

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему «Формування математичних компетентностей учнів в процесі
доведення геометричних нерівностей»

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)з-2
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Пасічник Н.П.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник канд.екон.н. доц.Никифорчин І.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2023 р.

ВСТУП

Геометричні нерівності є важливою частиною математики. Розв'язування задач на геометричні нерівності потребує більше творчого та логічного мислення, ніж складних математичних знань та технік. Тому при розв'язуванні подібних задач учні формують уміння розв'язувати типові математичні задачі, опановують дедуктивний метод доведення та спростування тверджень, вчаться володіти методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач. Все це складає зміст математичної компетентності учня.

Математична компетентність відноситься до однієї із головних компетентностей, оволодівши якими, можна вирішувати проблеми повсякденного, професійного та соціального життя. Математика є необхідним підґрунтям усіх творчих професій, вона дає можливість людині орієнтуватися в навколишньому світі.

Геометричні нерівності визначаються для різних фігур на площині, зокрема трикутників, чотирикутників, багатокутників та будуються між їх сторонами, площею, периметром тощо. Часто розв'язування таких нерівностей базується на застосуванні уже відомих алгебраїчних нерівностей.

Мета дослідження проаналізувати та узагальнити вивчення геометричних нерівностей як засіб розвитку математичних компетентностей учнів.

Об'єктом дослідження даної теми є процес вивчення учнями геометричних нерівностей та методів їх доведень.

Завданнями дипломної роботи є:

роль геометричних нерівностей в процесі формування математичних компетентностей учнів;

методи доведення нерівностей: метод різниці, метод спрощення нерівності, метод застосування очевидної нерівності, метод застосування відомих нерівностей;

види геометричних нерівностей: геометричні нерівності в трикутнику, геометричні нерівності в чотирикутнику, використання геометрії для доведення алгебраїчних нерівностей;

геометричні нерівності на олімпіадах та факультативних заняттях.

В даній роботі описані основні методи доведення нерівностей, також види геометричних нерівностей та приклади геометричних нерівностей на олімпіадах та факультативних заняттях. Наведені приклади до кожного із питань. В цьому і полягає *практичне значення* даної кваліфікаційної роботи.

У першому розділі описано роль геометричних нерівностей в процесі формування математичних компетентностей учнів. Зокрема описане основне поняття компетентності та його основні компоненти.

У другому розділі наведені та описані методи доведення нерівностей. Наведені різні типи задач, які розв'язуються даними методами, а саме методом різниці, методом спрощення нерівності, методом застосування очевидної нерівності, методом застосування відомих нерівностей.

У третьому розділі наведено види геометричних нерівностