на знаходження екстремуму а методи їх вирішення є основою теорії оптимізації.

Під час вивчення теми: "Дослідження функцій на екстремум" учні отримають можливість досліджувати функції, визначати їхні точки екстремуму та розв'язувати реальні завдання, використовуючи отримані знання. Це надає їм можливість розвивати аналітичне мислення, навички моделювання та вирішення складних завдань, які стануть важливими в подальшій освіті та професійній діяльності.

Ця тема не лише допоможе учням засвоїти теоретичні основи дослідження функцій на екстремум, але й надасть можливість застосовувати отримані знання у практичних ситуаціях, що робить його надзвичайно цінним у процесі математичної освіти учнів економічних профілів.

1.1 Квадратний тричлен в задачах на найбільше та найменше значення

Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де a, b, c - деякі числа (коефіцієнти многочлена), при чому $a \neq 0$, x - змінна.

Наприклад: $3x^2 + 2x - 7$; $x^2 - 3x + 2$; $-5x^2 + 3x + 2$; $x^2 - 16$ та інші.

Дискримінантом квадратного тричлена називають вираз $D = b^2 - 4ac$.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю:

- якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різних корені;
- якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь (це те саме, що два рівних між собою корені);
- якщо $D < 0$, то квадратний тричлен не має дійсних коренів.

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c \in$ *парабола*.

Точка (m, n) є вершиною параболи, де $m = -\frac{b}{2a}$ та $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Вісь симетрії— пряма $x = m$.

Квадратний тричлен можна розкласти на множники тільки у випадку, коли $D \geq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Коефіцієнти квадратного тричлена мають значний вплив на дослідження функції на екстремум, на форму параболи та розташування її вершини, а також на наявність та тип екстремальних точок.

Розглянемо окремо вплив кожного коефіцієнта:

Коефіцієнт a :

Якщо $a > 0$, парабола відкривається догори, і маємо параболу з вітками вгору. У такому випадку, функція матиме точку мінімуму у вершині параболи. Якщо $a < 0$, парабола відкривається донизу, і маємо параболу з вітками вниз. У цьому випадку, функція матиме точку максимуму у вершині параболи.

Коефіцієнт b :

Коефіцієнт b визначає зсув параболи вздовж осі x . Якщо $b > 0$, то парабола зсувається вправо, а якщо $b < 0$, то вліво. Значення $|b|$ визначає, наскільки далеко парабола зсувається.

Коефіцієнт c :

Коефіцієнт c визначає вертикальний зсув параболи вгору або вниз. Якщо $c > 0$, парабола

зсувається вгору, а якщо $c < 0$, парабола зсувається вниз. Значення $|c|$ визначає, наскільки далеко парабола зсувається.

Правильне аналізування параметрів (коефіцієнтів) допомагає знайти найбільше та найменше значення квадратного тричлена та застосувати ці знання у різних прикладних задачах, зокрема економічного характеру.

Щоб знайти найбільше або найменше значення квадратного тричлена потрібно:

- 1) визначаємо напрям віток параболи по знакові старшого коефіцієнта a :
- 2) якщо $a > 0$ функція має найменше значення, при $a < 0$ – найбільше;
- 3) за формулою $m = -\frac{b}{2a}$ знайти абсцису вершини;
- 4) за формулою $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ або $n = y(m)$ знайти значення ординати, яке і буде найбільшим або найменшим значенням квадратного тричлена.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.1.1 Знайти найбільше або найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 3$.

Розв'язання: $a = 1, a > 0$, тому вітки напрямлені вгору, а отже функція має найменше значення.

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2; \text{ – абсциса вершини параболи;}$$

$$n = y(m) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \text{ – ордината вершини.}$$

Отже, функція має найменше значення $y_{\min} = -1$.

Відповідь: -1.

Приклад 1.1.2 Знайти найбільше або найменше значення функції $y = -x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання: $a = -1, a < 0$, тому вітки напрямлені вниз, а отже функція має найбільше значення.

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-1)} = 1\frac{1}{2}; \text{ – абсциса вершини параболи;}$$

$$n = y(m) = -(1\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{4} \text{ – ордината вершини.}$$

Отже, функція має найбільше значення $y_{\max} = 3\frac{1}{4}$.

Відповідь: $3\frac{1}{4}$.

Приклад 1.1.3 Знайти найбільше значення виразу xu за умови $3x + y = 10$,

$x > 0, y > 0$.

Розв'язання. Для спрощення обчислень від обмеження $3x + y = 10$ можемо виділити y :

$$y = 10 - 3x;$$

Тепер ми можемо підставити це значення y у вираз xy :

$$xy = x(10 - 3x)$$

$$xy = 10x - 3x^2$$

Цей вираз представляє квадратний тричлен та графіком його є парабола. Тому нам потрібно знайти її вершину:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{3}$$

Підставляючи це значення x у вираз xy , отримаємо:

$$xy = \frac{5}{3} \cdot (10 - 3 \cdot \frac{5}{3}) = \frac{25}{3}.$$

Отже, за даними обмеженнями найбільше значення виразу $xy = \frac{25}{3}$.

1.2. Нерівність Коші, її наслідки та застосування для задач на оптимізацію.

Для початку розглянемо які є середні величини:

- 1) $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ – середнє арифметичне, де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – будь-які числа.
- 2) $B_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ – середнє геометричне, де $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$.
- 3) $C_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ – середнє гармонійне, при умові що знаменники не дорівнюють нулю.
- 4) $D_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ – середнє квадратичне, де $a_1, a_2, \dots, a_n$ – будь-які числа.

Однією з відомих нерівностей є нерівність Коші.

Нерівність Коші стверджує: середнє арифметичне кількох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Рівність досягнеться за умови, що всі числа рівні між собою.

З цієї нерівності слідують наслідки, які є важливими при розв'язуванні вправ на доведення нерівностей та для задач на знаходження екстремуму:

1. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
2. $a^2 + b^2 \geq 2ab$
3. $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$
4. $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$

Для взаємно обернених чисел теж відомі дві нерівності:

- 1) Якщо $b < 0$, то сума двох взаємно обернених від'ємних чисел не більша за -2 , тобто $b + \frac{1}{b} \leq -2$.
- 2) Якщо $a > 0$, то сума двох взаємно обернених додатніх чисел не менша за 2 , тобто

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Нерівність Коші є ключовою, адже за її допомогою можна довести цілу низку складніших нерівностей.

Завдання на доведення нерівностей використовують на олімпіадах з математики, на ЗНО, а також на гуртках та факультативах. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.2.1 Доведіть, що коли $a > 0, b > 0$ то $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$.

Розв'язання. Розглянемо кожний множник окремо. За нерівністю Коші:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} &\geq \sqrt{\frac{1}{ab}}. \end{aligned}$$

Використовуючи властивість числових нерівностей, можемо їх перемножити. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right) &\geq \sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} \\ (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) &\geq 4. \end{aligned}$$

Доведено.

Приклад 1.2.2 Доведіть нерівність $x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$. Розглянемо наслідок із нерівності Коші:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Для того, щоб використати наслідок з нерівності Коші, за властивістю числових нерівностей додамо одиницю до обох частин нерівностей:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} &\geq 1 + 1; \\ x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} &\geq 2; \end{aligned}$$

Переносимо одиницю зліва направо, отримуємо: $x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$

Доведено.

Розглянемо приклади на знаходження найбільшого (найменшого) значення:

Приклад 1.2.3 Знайти найбільше значення виразу xy , якщо $x > 0, y > 0$ і $x + 3y = 6$. Розв'язання.

До виразу $x + 3y = 6$ застосуємо нерівність Коші:

$$\frac{x+3y}{2} \geq \sqrt{3xy},$$

$$\frac{6}{2} \geq \sqrt{3xy},$$

$$\text{отже, } \sqrt{3xy} \leq 3,$$

$$(\sqrt{3xy})^2 \leq 3^2,$$

$$3xy \leq 9,$$

$xy \leq 3$. Отже, найбільше значення $xy = 3$.

Приклад 1.2.4 Знайти найбільше значення виразу xy за умови $3x + y = 10$, $x > 0$, $y > 0$.

Розв'язання. Застосуємо нерівність Коші для пари y та $3x$:

$$\frac{3x+y}{2} \geq \sqrt{3xy},$$

$$\text{тоді } \frac{10}{2} \geq \sqrt{3xy},$$

$$\sqrt{3xy} \leq 5,$$

$$3xy \leq 25,$$

$$xy \leq \frac{25}{3}.$$

Найбільше значення виразу xy буде дорівнювати $\frac{25}{3}$, за умови існування таких x, y .

У нерівності Коші рівність досягається за умови $3x = y$, складемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 3x + y = 10; \end{cases}$$

тоді $6x = 10$, $x = \frac{5}{3}$, а $y = 5$.

Отже, найбільше значення виразу $xy = \frac{25}{3}$.

Також існують такі правила:

- 1) Якщо сума додатних чисел постійна, то їхній добуток буде найбільшим, коли числа рівні між собою.
- 2) Якщо добуток додатних чисел постійний, то їхня сума буде найменшою, коли числа рівні між собою.

Саме ці правила часто застосовуються в задачах на знаходження найбільшого чи найменшого значення. Розглянемо приклади таких задач:

Приклад 1.2.5 Сума двох чисел дорівнює 18. Яке найбільше значення може набу-

вати добуток цих чисел?

Розв'язання. За вищесказаним правилом (1), добуток буде найбільшим при $x = 9$ та $y = 9$. Тоді він становитиме 81.

Відповідь: найбільшого значення 81 добуток набуде при умові, що числа будуть рівними між собою, тобто рівними 9.

Приклад 1.2.6 Добуток двох невід'ємних чисел дорівнює 2. Яке найменше значення може набути сума цих чисел?

Розв'язання.

За вищесказаним правилом (2), сума чисел x та y буде найменшою, якщо $x = y$.

Нехай:

x – перше число;

$\frac{2}{x}$ – друге число;

Тоді $x = \frac{2}{x}$, $x = \pm\sqrt{2}$

За умовою задачі, числа невід'ємні, тому $x = -\sqrt{2}$ не підходить. Отже:

$x = \sqrt{2}$;

$S(x)_{min} = S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Відповідь: сума цих чисел може набути найменшого свого значення $2\sqrt{2}$ за умови, що числа будуть рівними між собою, а саме $\sqrt{2}$.

Нерівність Коші, її наслідки допомагають зменшити час для розв'язання задач на знаходження екстремальних значень функції. Наведемо приклади таких.

Приклад 1.2.6 Підприємство має фіксований бюджет в розмірі 100 000 гривень для видатків на працю та обладнання. Працівники отримують зарплати в середньому 5 000 гривень на місяць, а обладнання коштує 25 000 гривень за одиницю. Знайти оптимальну кількість працівників та обладнання для максимізації загального продуктивного виходу.

Розв'язання. Нехай:

фіксований бюджет $(B) = 100,000$ грн;

x - кількість працівників із середньою зарплатою 5 000 грн на місяць;

y - кількість обладнання за ціною 25,000 грн за одиницю;

Працівники та обладнання повинні бути розподілені рівними частинами бюджету, адже тоді підприємство отримає максимальний вихід продукції.

Знаючи, що $5000x = 25000y$, ми можемо знайти їх конкретні значення. В даному

випадку, витрати видатків на працю та обладнання будуть рівними половині бюджету:

$$5000x = 50000 \text{ грн},$$

$$25000y = 50000 \text{ грн}.$$

$$\text{Тоді } x = 10, y = 2.$$

Отже, оптимальна кількість працівників 10 осіб, а кількість обладнання 2. Розподіл бюджету полягає в тому, що підприємство повинно витратити 50,000 грн на зарплати працівників і 50,000 грн на придбання обладнання. Цей розподіл гарантує найвищий можливий продуктивний вихід за умови, що сума видатків на працю та обладнання є постійною і їхні витрати рівні між собою.

1.3. Застосування похідної на дослідження функцій на екстремум

Розділ математики, названий "Похідна та її застосування" є важливою частиною шкільного курсу алгебри та початкового аналізу. Це зовсім не дивно, оскільки поняття похідної має широке практичне застосування. Існує багато прикладів, завдань і ситуацій у житті, які вимагають вирішення з використанням похідної. Один із таких видів задач - це дослідження функцій на екстремуми.

Під час вивчення похідної учні часто можуть не розуміти, на що вона їм потрібна, не бачити практичного застосування цього поняття і не знати, де саме його використовувати. Тому важливо під час вивчення цієї теми акцентувати увагу на практичних завданнях і застосуваннях.

Введемо означення похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому інтервалі.

1. Зафіксуємо деяке значення аргументу x та відповідне значення функції $y = f(x)$
2. Надамо аргументові x будь-якого приросту Δx (приріст може бути і додатнім, і від'ємним).

Розглядаємо ще одне значення аргументу $x + \Delta x$ і знайдемо відповідне значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

3. Знайдемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4. Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

.

5. Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції

до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує і вона скінченна:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x .

Механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S = S(t)$.

Економічний зміст похідної: похідна $V'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$ дорівнює граничним витратам виробництва $V = V(x)$ однорідної продукції як функції кількості продукції x та наближено характеризує додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Похідну $V'(x)$ називають граничними (маржинальними) витратами виробництва при умовах простого відтворення, хоча б, виробництва продукції. Аналогічно до граничних витрат, можна розглядати поняття такі, як маржинальний дохід, маржинальний прибуток, маржинальну продуктивність праці, маржинальний обсяг продукції, маржинальну корисність та ін.

Отже, можемо стверджувати, що похідна функції характеризує швидкість зміни функції деякого економічного, фізичного процесу, досліджуваного фактора відносно часу.

Функцію називають *диференційовною* в точці x якщо існує похідна в цій точці. Функцію називають *диференційовною* на деякому проміжку якщо існує похідна в кожній точці цього проміжку.

Пригадаємо означення зростаючої та спадної функції.

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція *неспадає*, якщо виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція *незростаюча*, якщо виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Розглянемо як пов'язані похідна із проміжками зростання та спадання функції, з її найбільшими та найменшими значеннями.

Теорема 1.3.1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ та диференційована на інтервалі $(a; b)$. Для того щоб функція $f(x)$ була неспадною на $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб похідна $f'(x)$, була невід'ємною на інтервалі $(a; b)$, тобто $f'(x) \geq 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай $f(x)$ неспадна на $[a, b]$. Виберемо між a і b точки x та $x + \Delta x$. Нехай $x + \Delta x > 0$. Тоді якщо функція неспадна маємо, що $f(x + \Delta x) \geq f(x)$. Тобто $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ або $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Зазначимо що остання рівність правильна не тільки для $x + \Delta x > 0$, а і для $x + \Delta x < 0$ теж. Розглянемо границю, коли $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$

Тут ми використали теорему: якщо функція невід'ємна і прямує до нуля, то і границя функції буде невід'ємною.

Достатність. Нехай $f'(x) \geq 0$ на (a, b) . Візьмемо два довільних значення x_1, x_2 такі, що $x_1 < x_2$ з проміжку $[a, b]$ і застосуємо до функції $f(x)$ на $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), (x_1 < c < x_2).$$

Оскільки похідна невід'ємна на інтервалі (a, b) , $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Отже функція $f(x)$ буде неспадною.

Теорему доведено.

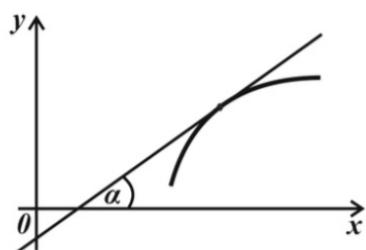
Аналогічні теореми справджуються і для незростаючої, спадної та зростаючої функції. Представимо їх графічно (Рис. 1).

Стаціонарними (критичними) точками першої похідної називають точки, в яких похідна функції $f(x)$ рівна нулю або не існує.

Для визначення інтервалів зростання та спадання функції зручно користуватися схемою:

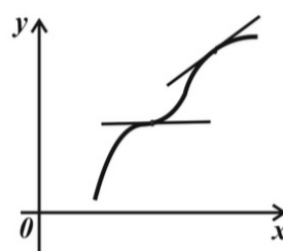
1. знайти область визначення;
2. знайти першу похідну;
3. знайти стаціонарні точки;
4. стаціонарними точками поділити область визначення на інтервали, в яких функція буде зростати або спадати. Вибрати всередині кожного інтервалу точку та перевірити знак

Функція зростаюча
 $y' > 0$



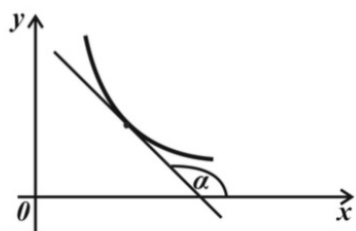
Дотична до кривої утворює
гострий кут з додатним
напрямом осі Ox

Функція неспадна
 $y' \geq 0$



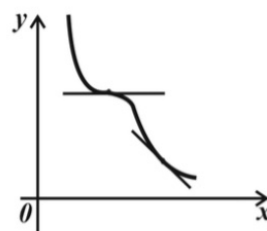
Є точки, у яких дотична
паралельна осі Ox

Функція спадна
 $y' < 0$



Дотична до кривої утворює
тупий кут з додатним
напрямом осі Ox

Функція незростаюча
 $y' \leq 0$



Є точки, у яких дотична
паралельна осі Ox

Рис. 1:

похідної в ній, якщо:

$f'(x) > 0$ – функція зростає;

$f'(x) < 0$ – функція спадає.

Розглянемо приклад визначення інтервалів монотонності функції.

Приклад 1.3.1 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 17$

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідну: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 16$. Це парабола, розміщена вітками вгору ($a = 3, 3 > 0$). Знайдемо точки перетину з віссю OX , вони і будуть стаціонарними точками:

$$3x^2 - 8x - 16 = 0;$$

$$D = 256; \sqrt{D} = 16;$$

$$x_1 = 4; x_2 = -\frac{4}{3};$$

Отже, на інтервалі $(-\frac{4}{3}; 4)$ похідна буде від'ємною, а функція – спадною. Додатньою похідна буде на інтервалах $(-\infty; -\frac{4}{3})$ та $4; +\infty)$, тому функція на них зростаюча.

За допомогою онлайн програми GeoGebra побудуємо графік функції $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 17$ (рис.2).

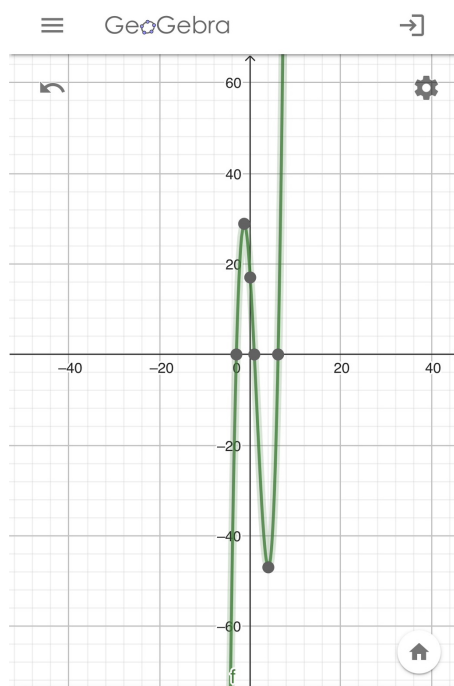


Рис. 2: Графік функції $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 17$

Дійсно, інтервали зростання та спадання співпадають зі знайденими.

Максимум (max) функції $y = f(x)$ є у точці x_0 тоді, коли значення функції у цій

точці більше, ніж її значення в усіх інших точках заданого інтервалу, що містить точку x_0 .

Мінімум (min) функції $y = f(x)$ є у точці x_0 тоді, коли значення функції у цій точці менше, ніж її значення в усіх інших точках заданого інтервалу, що містить точку x_0 .

Максимум та мінімум функції називаються *екстремумами* функції (рис. 3).

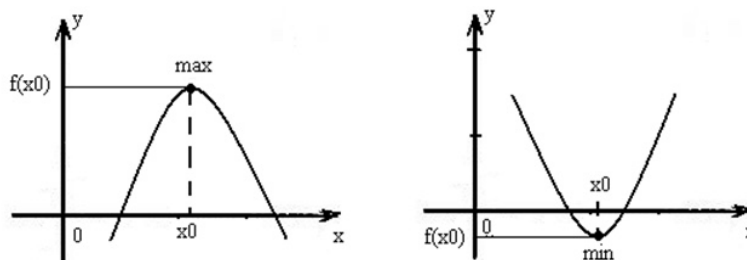


Рис. 3: Максимум та мінімум функцій

Розглянемо дві основні теореми існування екстремумів.

Теорема 1.3.2 (Необхідні умови існування екстремуму функції). Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то в цій точці похідна функції дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$.

Теорема 1.3.3 (Достатні умови існування екстремуму функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна, диференційована у всіх точках (за винятком, можливо точки x_0) деякого інтервалу, що містить точку x_0 . Тоді якщо при переході (зліва направо) через цю точку похідна змінює знак з «+» на «-» то в точці $x = x_0$ функція має максимум, якщо навпаки з «-» на «+» – функція має мінімум в точці $x = x_0$.

Схема дослідження функції на екстремум (за допомогою першої похідної):

1. знайти область визначення;
2. знайти першу похідну;
3. знайти стаціонарні точки;
4. стаціонарними точками поділити область визначення на інтервали, в яких функція буде зростати або спадати. Вибрати всередині кожного інтервалу точку та перевірити знак похідної в ній, якщо:

$f'(x) > 0$ – функція зростає;

$f'(x) < 0$ – функція спадає;

5. перевіряємо всі стаціонарні точки, для знаходження точок екстремуму, за такою схемою:

- стаціонарна точка повинна належити області визначення функції;
- при переході через дану точку, перша похідна змінює знак.

В підсумку варто зазначити, що кожна точка екстремуму є стаціонарною точкою, але не кожна стаціонарна точка є точкою екстремуму. Тобто точки екстремуму слід шукати із переліку стаціонарних.

Досліджувати функцію на екстремум можна також за допомогою другої похідної. Нехай функція $y = f(x)$ два рази диференційована в околі точки x_0 і $f'(x_0) = 0$. Тоді в точці $x = x_0$ функція має локальний максимум, якщо $f''(x_0) < 0$ і локальний мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

Якщо ж $f''(x_0) = 0$, тоді точка x_0 може не бути точкою екстремуму.

Схема дослідження функції на екстремум (за допомогою другої похідної):

1. Знайти область визначення.
2. Знайти першу похідну.
3. Знайти критичні точки функції.
4. Знайти другу похідну.
5. Обчислити другу похідну в кожній критичній точці.
6. Вказати точки екстремуму.
7. Обчислити екстремуми – значення функції в точках екстремуму.

Розглянемо приклади, які пропонуються в підручнику для 10 класу профільного рівня авторами Мерзляк, Полонський, Номіровський та Якір.

Приклад 1.3.2. Знайдіть проміжки зростання, спадання та точки екстремуму функції

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}.$$

Розв'язання. Користуємось схемою для знаходження точок екстремуму.

1) Область визначення: $x + 2 \neq 0$, тоді $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;

$$2) f'(x) = \frac{(2x-6)(x+2) - (x^2-6x) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2};$$

$$3) \frac{(x-2)(x+6)}{(x+2)^2} = 0;$$

$x_1 = 2$; $x_2 = -6$ – критичні точки;

при $x = -2$, $f'(x)$ не існує – не критична точка;

4) Ділимо область визначення на інтервали точками 2 та -6 та перевіряємо знак похідної в кожному інтервалі.

Отже, функція зростає на $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$ і спадає на $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$. При переході

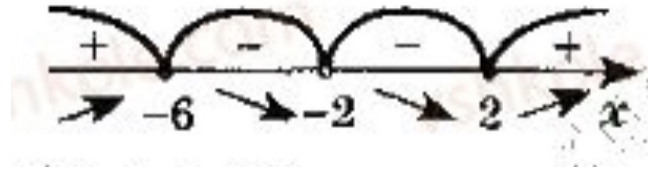


Рис. 4: приклад 1.4.2.

через точку $x = -6$ похідна змінює знак з «+» на «-», тому це точка максимуму, точка $x = 2$ є точкою мінімуму, в ній похідна змінює знак з «-» на «+».

Відповідь. $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$ – проміжок зростання; $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$ – проміжок спадання; $x_{\max} = -6$; $x_{\min} = 2$.

Приклад 1.3.3. Розбийте число 180 на три таких невід’ємних доданки, щоб два з них відносились як 1:2, а добуток усіх доданків був найбільшим.

Розв’язання. Нехай x – перше число, тоді $2x$ – друге число, а $(180 - 3x)$ – третє.

Розглянемо функцію $f(x) = x \cdot 2x \cdot (180 - 3x)$ – ця функція представляє добуток трьох невідомих чисел. Потрібно знайти її максимум.

Область визначення $[0; 180]$;

$f'(x) = (360x^2 - 6x^3)' = 720x - 18x^2$; Знайдемо критичні точки: $720x - 18x^2 = 0$; $18x(40 - x)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 40$. Критичні точки належать області визначення. Знайдемо значення функції у цих точках та на кінцях відрізка.

$f(0) = 0$; $f(180) = 2 \cdot 180^2(180 - 3 \cdot 180) < 0$; $f(40) = 2 \cdot 40^2(180 - 3 \cdot 40) = 192000$.

$\max f(x) = 192000$. Отже, 40 – перше число, 80 – друге, 60 – третє.

Відповідь. $180 = 40 + 80 + 60$.

Приклад 1.3.4 (задача оптимізації) Пункти A , B та C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ACB ($\angle ABC = 90^\circ$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A і C сполучає залізниця. У яку точку відрізка AC слід провести ґрунтову дорогу з пункту B , щоб час перебування у дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтовою дорогою – 20 км/год?

Розв’язування. Нехай N – невідома точка на відрізку AC . Тоді позначимо через x (км) – довжину відрізка CN .

Розглянемо трикутник CBN ($\angle NCB = 90^\circ$). Запишемо довжину сторони BN :

$$BN^2 = CN^2 + CB^2 = x^2 + 60^2; BN = \sqrt{x^2 + 3600}.$$

Оскільки $AC = 285$ км, то $AN = (285 - x)$ км.

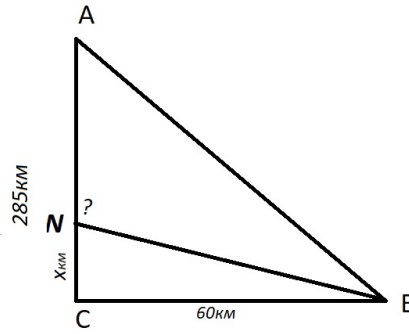


Рис. 5: приклад 1.4.3.

Щоб дістатись з пункту A до B потрібно пройти два шляхи: ґрунтовою дорогою та залізницею. Запишемо скільки потрібно ця цього часу, оскільки відстань та швидкість відомі.

$t = \frac{\sqrt{x^2+3600}}{20} + \frac{285-x}{52}$. Ми будемо для функції $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3600}}{20} + \frac{285-x}{52}$ шукати мінімум.

Область визначення $[0; 285]$;

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = -\frac{1}{52} + \frac{2x}{20 \cdot 2\sqrt{x^2 + 3600}} = \frac{-40\sqrt{x^2 + 3600} + 104x}{2080\sqrt{x^2 + 3600}};$$

Шукаємо критичні точки, для цього $f'(x) = 0$

$$\frac{-40\sqrt{x^2 + 3600} + 104x}{2080\sqrt{x^2 + 3600}} = 0,$$

$$-40\sqrt{x^2 + 3600} + 104x = 0;$$

$$-40\sqrt{x^2 + 3600} = -104x;$$

$$10\sqrt{x^2 + 3600} = 26x;$$

$$100(x^2 + 3600) = 676x^2;$$

$$676x^2 - 100x^2 = 360000;$$

$$576x^2 = 360000;$$

$$x^2 = 625$$

$$x_1 = 25; x_2 = -25$$

x_2 – не задовільняє умови задачі, тому $x = 25$.

Відповідь. Для найменшого часу перебування у дорозі точку потрібно покласти на відстані 25км від точки C .

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У даному розділі проведено аналіз та дослідження методів та технік, які вивчаються учнями для пошуку мінімумів та максимумів функцій. Основні висновки з цього розділу наступні:

Вивчення методів дослідження функцій на екстремум ґрунтується на математичних концепціях, зокрема, на похідних та аналізі змін функцій у точках, де вони досягають мінімуму або максимуму.

Вміння досліджувати функції на екстремум є важливим як для навчального процесу, так і для розвитку аналітичних навичок учнів. Це надає можливість застосовувати математичні знання у реальних завданнях та проблемах.

Методи пошуку мінімумів та максимумів функцій широко використовуються в наукових дослідженнях, інженерії, економіці, фізиці та інших галузях. Вони допомагають оптимізувати рішення та знаходити оптимальні значення.

Учні, які вивчають дослідження функцій на екстремум, розвивають практичні навички аналізу, моделювання та розв'язування завдань. Ці навички корисні в подальшому навчанні та професійній діяльності.

Вивчення цього розділу математики сприяє розвитку критичного мислення та математичної компетентності учнів, а також надає основи для подальших досліджень та розвитку в галузі науки та технологій.

Отже, питання дослідження функцій на екстремум в профільній школі посідає одне з перших місць в навчальному процесі профільних шкіл, готуючи учнів до розв'язання реальних завдань та розвитку аналітичних навичок, які будуть корисні в їхньому подальшому навчанні та професійній діяльності.

РОЗДІЛ 2

ВИКОРИСТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ В ЕКОНОМІЦІ

Для успішності будь-якої підприємницької діяльності, основним завданням є встановлення оптимального відношення між витратами та досягнутими результатами. Оптимізаційні задачі в економіці ставлять за мету знаходження найкращого рішення, враховуючи певний критерій (критерії) та обмеження, і вирішуються за допомогою математичних моделей і методів математичного програмування.

Сучасна економіка вимагає раціонального використання різних ресурсів та прийняття оптимальних рішень в умовах обмежень. Оптимізація, як математичний підхід, стала необхідною складовою аналізу та планування в економіці.

Оптимізаційні задачі в економіці включають в себе пошук оптимальних рішень для максимізації прибутку, мінімізації витрат, розподілу ресурсів та багато інших важливих завдань. Вони застосовуються в різних галузях, включаючи фінанси, виробництво, логістику, маркетинг, торгівлю та інші.

У цьому розділі ми розглянемо різні аспекти використання оптимізаційних задач в економіці. Ми дослідимо приклади практичного застосування оптимізації для вирішення конкретних економічних завдань, а також розглянемо основні методи та інструменти, які допомагають економістам та менеджерам приймати обґрунтовані рішення.

Оптимізація в економіці допомагає підвищувати ефективність виробництва, управління ресурсами, планування та прийняття рішень, що має велике значення для стабільності та успішності підприємств та галузей. Далі ми дослідимо різні аспекти цього важливого питання та розкриємо можливості оптимізації в економіці.

Особливістю задач математичного програмування є те, що до них не завжди можна застосувати класичні методи дослідження на екстремум. Інша їхня особливість пов'язана із розміром задач практичного характеру. Зазвичай, в практичних задачах велика кількість змінних та обмежень і аналізувати кожну стаціонарну точку на екстремум просто неможливо.

Враховуючи ці дві особливості, метою математичного програмування є саме пошук ефективних методів розв'язування задач оптимізації.

2.1. Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції

У сучасному світі, де економічна діяльність відіграє важливу роль, прийняття обґрунтованих рішень є вирішальним фактором для досягнення успіху у бізнесі та управлінні ресурсами. Однією з ключових задач є оптимізація виробництва, використання ресурсів та прийняття рішень на основі аналізу функцій, які відображають економічні процеси. Підприємства, фінансові установи та інші економічні агенти використовують задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функцій для досягнення оптимальних результатів.

Формалізація оптимізаційних задач в економіці включає в себе визначення цілі, обмежень та змінних, які використовуються для моделювання конкретної ситуації або проблеми. Цей процес дозволяє перетворити економічну задачу на математичну форму, яку можна аналізувати та вирішувати за допомогою методів оптимізації. Ось як виглядає формалізація оптимізаційних задач в економіці:

Ціль (функція цілі): Це математична функція, яка визначає те, що потрібно максимізувати чи мінімізувати в рамках економічної задачі. Зазвичай це функція вартості, прибутку, користі чи іншого важливого показника.

Обмеження: Це умови, які обмежують діапазон можливих значень для змінних задачі. Обмеження можуть бути технічними, фінансовими, часовими чи іншими. Обмеження відображають реальні умови та обставини економічної ситуації.

Змінні: Це параметри, які можуть змінюватися в межах задачі для досягнення оптимального результату. Ці змінні можуть представляти кількість продукції, ціни товарів, обсяги виробництва, кількість ресурсів тощо.

Формалізація задачі: Оптимізаційна задача може бути сформульована у вигляді математичної моделі. Наприклад, задачу на максимізацію прибутку можна сформулювати як:

Максимізувати функцію прибутку $P(x)$ за умови, що обмеження $A(x) \leq b$ та x належить деякому діапазону значень.

де x - вектор змінних (наприклад, обсяг виробництва товару), $P(x)$ - функція прибутку (цільова функція), $A(x)$ - матриця обмежень, b - вектор обмежень.

Методи розв'язання: Для розв'язання сформульованих оптимізаційних задач існують різні методи. Аналітичні методи включають знаходження аналітичних похідних функції цілі та врахування умов для знаходження точок екстремуму. Чисельні методи, такі як методи градієнтного спуску, методи Нелдера-Міда, алгоритми динамічного програмування, використовуються для складних задач, де аналітичне розв'язання може бути недоцільним чи неможливим.

Розглянемо деякі з основних застосувань задач на знаходження найбільшого та найменшого значень функції в економіці:

1. *Максимізація прибутку*: Однією з основних задач у бізнесі є максимізація прибутку. Задачі на знаходження максимуму функцій допомагають визначити оптимальні рішення щодо обсягів виробництва, цін, реклами, витрат тощо, які призведуть до максимального прибутку.

2. *Мінімізація витрат*: Управління витратами є ключовим аспектом ефективного ведення бізнесу. Задачі на знаходження мінімуму функцій дозволяють визначити оптимальний розподіл ресурсів, щоб знизити витрати при заданих умовах.

3. *Ціноутворення*: Прийняття рішення щодо встановлення цін на товари та послуги вимагає аналізу попиту, конкуренції та витрат. Задачі на знаходження максимуму або мінімуму функцій допомагають знайти оптимальну цінову політику для максимізації прибутку або покриття витрат.

4. *Управління запасами*: Для багатьох компаній оптимальне управління запасами є важливим аспектом. Задачі на знаходження мінімуму функцій допомагають знайти оптимальний рівень запасів, який забезпечує попит та мінімізує витрати на зберігання.

5. *Оптимальне управління портфелем інвестицій*: Управління фінансовими ресурсами та інвестиціями вимагає знаходження балансу між доходами та ризиками. Задачі на знаходження максимуму функцій допомагають визначити оптимальний розподіл інвестицій для досягнення максимального доходу або мінімізації ризиків.

6. *Оптимізація виробництва*: У виробничому середовищі задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функцій використовуються для планування обсягів виробництва, вибору оптимальних технологій, розподілу робочої сили та витрат.

7. *Управління ризиками*: Задачі на знаходження найменшого значення функцій використовуються для визначення оптимальних стратегій управління ризиками, які допомагають знизити можливі збитки та негативні наслідки.

Ці застосування лише декілька з багатьох можливих в економіці. Наведемо декілька прикладів розв'язування таких задач. Для їхнього розв'язання використаємо похідну. Похідна - це основний інструмент для дослідження функції на екстремум. Економічний сенс похідної полягає в швидкості зміни деякого економічного процесу з плином часу або щодо іншого досліджуваного фактора.

Значна кількість виробничих та господарських задач зводиться до знаходження найбільшого чи найменшого значення певної функції на певному відрізку. Зокрема, це стосується прикладних виробничих задач з професійної діяльності спеціаліста економічного профілю.

Прикладом може бути задача про максимізацію прибутку бізнесу. Розглянемо виробника товарів. Його прибуток визначається як різниця між доходами та витратами. Якщо доходи визначаються функцією $R(x)$, де x - кількість одиниць товару, а витрати - функцією $C(x)$, то прибуток позначається як

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Для знаходження максимального прибутку ми шукаємо значення x , при якому похідна $P'(x)$ дорівнює нулю. Це означає, що в даній точці прибуток максимальний. Таким чином, похідна допомагає визначити оптимальну кількість товару для виробництва.

Розглянемо конкретні приклади розв'язання задач оптимізації в економіці.

Приклад 2.1.1. Ви виробляєте та продаєте товари. Витрати на виробництво задаються формулою: $C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 400$, а функція доходу: $R(Q) = 100Q - Q^2$. Q -кількість проданого товару. Знайти оптимальну кількість товару, яку вам слід виробити та продавати, щоб максимізувати прибуток.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі використаємо формулу прибутку:

$$P(Q) = R(Q) - C(Q).$$

$$\text{Тоді } P(Q) = 100Q - Q^2 - (Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 400) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 400;$$

$$P(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 400 \rightarrow \max;$$

$$P'(Q) = -3Q^2 + 72Q - 69;$$

Знайдемо критичні точки: $P'(Q) = 0$;

$$-3Q^2 + 72Q - 69 = 0;$$

$$Q_1 = 23; Q_2 = 1;$$

4) Ділимо область визначення на інтервали точками 1 та 23 та перевіряємо знак похідної в кожному інтервалі.

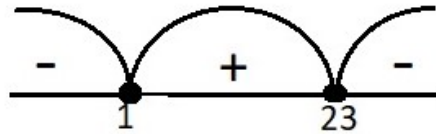


Рис. 6: приклад 1.4.2.

Отже, оптимальна кількість товару $Q = 23$ для максимізації прибутку, тоді максимальний прибуток буде становити $P(Q)_{max} = P(23) = 4890$ ум.од.

Приклад 2.1.2. Фірма планує випускати електродвигуни. На основі проведених досліджень було знайдено залежність попиту q від ціни p (грн.) одного двигуна:

$$q = 100000 - 200p,$$

де q – це кількість електродвигунів для продажу за рік, шт.

Витрати фірми на випуск q електродвигунів становлять (функція вартості):

$$C(q) = (150000 + 100q + 0,003q^2) \text{ грн.}$$

Потрібно розрахувати дохід від продажу електродвигунів та визначити його оптимальне значення. Розв'язання. Валовий дохід

$$R = pq.$$

Запишемо функцію p у вигляді функції аргументу q , з формули $R = pq$ знаходимо

$$p = 500 - 0,005q.$$

Отже, валовий дохід залежить від кількості q електродвигунів так: $R(q) = q(500 - 0,005q)$ грн.

Якщо вирахувати з валового доходу $R(q)$ вартість двигуна, то отримаємо чистий дохід:

$$P(q) = R - C = 500q - 0,005q^2 - (150000 + 100q + 0,003q^2) = (-0,008q^2 + 400q - 150000).$$

Отримали функцію доходу

$$P(q) = -0,008q^2 + 400q - 150000.$$

Для знаходження точки екстремуму обчислимо першу похідну і прирівняємо її до нуля:

$$P'(q) = -0,016q + 400;$$

$$-0,016q + 400 = 0;$$

$$q = 25000.$$

$P''(q) = -0,016 < 0$. Отже, графік є опуклим донизу із точкою максимуму $q = 25000$, $P(q) = P(25000) = 4850000$.

Відповідь. Дохід від продажу електродвигунів $P(q) = -0,008q^2 + 400q - 150000$ грн. та оптимальне його значення 4850000 грн. досягається при продажі 25 000 електродвигунів за рік.

Приклад 2.1.3. Пекарня щотижня випікає q одиниць житнього хліба. Загальна вартість виготовлення цієї кількості q задана функцією $C = 100000 + 1500q + 0,2q^2$ (грн). Скільки одиниць хліба потрібно випікати, щоб мінімізувати середню вартість хліба?

Розв'язання. Для знаходження середньої вартості одиниці продукції, загальну вартість виготовлення ділять на кількість виготовленої продукції. Отже запишемо функцію (математичну модель) середньої вартості випікання одного хліба:

$$f(q) = \frac{C}{q} = \frac{100000 + 1500q + 0,2q^2}{q} = \frac{100000}{q} + 1500 + 0,2q.$$

Досліджуємо функцію на екстремум.

$f'(q) = -100000q^{-2} + 0,2$, прирівнюємо похідну до нуля і отримаємо

$$q^2 = \frac{100000}{0,2} = 500000.$$

Тобто $q = 707,11$ (од).

За допомогою другої похідної перевіримо критичну точку:

$$f(q) = 200000q^{-3}; f(707, 11) = 0,00056 > 0.$$

Отже, мінімум середньої вартості хліба досягнеться при $q = 707$ одиниць щотижня.

Приклад 2.1.4. Відстань від головного складу, який розміщений в пункті K , до магазину дорівнює 50 км, а до автомагістралі, яка проходить повз магазин – 30 км. Під яким кутом x до автомагістралі слід побудувати ґрунтову дорогу, щоб вартість перевезення вантажу між та була найменшою? Відомо, що вартість перевезення по автомагістралі вдвічі менша, ніж по ґрунтовій дорозі.

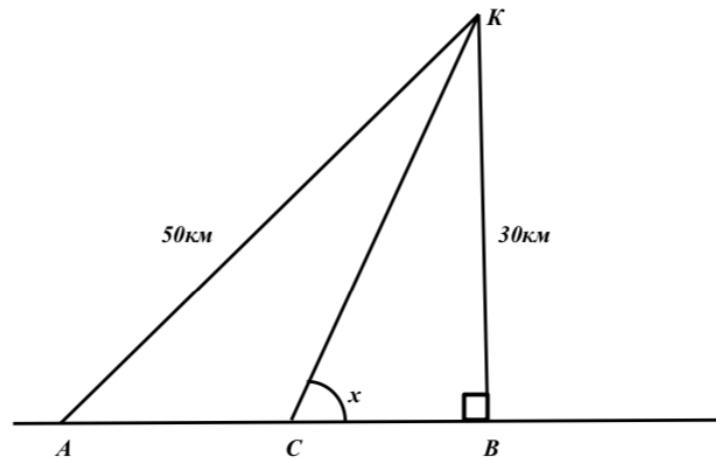


Рис. 7: приклад 2.1.4.

Розв'язання. Перевезення будуть відбуватися по ламаній KCA , тому складемо функцію $P = f(x)$, яка залежить від кута x та показує вартість перевезення. Нехай:

p – це вартість 1км перевезення по автомагістралі;

$2p$ – це вартість 1км перевезення по ґрунтовій дорозі.

Тоді загальна вартість перевезення по ламаній KCA : $P = 2p \cdot CK + p \cdot AC$.

Розглянемо трикутник CKB . Він прямокутний, тому виразимо CK та AC через кут x :

$$CK = \frac{KB}{\sin x} = \frac{30}{\sin x}, \quad CB = KB \cdot \operatorname{ctg} x = 30 \cdot \operatorname{ctg} x$$

За теоремою Піфагора, з прямокутного трикутника AKB :

$$AB = \sqrt{AK^2 - KB^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = 40,$$

оскільки $AC = AB - CB = 40 - 30 \cdot ctgx$, то матимемо шукану функцію:

$$P(x) = 2p \frac{30}{\sin x} + p(40 - 30ctgx)$$

Знайдемо обмеження для x . Очевидно, що точка C може займати будь-яке місце на відрізку AB . Якщо вона співпадає з точкою B , то $x = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$. А якщо вона співпадає з точкою A , то $x = \angle KAB$. З трикутника KAB :

$$\angle KAB = \arccos \frac{AB}{AK} = \arccos \frac{40}{50} = \arccos 0,8$$

Отже, найменше значення цільової функції будемо шукати на відрізку $[\arccos 0,8; \frac{1}{2}\pi]$. Далі досліджуємо функцію на екстремум згідно схеми. 1) Похідна:

$$P' = \left(\frac{60p}{\sin x} + 40p - 30p \cdot ctgx \right)' = \frac{-60p \cdot x}{\sin^2 x} + \frac{30p}{\sin^2 x} = \frac{30p - 60p \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

2) Критичні точки:

$$\begin{cases} 30p - 60p \cdot \cos x = 0, \\ \sin^2 x \neq 0, \end{cases}$$

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

З усіх точок тільки одна $x = \frac{\pi}{3}$ належить відрізку $[\arccos 0,8; \frac{1}{2}\pi]$.

3) Знайдемо значення функції на кінцях відрізка $[\arccos 0,8; \frac{1}{2}\pi]$ та в критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$:

$$f(\arccos 0,8) = \frac{60p}{\sqrt{1-0,8^2}} + 40p - \frac{30p \cdot 0,8}{\sqrt{1-0,8^2}} = 60p + 40p = 100p;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{60p}{1} + 40p - 30p \cdot 0 = 100p;$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{60p}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 40p - \frac{30p}{\sqrt{3}} = 40p + \frac{90p}{\sqrt{3}}.$$

Бачимо, що найменшого значення на відрізку $[\arccos 0,8; \frac{1}{2}\pi]$ функція набуває при $x = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Отже, вартість перевезення між A та K буде найменшою при $x = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

2.2. Задачі лінійного програмування. Графічне розв’язування задач лінійного програмування. Приклади

Задачі оптимізації, мета яких полягає в знаходженні найкращого значення лінійної функції (максимізації чи мінімізації), враховуючи обмеження, які також задані лінійними рівняннями або нерівностями називають задачами лінійного програмування.

Задача на знаходження максимального чи мінімального значення функції $Z = \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2$,
із заданими обмеженнями

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 (\leq, =, \geq) b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 (\leq, =, \geq) b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 (\leq, =, \geq) b_3; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 (\leq, =, \geq) b_m. x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{array} \right.$$

є двовимірною задачею лінійного програмування (задача лінійного програмування з двома змінними).

Розв’язання лінійних задач складається з трьох основних кроків: складання математичної моделі задачі, що передбачає вибір змінних, формалізацію обмежень та визначення цільової функції. Важливо правильно обрати змінні та сформулювати обмеження, щоб математична модель відображала реальну суть завдання. Розв’язання сформульованої задачі з використанням відповідних методів. Аналіз отриманого оптимального рішення та інтерпретація результатів.

Для розв'язання лінійних програм зазвичай використовують два основних методи: графічний та симплекс-метод. Графічний метод базується на геометричних принципах і дозволяє знаходити оптимальний варіант на вершині області, обмеженої лінійними обмеженнями. Важливо відзначити, що графічний метод особливо корисний та цікавий для учнів, оскільки дозволяє візуалізувати задачу та покращує навички побудови графіків. Однак він застосовується тільки до двовимірних задач, оскільки для багатовимірних задач побудова відповідних графіків стає складною або навіть неможливою.

Розглянемо основні етапи розв'язування двовимірної задачі лінійного програмування графічним методом :

1. Побудова системи координат, в якій осі координат представляють значення змінних за-

дачі.

2. Побудова обмежень у вигляді прямих чи півплощин.
3. Знаходимо область, яка обмежена лініями. Ця область називається областю допустимих значень.
4. Побудова вектора $N = (c_1; c_2)$, який задає напрям зростання цільової функції.
5. Перпендикулярно до вектора $N = (c_1; c_2)$, будується пряма $\tilde{n}_1x_1 + \tilde{n}_2x_2 = const$.
5. Залежно від того, чи максимізуємо, чи мінімізуємо функцію, рухаємо пряму $\tilde{n}_1x_1 + \tilde{n}_2x_2 = const$ у напрямку вектора $N = (c_1; c_2)$ або в протилежному відповідно.
6. Визначаємо координати екстримальної точки та обчислюємо значення цільової функції в цій точці.

На прикладі деяких економічних задач розглянемо застосування графічного методу.

Приклад 2.2.1. Магазин хоче ліквідувати 180 сорочок та 100 пар штанів з минулого сезону. Магазин пропонує дві акції – X та Y. Акція X – це пакет з однієї сорочки та пари штанів, які продаються за 300 ум. од., акція Y – це пакет з трьох сорочок та пари штанів, які продаються за 500 ум. од. Магазин не хоче продавати менше 20 пакетів по акції X та менше 10 по акції Y. Потрібно вказати оптимальну кількість пакетів, які слід продати, щоб максимізувати прибуток від рекламної акції.

Розв'язування.

Нехай:

x – кількість пакетів акції X,

y – кількість пакетів акції Y.

Метою є максимізувати прибуток. Прибуток розраховується, як сума виручки від продажу пакетів X та Y, тоді

$$P = 300x + 500y.$$

Це і є наша функція, яку потрібно максимізувати.

Також маємо обмеження:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 180; \\ x + y \leq 100; \\ x \geq 20, y \geq 10 \end{cases}$$

Будуємо систему координат, в якій осі координат представляють значення змінних задачі x та y .

Будуємо обмеження у вигляді прямих.

Знаходимо область, яка обмежена лініями. Ця область є областю допустимих значень.

Побудуємо вектор $N = (300; 500)$, який задає напрям зростання цільової функції.

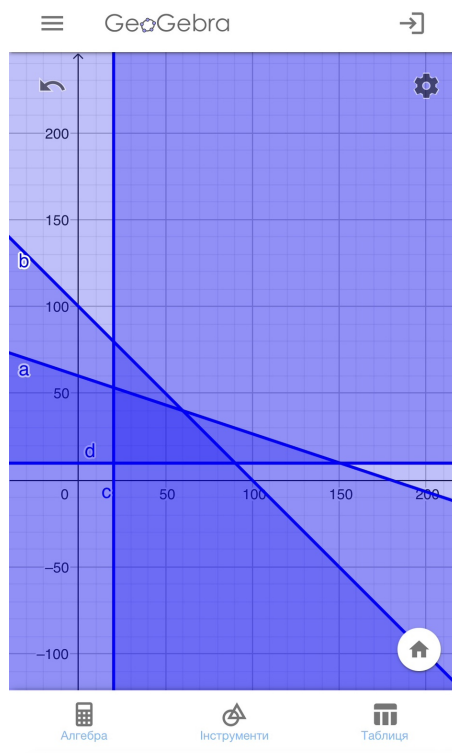


Рис. 8: Область допустимих значень

Перпендикулярно до вектора $N = (300; 500)$, будуємо пряму. Оскільки, нам потрібно знайти максимальне значення, то рухаємо прямою у напрямку вектора. Та знаходимо точку $D = (60, 40)$, яка і є точкою максимуму.

Знайдемо значення прибутку в цій точці $P(D) = 300 \cdot 60 + 500 \cdot 40 = 38000$ у.о. одиниць. Відповідь. Максимальний прибуток 38000 у.о. одиниць досягнеться за умови, що пакетів акції X буде продаватись 60, а пакетів акції Y – 40.

Розглянемо іншу задачу.

Приклад 2.2.2. Виробництво спеціалізується на пошитті жіночих суконь, зокрема цього сезону воно випускає два види суконь – A та B . Сукні обох видів виготовляються на двох швейних машинах (для шиття та оверлог). Тривалість обробки однієї сукні кожної моделі подано в таблиці.

Від продажу даних суконь виробництво отримує прибуток 50 у.о. одиниць від моделі A та 30 у.о. одиниць від моделі B . Фірма не може продавати більше 80 суконь моделі B

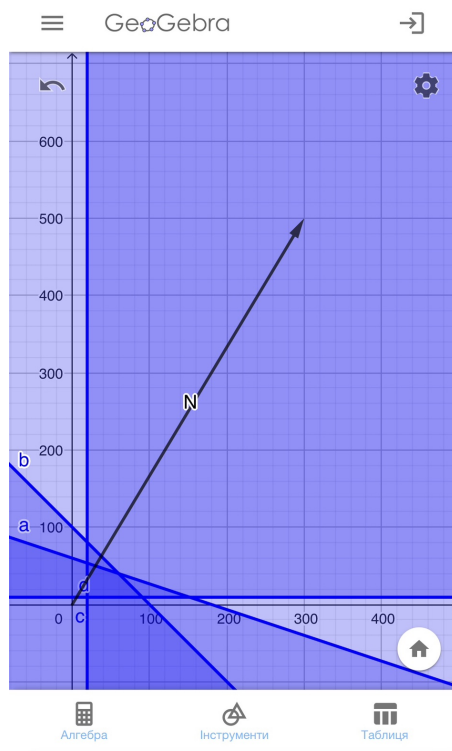


Рис. 9: Вектор $N = (300; 500)$

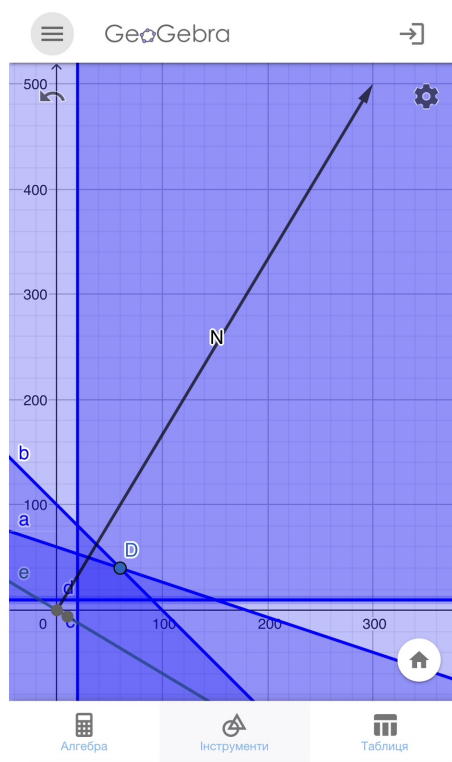


Рис. 10: Пряма, перпендикулярна вектору N

Швейні машини	Тривалість обробки сукні моделі, хв		Ресурс робочого часу машин, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Рис. 11: Приклад 2.2.2.

на тиждень, а також не хоче щоб продаж моделі A перевищував продаж моделі B більше ніж на 30 одиниць. Потрібно визначити обсяги виробництва суконь двох моделей, щоб прибуток був максимальним.

Розв’язання. Побудуємо економіко-математичну модель поставленої задачі та графічним методом розв’яжемо її.

Нехай x_1 – це кількість суконь моделі A , яку потрібно виготовляти за тиждень;

x_2 – це кількість суконь моделі B , яку потрібно виготовляти за тиждень.

Цільова функція $Z_{max} = 50x_1 + 30x_2$ – максимум прибутку фірми від реалізації продукції.

Також за умовою задачі є обмеження:

$30x_1 + 15x_2 \leq 2400$ (хв) – тривалість роботи швейної машини 1

$12x_1 + 26x_2 \leq 2160$ (хв) – тривалість роботи швейної машини 2

$x_1 - x_2 \leq 30$; $x_2 \leq 80$ – обмеження на попит.

Загалом економіко-математична модель цієї задачі має вигляд:

Знайти $Z_{max} = 50x_1 + 30x_2$ згідно умов

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; \\ x_1 - x_2 \leq 30; \\ x_1 \geq 0; 0 \leq x_2 \leq 80. \end{cases}$$

Згідно зі схемою розв’язання лінійних задач графічним методом, на першому кроці нам потрібно побудувати графік та зобразити на ньому всі обмеження у вигляді півплощин. Цим ми знайдемо таку область, де виконуються всі обмеження даної моделі.

Обмеження $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ вказують на те, що наша область знаходиться у першому квадранті. Зобразивши наступні обмеження, отримали переріз усіх півплощин, який і є областю допустимих значень для задачі. Виділимо шестикутник $OABCDE$ (рис. 11). Із цієї області нам потрібно вибрати таку точку, в якій цільово функція набуває найбільшого значення, тобто значення найбільшого прибутку фірми.

Побудуємо вектор $N = (50, 30)$, де координати вектора – це коефіцієнти при змінних у функції Z . Напрямок вектора – напрям збільшення значення цільової функції (збільшення прибутку).

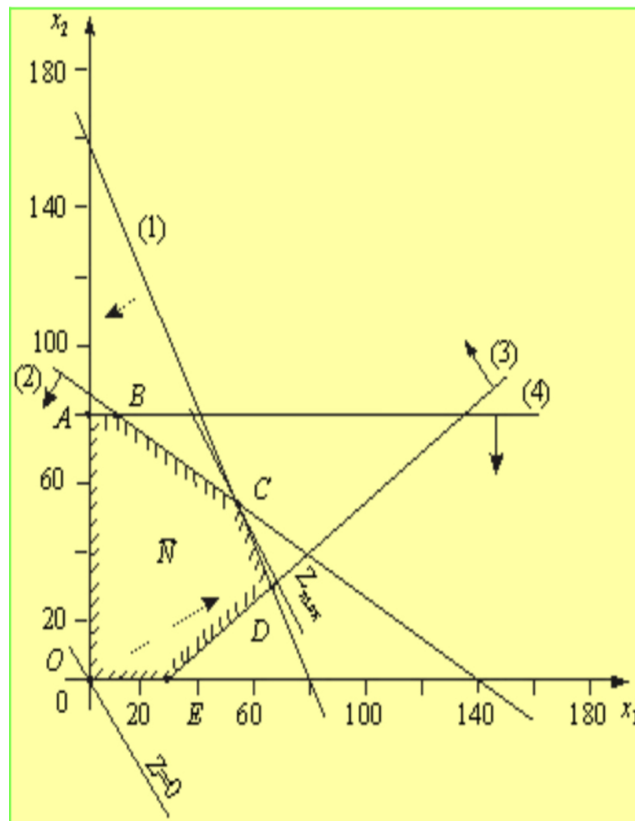


Рис. 12: Область допустимих розв'язків задачі 2.2.2.

Побудуємо пряму, яка є перпендикулярною вектору $N = (50, 30)$, $50x_1 + 30x_2 = 0$. Пряма проходить через початок координат. Тоді щоб знайти максимальне значення пересуваємо паралельно самій собі дану пряму у напрямку зростання цільової функції, тобто у напрямку вектора $N = (50, 30)$. Робимо це до того часу, як визначимо вершину шестикутника, яка і буде найбільшим значенням. На рис.11 можемо побачити, що такою точкою є точка C . Оскільки точка C є перетином двох прямих, то її координати знайдемо розв'язавши систему рівнянь :

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; \end{cases}$$

І отримали координати точки $C(50, 60)$, тобто $x_1 = 50, x_2 = 60$. Знайдемо значення цільової функції в цій точці $F_{max} = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$. Відповідь. Для того щоб виробництво отримало максимальний прибуток, а саме 4300 у. о., потрібно виготовляти 50 моделей сукні A та 60 моделей сукні B кожного тижня.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Використання оптимізаційних задач в економіці підкреслює важливість математичного моделювання, що дозволяє аналізувати складні економічні взаємодії та приймати обґрунтовані рішення на основі об'єктивних даних. Оптимізація стає ключовим інструментом для управління на всіх рівнях - від менеджменту підприємств до урядових інстанцій. Вона сприяє підвищенню продуктивності праці, зниженню витрат і оптимізації виробничих процесів, що призводить до зростання прибутковості та ефективності господарської діяльності.

Оскільки умови ринку постійно змінюються, використання оптимізаційних задач стає постійною необхідністю. Економісти та менеджери повинні постійно вдосконалювати свої методи та аналізувати нові технології для досягнення оптимальних результатів.

Крім того, вивчення математичних задач на факультативних заняттях може зробити математику цікавішою та практичнішою для учнів, заохочуючи їх досліджувати нові концепції та методи. Оптимізація має широке застосування у світі бізнесу, науки та інженерії. Учні, які вивчають цей предмет, можуть мати перевагу при виборі майбутньої кар'єри.

Вивчення оптимізаційних задач в економіці на факультативних заняттях розширює горизонти знань учнів та підготовлює їх до вирішення складних завдань та прийняття обґрунтованих рішень як у навчанні, так і в майбутньому житті. У підсумку, використання оптимізаційних задач в економіці є ключовим інструментом для досягнення ефективності, прибутковості та сталого розвитку. Воно сприяє раціональному управлінню ресурсами та допомагає вирішувати економічні завдання в умовах зростаючої складності та змін.

РОЗДІЛ 3

РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТТЯ

3.1. Факультативне заняття за темою: «Похідні функції та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки»

Згідно із новим державним стандартом шкільної освіти в сучасному підході до освітнього процесу перевага надається розвитку ключових компетентностей, критичного мислення, творчості та саморегуляції учнів.

Компетентнісний підхід в шкільній освіті - це педагогічна філософія та методологія, яка акцентує увагу на розвитку конкретних навичок, знань і вмінь (компетентностей), необхідних для ефективного функціонування в сучасному суспільстві. Основною ідеєю компетентнісного підходу є підготовка учнів до реального життя та роботи, а не просто передача теоретичних знань.

Основні характеристики компетентнісного підходу включають:

Орієнтація на результат. Учні вивчають не тільки факти і теоретичні знання, але і навчаються застосовувати ці знання у різних ситуаціях.

Інтердисциплінарність. Підхід сприяє поєднанню знань з різних предметних областей для розв'язання складних проблем.

Активне навчання. Учні активно залучаються до процесу навчання через практичні завдання, проекти, дослідження і взаємодію з іншими.

Розвиток ключових компетентностей. Зокрема, це включає навички критичного мислення, розв'язання проблем, комунікації, креативності та інші, які важливі для успіху в сучасному суспільстві.

Оцінювання на основі компетентностей. Оцінки не тільки базуються на знаннях, але і на здатностях учнів використовувати ці знання у практичних завданнях.

Самостійність і саморегуляція. Учні навчаються самостійно вирішувати завдання, встановлювати цілі та контролювати свій власний навчальний процес.

Компетентнісний підхід спрямований на підготовку учнів до функціонування в сучасному інформаційному та глобальному суспільстві, де набуває важливості не лише засвоєння фактів, але й здатність використовувати їх в практичних ситуаціях. Математична компетентність відіграє важливу роль в загальному розвитку особистості, оскільки математика є ключовим інструментом у розвитку логічного мислення, розв'язанні завдань і

прийнятті рішень в різних сферах життя. Вона також є невід'ємною частиною освіти та готує учнів до викликів і можливостей сучасного світу.

Математична компетентність - це здатність особи розуміти, застосовувати та аналізувати математичні концепції, методи та процедури для розв'язання різноманітних завдань та проблем у реальних життєвих ситуаціях. Ця компетентність включає в себе декілька ключових аспектів: розуміння математичних концепцій, застосування математичних методів, критичне мислення, проектна діяльність, робота з технологіями.

Для досягнення успіху на факультативних заняттях з задач оптимізації, вчителю рекомендується враховувати наступні підходи та стратегії:

1. Чітка постановка мети і цілей: Спочатку визначте, які саме компетентності та навички ви хочете розвинути у своїх учнів на цих заняттях. Сформулюйте чіткі цілі та очікувані результати.
2. Практичні завдання і приклади: Зосередьте увагу на розв'язанні реальних економічних задач та оптимізаційних завдань. Використовуйте приклади, які відображають сучасні економічні ситуації та проблеми. Пояснюйте, як оптимізація використовується в сучасному економічному житті. Вказуйте на успішні приклади застосування оптимізаційних методів у бізнесі і економіці.
3. Інтерактивність і групова робота: Створіть сприятливу атмосферу для обговорення та співпраці. Дозвольте учням спільно розв'язувати задачі та обговорювати стратегії.
4. Застосування сучасних технологій: Використовуйте комп'ютерні програми та інтерактивні ресурси для вирішення оптимізаційних завдань. Це може зробити навчання більш захоплюючим і ефективним.
5. Стимулювання самостійності: Підтримуйте учнів у розвитку навичок самостійного пошуку та розв'язування задач. Давайте їм можливість вибирати проекти або завдання, які їх цікавлять.
6. Оцінка та зворотний зв'язок: Дотримуйтеся прозорої системи оцінювання та надавайте зворотний зв'язок учням щодо їхнього прогресу. Це може мотивувати їх до досягнення кращих результатів.
7. Постійна самоосвіта: Оскільки ця область постійно розвивається, беріть участь у професійних семінарах, вивчайте нові підходи та методи оптимізації. Для постійного розвитку педагога зараз у вільному доступі є все: онлайн-вебінари, курси, тренінги та інші цікаві заходи.

Важливо надати учням можливість зацікавитися матеріалом та показати, як математика і оптимізація можуть бути застосовані в реальному житті, а особливо в економічних сферах.

Однією із дієвих методик є групова робота. Робота в групах дозволяє учням обмінюватися ідеями та розвивати навички співпраці. Для результативної роботи в групах рекомендується звернути увагу на такі деталі:

1. організація груп: учнів поділяють на групи, зазвичай по 3-4 учні у кожній групі. Варто формувати групи так, щоб в кожній із них були представники різного рівня математичних знань. В такому випадку, учні мають можливість навчитися один від одного;
2. завдання для груп: кожна група отримує конкретну задачу оптимізації для розв'язання. Також альтернативою завдання, яке задає вчитель може бути створення групою завдання;
3. процес роботи: учні в групах обговорюють задачу та розробляють план її розв'язання. Кожен учень в своїй групі може виконувати певну роль, наприклад, один аналізує вхідні дані, другий обчислює похідні, третій виконує аналіз результатів тощо. Або ж можливий варіант щоб кожен учень всі етапи робив, після чого, членом однієї групи звіряють результати;
4. презентація та обговорення: представники кожної з груп презентують свої результати. Вони можуть робити це в будь-якому вигляді: короткий виклад розв'язання та результати, виступ із графіками, таблицями і звичайно з відповідями на запитання від інших учнів. Після презентації відбувається обговорення розв'язання, питання від класу та можливі шляхи покращення;
5. оцінювання: оцінка може включати правильність розв'язання, процес роботи в групі та індивідуальну роботу, знання основних означень та правил, відповіді на додаткові питання.

Зробити факультативне заняття більш захопливим та цікавим для учнів можуть інтерактивні завдання. Існує багато сайтів для створення різнотипних завдань. Для повторення основних означень з теми "Похідна можна використати інтерактивне завдання (вправа на LearningApps, додаток 1):

Схожі завдання можна використовувати і для домашнього завдання, як підготовку до контрольного оцінювання. Завдання такого типу допомагають краще засвоїти отримані знання та ще раз їх повторити.



Рис. 13: Вправа: Знайдіть всі слова

Оскільки використання похідної у задачах оптимізації є відносно складною темою та може завдавати значного навантаження на розумові здібності учнів під час факультативних занять, вчителі повинні активно розвивати методи підтримки інтересу та активності учнів протягом уроку. Тому на сьогодні існує тенденція включати в навчальний процес дидактичні ігри. Ці ігри можуть бути цікавими та заохочувати пасивних учнів до активної участі в уроках. Однією з переваг таких завдань у формі гри є те, що учні непомітно освоюють новий матеріал та принципи розв'язання задач. Важливо пам'ятати, що ігри повинні мати чисто навчальний характер і бути уважно впроваджені в навчальний процес. Вони можуть використовуватися для пояснення або закріплення математичних концепцій. Прикладом гри, який може бути застосований під час факультативних занять з теми "Похідні функції та їх використання в задачах оптимізації в економіці" є гра "Вірю, не вірю де учні можуть виконувати завдання на перевірку правильності обчислення похідних.

Враховуючи вище описані підходи та стратегії, мною було розроблено факультативне заняття за темою «Похідні функції та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки». Розроблене факультативне заняття пройшло апробацію під час проходження практики у Ланчинському ліцеї ім. Юрія Шкрумеляка. Із спостережень, можна зазначити, що дана тема є важливою, оскільки похідна широко застосовується в задачах оптимізації, але одночас тема складна та на її вивчення в шкільному курсі відведено мала кількість годин. Відповідно учні погано орієнтуються в означеннях з цієї теми, а також губляться при розв'язуванні прикладів та задач, де потрібно використати похідну.

Конспект заняття

Тема: Похідні функцій та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки.

Мета навчальна: навчити учнів застосовувати концепцію похідної для розв'язання оптимізаційних задач в економіці та інших сферах, надати їм практичні навички з вико-

ристання математичних методів в реальних ситуаціях.

Мета розвивальна: розвивати аналітичне мислення та здатність до критичного аналізу, навички самостійного розв’язання складних завдань, збільшувати математичну компетентність учнів.

Мета виховна: Підкреслити важливість математичних знань у сучасному світі та заохочувати учнів до зацікавлення вивчення математики, показати, як математика може бути застосована в різних галузях життя і сприяти розвитку готовності до вивчення складних математичних концепцій.

Тип уроку: комбінований урок.

План

1. Організаційний момент (2 хв.)
2. Запровадження концепцій (15 хв.)
3. Розв’язування задач та вправ (25 хв.)
4. Підведення підсумків (3 хв.)

Хід уроку

1. *Організаційний момент*
2. *Запровадження концепцій.*

Для початку введемо означення похідної.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому інтервалі.

1. Зафіксуємо деяке значення аргументу x та відповідне значення функції $y = f(x)$
2. Надамо аргументові x будь-якого приросту Δx (приріст може бути і додатнім, і від’ємним).

Розглядаємо ще одне значення аргументу $x + \Delta x$ і знайдемо відповідне значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

3. Знайдемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4. Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5. Знайдемо границю цього відношення при $\Delta x \rightarrow 0$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує і вона скінченна:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

При обчисленні похідних функцій користуємось таблицею.

Таблиця похідних	
Похідні елементарних функцій	Похідні складених функцій
$C' = 0, \quad x' = 1; \quad (kx + b)' = k;$	$(ku + b)' = k \cdot u';$
$(x^n)' = nx^{n-1};$	$(u^n)' = nu^{n-1}u';$
$(e^x)' = e^x;$	$(e^u)' = e^u \cdot u';$
$(a^x)' = a^x \ln a;$	$(a^u)' = a^u \ln a u';$
$(\ln x)' = \frac{1}{x};$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u';$
$(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e;$	$(\lg u)' = \frac{1}{u} \lg e u';$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$
$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$
$(x^x)' = x^x (1 + \ln x)$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2};$
	$(u^u)' = u^u (1 + \ln u) u'$

Рис. 14: Таблиця похідних.

Згадаємо також означення зростаючої та спадної функції та означення точок екстремуму. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція *неспадна*, якщо виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною* на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція *незростаюча*, якщо виконується нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Максимум (max) функції $y = f(x)$ є у точці x_0 тоді, коли значення функції у цій точці більше, ніж її значення в усіх інших точках заданого інтервалу, що містить точку x_0 .

Мінімум (min) функції $y = f(x)$ є у точці x_0 тоді, коли значення функції у цій точці менше, ніж її значення в усіх інших точках заданого інтервалу, що містить точку x_0 .

Максимум та мінімум функції називаються *екстремумами* функції.

Схема дослідження функції на екстремум (за допомогою першої похідної):

1. знайти область визначення;
2. знайти першу похідну;
3. знайти стаціонарні точки;
4. стаціонарними точками поділити область визначення на інтервали, в яких функція буде зростати або спадати. Вибрати всередині кожного інтервалу точку та перевірити знак похідної в ній, якщо:
 - $f'(x) > 0$ – функція зростає;
 - $f'(x) < 0$ – функція спадає;
5. перевіряємо всі стаціонарні точки, для знаходження точок екстремуму, за такою схемою:
 - стаціонарна точка повинна належити області визначення функції;
 - при переході через дану точку, перша похідна змінює знак.

Досліджувати функцію на екстремум можна також за допомогою другої похідної. Нехай функція $y = f(x)$ два рази диференційована в околі точки x_0 і $f'(x_0) = 0$. Тоді в точці $x = x_0$ функція має локальний максимум, якщо $f''(x_0) < 0$ і локальний мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

Якщо ж $f''(x_0) = 0$, тоді точка x_0 може не бути точкою екстремуму.

Схема дослідження функції на екстремум (за допомогою другої похідної):

1. Знайти область визначення.

2. Знайти першу похідну.
3. Знайти критичні точки функції.
4. Знайти другу похідну.
5. Обчислити другу похідну в кожній критичній точці.
6. Вказати точки екстремуму.
7. Обчислити екстремуми – значення функції в точках екстремуму.

В підсумку варто зазначити, що кожна точка екстремуму є стаціонарною точкою, але не кожна стаціонарна точка є точкою екстремуму. Тобто точки екстремуму слід шукати із переліку стаціонарних.

Похідна - це основний інструмент для оптимізації. Вона вказує на швидкість зміни функції в певній точці.

Прикладом може бути задача про максимізацію прибутку бізнесу. Розглянемо виробника товарів. Його прибуток визначається як різниця між доходами та витратами. Якщо доходи визначаються функцією $R(x)$, де x - кількість одиниць товару, а витрати - функцією $C(x)$, то прибуток позначається як

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Для знаходження максимального прибутку ми шукаємо значення x , при якому похідна $P'(x)$ дорівнює нулю. Це означає, що в даній точці прибуток максимальний. Таким чином, похідна допомагає визначити оптимальну кількість товару для виробництва.

Для того, щоб перевірити чи засвоїли учні схему дослідження на точки екстремуму виконаємо інтерактивне завдання(додаток 1) , відсканувавши QR-код:



Рис. 15: Вправа: Розташуйте етапи у правильному порядку

3. Розв'язування задач і вправ.

Розглянемо задачу оптимізації, яку можна розв'язати за допомогою похідної.

Задача 1: Столярний цех виробляє певну кількість дерев'яних виробів x за ціною $p(x) = 50 - \frac{1}{10}x$, а сукупні витрати виробництва задаються функцією:

$$C(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800$$

Знайти оптимальний для цеха обсяг виготовлення товарів та відповідний йому максимальний прибуток.

Нехай $R(x)$ – валовий дохід, $P(x)$ – прибуток від продажу x одиниць продукції за ціною $p(x)$. Тоді

$$R(x) = x \cdot p(x);$$

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Для розв'язання задачі нам потрібно дослідити функцію $P(x)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для такого обсягу x випуску товарів, для якого

$P'(x) = 0, P''(x) < 0$. 1. Знайдемо критичні точки, розв'язавши рівняння $P'(x) = 0$.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 50x - \frac{1}{10}x^2 - \left(\frac{1}{50}x^2 + 14x + 800\right);$$

$$P(x) = -\frac{6}{50}x^2 + 36x + 800;$$

$$P'(x) = -\frac{12}{50}x + 36;$$

$$-\frac{12}{50}x + 36 = 0;$$

$$\frac{6}{25}x = 36;$$

$$6x = 36 \cdot 25;$$

$$x = 150.$$

2. Знаходимо $P''(x)$ та визначимо її знак при $x_0 = 150$. $P''(x_0) = -\frac{6}{25} < 0$

Отже, $x_0 = 150$ – точка максимуму, тому оптимальним обсягом виробництва є 150 одиниць столярних виробів. 3. Знайдемо яким буде максимальний прибуток виробництва.

$$P(150) = -\frac{6}{50} \cdot 150^2 + 36 \cdot 150 + 800;$$

$$P(150) = 1900.$$

Відповідь. Для столярного цеха оптимальним обсягом виготовлення товарів є 150 шт., тоді досягається максимальний прибуток 1900 ум. одиниць.

Задача 2

Задано функцію попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 0,5$, де q, s – обсяги товарів, а p – їхня ціна. Обчислити рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни.

Розв'язання. Рівноважна ціна – це ціна, при якій величина попиту дорівнює величині пропозиції. Знайдемо рівноважну ціну p за умови $q = s$.

$$q = \frac{p+8}{p+2} = p + 0,5;$$

$$p + 2 \neq 0, \text{ то } p \neq -2;$$

$$p + 8 = (p + 0,5)(p + 2);$$

$$p + 8 = p^2 + 2p + 0,5p + 1;$$

$$p + 8 = p^2 + 2,5p + 1;$$

$$p^2 + 2,5p + 1 - p - 8 = 0;$$

$$p^2 + 1,5p - 7 = 0;$$

Домножимо дане рівняння на 2:

$$2p^2 + 3p - 14 = 0;$$

Знайдемо його корені:

$$D = b^2 - 4ac;$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-14) = 9 + 112 = 121; \sqrt{D} = \sqrt{121} = 11;$$

$$p_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+11}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$p_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-11}{2 \cdot 2} = \frac{-14}{4} = -3,5; \text{ – сторонній розв'язок}$$

Отже, ми одержали, що рівноважна ціна $p = 2$ (умовних одиниць)

Знайдемо еластичність попиту за формулою:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot q'$$

$$\begin{aligned} E_2(q) &= \frac{p}{\frac{p+8}{p+2}} \left(\frac{p+8}{p+2} \right)' = \frac{p(p+2)}{p+8} \cdot \frac{(p+8)'(p+2) - (p+8)(p+2)'}{(p+2)^2} = \\ &= \frac{p}{p+8} \cdot \frac{(p+2) - (p+8)}{p+2} = \frac{p \cdot (p+2 - p - 8)}{(p+8)(p+2)} = \frac{-6p}{(p+8)(p+2)}. \end{aligned}$$

Знайдемо еластичність пропозиції за формулою:

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot \frac{ds}{dp} = \frac{p}{s} \cdot s'$$

$$E_p(s) = \frac{p}{p+0,5} \cdot (p+0,5)' = \frac{p}{p+0,5};$$

Якщо рівноважна ціна $p = 2$, одержимо:

$$E_2(q) = \frac{-6 \cdot 2}{(2+8)(2+2)} = \frac{-12}{40} = -0,3;$$

$$E_2(s) = \frac{2}{2+0,5} = 0,8.$$

Так як отримані значення еластичності за абсолютною величиною менше одиниці, то попит і пропозиція за рівноважною ціною нееластичні. А це значить, що зміна ціни

не спричинить різкої зміни попиту і пропозиції. Якщо ціна товару збільшиться на 1%, то попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція збільшиться на 0,8%.

Відповідь. $E_2(q) = -0,3$, $E_2(s) = 0,8$.

Задача 3

Фірма реалізує свою продукцію за ціною $p = 120$ ум. грошових одиниць за одиницю, а витрати виробництва при цьому визначаються функцією: $C(x) = 24x + 2x^3$. Знайти оптимальний для фірми обсяг випуску продукції та відповідальний йому прибуток.

Розв'язання. Нехай x – обсяг продукції, то функція прибутку фірми за умови виробництва x одиниць продукції:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

де $R(x)$ – дохід від реалізації;

$$R(x) = p \cdot x = 120x$$

Тому:

$$P(x) = 120x - (24x + 2x^3) = 120x - 24x - 2x^3 = 96x - 2x^3.$$

Знайдемо похідну та критичні точки:

$$P'(x) = 96 - 6x^2;$$

$$96 - 6x^2 = 0;$$

$$6x^2 = 96;$$

$$x^2 = 16.$$

$x_1 = 4$, $x_2 = -4$ – сторонній розв'язок.

$$P''(x) = -12x$$

$$P''(4) = -48 < 0$$

$P(x)$ має максимум при $x = 4$.

Так як фірма хоче отримати максимальний прибуток то вона випускатиме 4 одиниці продукту. Тобто ми з'ясували, що при ціні $p = 120$ ум. грошових одиниць, фірмі вигідно випускати для продажу 4 одиниці продукції.

Знайдемо прибуток:

$$P(4) = 96 \cdot 4 - 2 \cdot 4^3 = 384 - 2 \cdot 64 = 256 \text{ (ум. грошових одиниць)}.$$

Відповідь. Оптимальний для фірми обсяг випуску продукції становить 4 одиниці, при цьому її прибуток становитиме 256 ум. грошових одиниць.

Задача 4

Залежність між витратами виробництва фірми C (ум. грошових одиниць) та обсягом випуску продукції x (од) задається функцією $C(x) = 50x - 0,05x^3$. Визначити середні і граничні витрати витрати виробництва, якщо обсяг виробництва $x = 10$ одиниць.

Розв'язання.

$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ – функція середніх витрат.

$$\bar{C}(x) = \frac{50x - 0,05x^3}{x} = \frac{x(50 - 0,05x^2)}{x} = 50 - 0,05x^2.$$

Якщо $x = 10$, то середні витрати виробництва становлять

$$\bar{C}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 50 - 5 = 45 \text{ (ум. грошових одиниць)}.$$

Знайдемо граничні витрати виробництва

$$C'(x) = (50x - 0,05x^3)' = 50 - 0,15x^2.$$

Якщо $x = 10$, то граничні витрати виробництва становлять: $C'(x) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 50 - 15 = 35$ (ум. грошових одиниць).

Тобто, якщо середні витрати виробництва складають 45 умовних грошових одиниць, то граничні витрати (додаткові затрати) на виготовлення додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва $x = 10$ одиниць становлять 35 умовних грошових одиниць.

4. Підведення підсумків.

Рефлексія.

Домашнє завдання.

Задача (виробництво комп'ютерних програм):

Компанія розробляє комп'ютерні програми, які продаються за ціною $80 - \frac{1}{20}x$, де x - кількість проданих програм. Загальні витрати на розробку та виробництво програм складаються з фіксованих витрат у розмірі \$1000 та змінних витрат у розмірі $\frac{1}{100}x^2 + 8x + 400$. Знайдіть оптимальну кількість програм, яку компанія повинна виробити, і відповідний максимальний прибуток.

3.2. Використання засобів дистанційного навчання

Навчальний заклад, а зокрема і вчитель, повинен бути готовим і до дистанційного навчання. Особливо актуальним такий метод навчання став у зв'язку з пандемією COVID-19, коли навчальні заклади перейшли на цей метод навчання для забезпечення безпеки та здоров'я студентів та викладачів.

Дистанційне навчання – це метод навчання, при якому студенти та вчителі взаємодіють через Інтернет та інші технології, а не фізично в присутності один одного. Це включає в себе онлайн-лекції, завдання, опитування, відеоконференції та інше.

Враховуючи сьогоднішній досвід дистанційного навчання, школам рекомендується організувати єдиний підхід до дистанційної передачі даних різних предметів. Тобто вибрати одну платформу для дистанційного навчання, але водночас зручну та ефективну для учнів та вчителів. Існує безліч таких платформ, зокрема Google Classroom, Moodle, Blackboard, Canvas та інші.

Google Classroom – це хороша альтернатива платформи для дистанційного навчання та керування навчальними матеріалами. Вона надає вчителям та учням зручний спосіб організувати навчальний процес та спілкуватися в онлайн-середовищі. Вчителі можуть створювати віртуальні класи, додавати учнів і надавати доступ до навчального контенту. Google Classroom побудований на надійній інфраструктурі Google, що забезпечує стабільну роботу сервісу. Він інтегрований з іншими продуктами Google, такими як Google Диск, Google Документи та Gmail, що полегшує обмін і роботу з матеріалами. Також ця платформа дозволяє вчителям створювати завдання, виставляти оцінки та автоматично створює журнал успішності. Учні та вчителі можуть спілкуватися через коментарі, обговорення та відеоконференції. Google Classroom має додатки для мобільних пристроїв, що дозволяє користувачам отримувати доступ до матеріалів та завдань з будь-якого місця.

Для вище запропонованого конспекту факультативного заняття, мною було створено курс на платформі Google Classroom під назвою: «Похідні функцій та їх застосування до розв'язання задач оптимізації з економіки». Курс має свій код, за яким учні приєднуються до нього та прикріплене посилання на відеозустріч. До курсу прикріплений необхідний теоретичний матеріал, приклади виконання задач, а також і задачі для виконання учнями, інтерактивна вправа та цікаві матеріали для заданої теми (Додаток 2).

Для проведення опитувань, збору інформації, оцінювання навчальних досягнень можна використати інструмент Google Forms. Створення анкет та опитувань у Google Форммах - це дуже легко завдяки інтуїтивному інтерфейсу.

Ви можете додавати різні типи питань, такі як текстові поля, відповіді на відкриті питання, вибір однієї або кількох відповідей, шкали оцінювання тощо. Ви можете надсилати посилання на форми електронною поштою або публікувати їх на веб-сторінці. Ви також можете налаштовувати доступ до форми (наприклад, зробити її публічною або доступною лише за запрошенням). Головною перевагою є автоматична обробка відповідей: Google Форми автоматично збирають і аналізують відповіді в таблицях Google, що дозволяє зручно переглядати результати. Ви можете вставляти мультимедійні елементи в питання та відповіді, що допомагає покращити зрозумілість та взаємодію з користувачами.

Звичайно Google Forms не обов'язково використовувати тільки для дистанційної форми, а також можна задавати те чи інше опитування в ролі домашнього завдання чи додаткового завдання для кращого засвоєння знань.

При правильній організації дистанційного навчання воно буде ефективним та цікавим як і в очній формі навчання.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

В цьому розділі магістерської роботи ми дослідили можливість розробки та впровадження факультативного заняття, яке спрямоване на використання похідних у задачах оптимізації в економіці.

Під час дослідження розроблено план заняття, який включає теоретичний матеріал та практичні завдання з використання похідних для аналізу економічних ситуацій. Розроблене заняття може допомогти учням здобути поглиблені знання щодо використання математичних інструментів в економічних дослідженнях та прийманні рішень. Для заняття використані задачі прикладного змісту, адже при розв'язуванні саме таких задач краще сприйняття та розуміння теми.

У ході роботи також запропоновано використання інтерактивних вправ в програмі LearningApps, як для класних, так і для домашніх робіт. Мета таких завдань – це поглиблення та перевірка знань з теми "Похідна та її застосування". Враховуючи реалії сьогодення, створено курс на платформі Google Classroom для дистанційного навчання.

Вважаю, що це факультативне заняття може бути корисним для студентів, які цікавляться економікою та математикою, і вони зможуть використовувати ці знання у майбутній кар'єрі.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота демонструє актуальність впровадження задач оптимізації на факультативних заняттях у профільній школі з економічним спрямуванням. Це сприяє розвитку аналітичних та практичних навичок студентів, необхідних для успішної кар'єри в економічній сфері.

В роботі використано різноманітні методи навчання, такі як кейс-аналіз, ігрові симуляції та практичні вправи. Задачі оптимізації створюють змогу студентам застосовувати теоретичні знання у реальних ситуаціях, що сприяє зростанню їхнього розуміння економічних процесів. Також використані інтерактивні вправи. Використання сучасних технологій та програмного забезпечення для вирішення задач оптимізації підвищило інтерактивність та зрозумілість матеріалу, сприяючи кращому засвоєнню студентами концепцій.

Отримані результати підтверджують ефективність використання задач оптимізації для поглиблення економічних знань. Учні, які брали участь у факультативних заняттях, продемонстрували значний ріст своїх компетенцій та здатностей у розв'язанні складних економічних завдань. Вони проявили стале зацікавлення та активну участь на факультативах, що свідчить про ефективність вибору тематики та методів викладання.

Застосування задач оптимізації у факультативних заняттях з економічного профілю не лише покращує академічні результати студентів, але і підготовлює їх до реальних викликів у сучасному економічному середовищі.

Робота відкриває двері для подальших досліджень у галузі покращення методів навчання економічних дисциплін. Дослідження може бути розширене для визначення оптимальних стратегій викладання та врахування специфічних потреб учнів економічних шкіл. На основі отриманих результатів рекомендується подальше вдосконалення програми факультативів, враховуючи фідбек студентів, та впровадження нових технологій для поліпшення процесу навчання.

Загалом, магістерська робота вказує на важливість та успішність використання задач оптимізації на факультативних заняттях у профільній школі з економічним спрямуванням. Впровадження факультативів з оптимізації в економічних школах має потенціал позитивно вплинути на якість освіти та готовність випускників до викликів економічного сектору. У роботі розглянуто теоретичні та практичні аспекти навчання для розв'язування

задач оптимізації.

Можна стверджувати, що мета кваліфікаційної роботи досягнута та завдання виконані у повній мірі. Вважаю, що такі факультативні заняття будуть корисними для студентів, які цікавляться економікою та математикою, і вони зможуть використовувати ці знання у майбутній кар'єрі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. Тернопіль: ТНЕУ, 2017. 148 с.
2. Барвінок Р. Л., Козлова О. М. Готуємось до математичних олімпіад та конкурсів разом: посібник. Черкаси, 2013. 59 с.
3. Басараб Л. О., Сердюк, З. О. (2021). Організація проведення факультативних занять з математики в умовах дистанційного навчання. Актуальні проблеми природничих і гуманітарних наук у дослідженнях молодих учених «Родзинка-2021»: XXIII Всеукраїнська наукова конференція молодих учених, 601-602.
4. Бугір М.К. Математика для економістів : посібник. Київ : Вид-во «Академія», 2003. 520с.
5. Бурда М. І., Васильєва, Д. В., Волошена В. В., Глобін, О. І. (2016). Навчання математики в старшій школі на профільному рівні.
6. Васильєва Д. В. "Сучасний педагогічний інструментарій навчання математики в 10–11 класах на рівні стандарту." (2020): 79.
7. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: Підручник. 3-тє вид., випр. і доп. К.: Знання, 2007. 454с.
8. Возносименко Д. (2023). Використання сервісу Google classroom у процесі підвищення кваліфікації вчителів математики. Сучасна техніка та інноваційні технології, (26-03), 168-173.
9. Гончарова І. В. (2004). Психолого-педагогічні передумови формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики. Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. Донецьк: Фірма ТЕАН. 2007. Вип. 27, 79-84.
10. Грисенко М. В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі : навчальний посібник. К.: Либідь, 2007. 721с.
11. Гук О. Ю. (2021). Задачі оптимізації фінансових ресурсів на факультативних заняттях в профільній школі (економічний профіль).
12. Данильчук О. М., Базилик А. В. (2020). Використання прикладних задач з математики на факультативних заняттях. Editor coordinator, 398.
13. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: постанова Кабінету міністрів України від 23.11.2011 №1392. Офіційний вісник України, 2010 р., № 65, ст. 22.
14. Задачі оптимізації: посібник для факультативних занять, 10-11 кл. Л.М. Вивальнюк,

О.І. Соколенко, Ю.В. Костарчук та ін. Київ : Рад. шк., 1991. 175 с.

15. Кавка З. П., Солонецька Г. В. (2021). Використання платформи «Classroom!» на уроках математики в процесі дистанційного навчання.
16. Кухаренко В. М. (2018). Перешкоди впровадженню дистанційного навчання (Doctoral dissertation, Харківський національний педагогічний університет ім. ГС Сковороди).
17. Марченко К. В. (2019). Факультативні заняття з теорії конгруенцій як форма організації диференціації та індивідуалізації навчання старшокласників. Наукові записки молодих учених, (3).
18. Новак В. М. Застосування похідної в задачах оптимізації на факультативних заняттях в профільній школі (економічний профіль). Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: тези доп. VI Міжнар. наук. конф., м. Київ, 6-7 жовтня 2023 р. /УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, 2023. С. 119-120.
18. Олішевська, А. М. (2018). Застосування елементів математичного аналізу до розв'язування економічних задач на уроках математики. Наукові записки молодих учених, (2).
19. Похідна та її застосування: навчальний посібник. В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, Т. А. Агошкова, І. В. Клименко, Н. В. Міхеєва . Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. Дніпро, 2017. 104 с.
20. Про загальну середню освіту: Закон України, від 23 листопада 2011 р. № 1392. Офіційний вісник України, 2011 р., № 70, ст. 189.
21. Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України, від 23 листопада 2011 р. № 1392. Офіційний вісник України, 2010 р., № 65, ст. 2289.
22. Про освіту: Закон України, редакція від 21 листопада 2021 р. № 2145. Офіційний вісник України, Відомості Верховної Ради (ВВР), 2017, № 38-39, ст. 380.
23. Сап'як Н., Миронюк В. (2022). Покращення фінансової грамотності учнів на факультативних заняттях з математики за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій.
24. Сидельник В. Ю., Моторіна В. Г. (2019). ПРИКЛАДНІ ЗАВДАННЯ ЯК ЗАСІБ ЗДІЙСНЕННЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МАТЕМАТИКИ ТА ЕКОНОМІКИ В КЛАСАХ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОФІЛЮ.
25. Стадній А. С. (2020). Моделі дистанційного навчання. Актуальні питання гуманітарних наук. Т. 4, № 29: 151-156.
26. Ткач Ю.М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: навчально-методичний посібник. Харків : Вид-во «Ранок», 2011. 176с. Трифонова, О. М. (2011). Проблеми профільного навчання середньої школи. Збірник наукових праць «Педагогічні науки»,

1(57), 154-159.

27. Шовак А. П., Герич Б. М. (2020). Навчальна платформа google classroom в процесі навчання. Editor coordinator, 1452.

28. Штихно Л. В. (2016). Дистанційне навчання як перспективний напрям розвитку сучасної освіти. Молодий вчений, (6), 489-493.

29. Штокало М. Л. (2023). Передовий педагогічний досвід вчителя математики.

30. Яценко С. Є., Демчук К. М. (2019). Використання сервісу Google Classroom для забезпечення навчання математики учнів загальноосвітніх шкіл в умовах рівневої диференціації. Редакційна колегія.

Інтерактивні вправи LearningApps

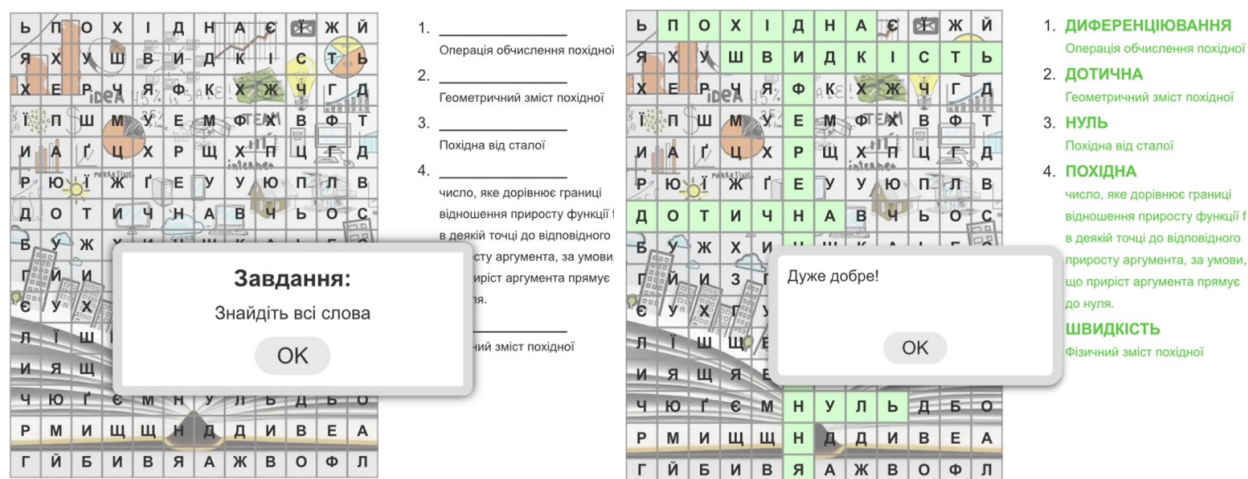


Рис. 16: Вправа: Знайдіть всі слова

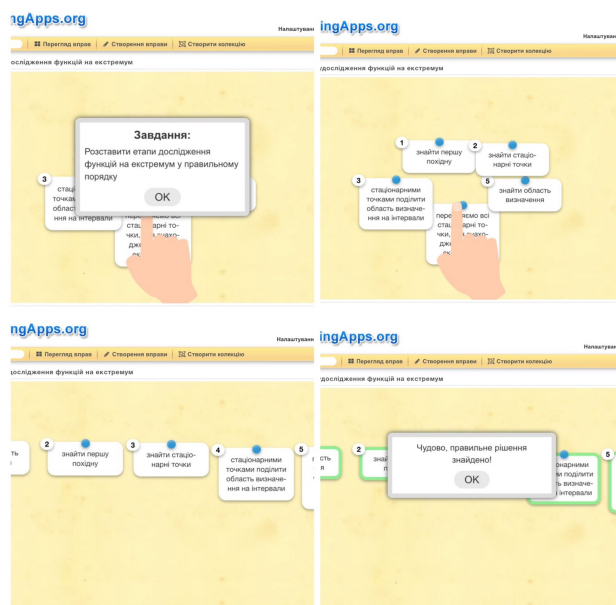


Рис. 17: Розташуйте етапи у правильному порядку

Додаток 2

Дистанційний курс на платформі Google Classroom

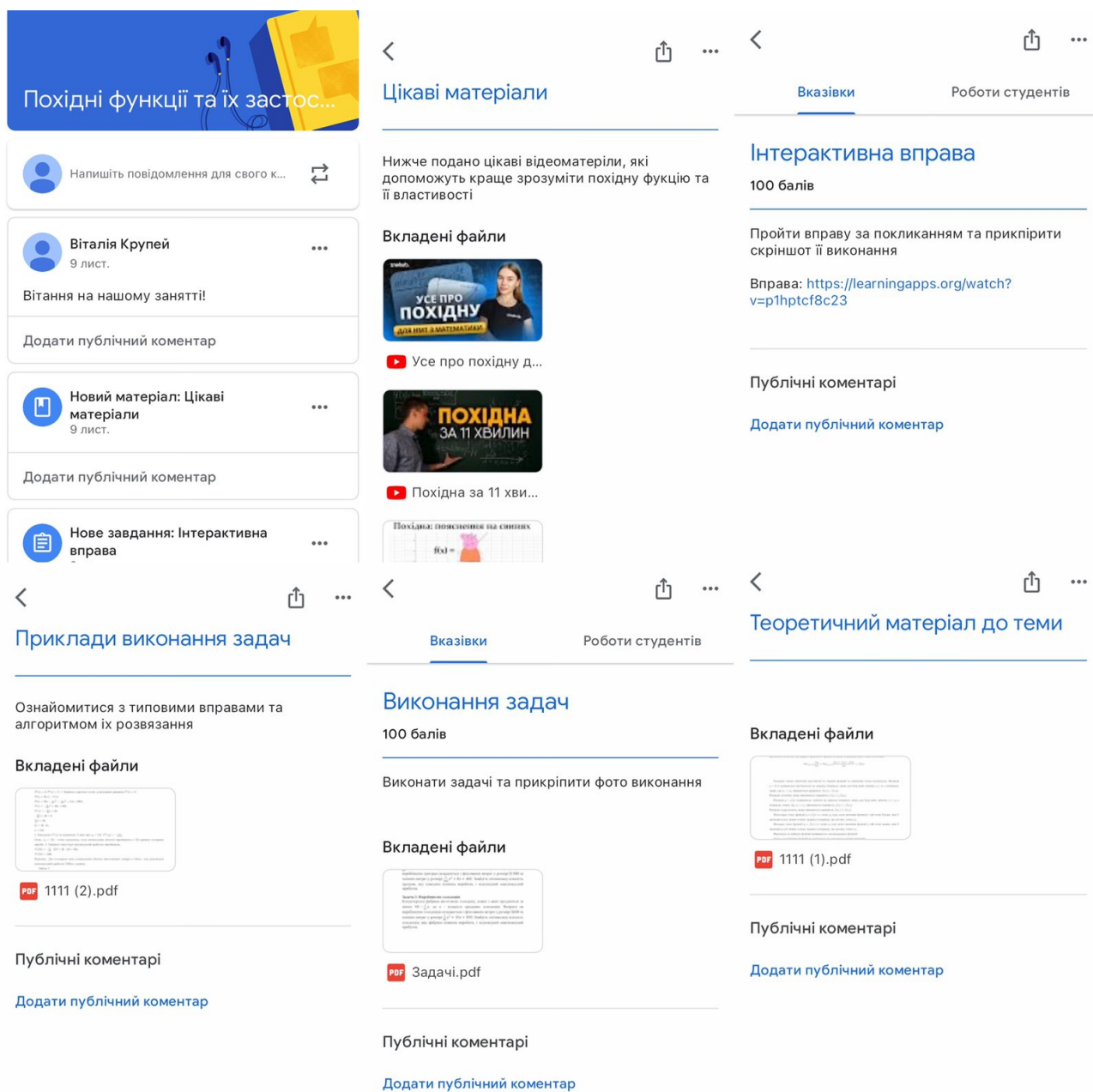


Рис. 18: Дистанційний курс


ЛАНЧИНСЬКА СЕЛИЩНА РАДА
ЛАНЧИНСЬКИЙ ЛІЦЕЙ ІМЕНІ ЮРІЯ ШКРУМЕЛЯКА
ЛАНЧИНСЬКОЇ СЕЛИЩНОЇ РАДИ НАДВІРНЯНСЬКОГО РАЙОНУ
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКОЇ ОБЛАСТІ
(ЛАНЧИНСЬКИЙ ЛІЦЕЙ ІМ. Ю. ШКРУМЕЛЯКА)
 вул. Карпатська, 6, селище Ланчин, тел. 0(3475) 3-24-75
 E-mail: lanchyn_1@ukr.net, Web: lanchyn-liceum.at.ua
 Код ЄДРПОУ 20559962

Директор
 Ланчинського ліцею
 ім. Юрія Шкрумеляка
 Ланчинської селищної ради
 Дикан Т. М.
 14 квітня 2023р.

Акт
використання результатів виконаної науково-дослідної роботи
Новак Віталії Миколаївни

За матеріалами науково-дослідної роботи Новак Віталії Миколаївни на тему «Застосування похідної для дослідження функцій на екстремум», виконаної у період з 06.03.2023 до 14.04.2023 в рамках виконання науково-дослідної теми кафедри математики та інформатики і методики навчання «Задачі оптимізації на факультативних заняттях у профільній школі (економічний профіль)» розроблено заняття (розраховане на 2 год) «Похідні функції та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки», для учнів старшої школи.

Комісія в складі:
 голова комісії: Дикан Т. М., Директор Ланчинського ліцею ім. Юрія Шкрумеляка Ланчинської селищної ради,
 члени комісії:
 Дем'янчук Л. В., заступник директора з навчально-виховної роботи
 Петруняк І. М., вчитель математики

встановили використання в процесі освітньої діяльності ліцею результатів дослідження – заняття «Похідні функції та їх застосування до розв'язування задач оптимізації з економіки», проведеного з учнями 10 – В класу з метою формування ключових компетентностей учнів.

14 квітня 2023 р.

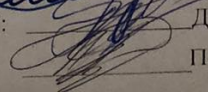
Голова комісії:  Дикан Т. М.
 Члени комісії:  Дем'янчук Л. В.
 Петруняк І. М.



Рис. 19: Акт використання результатів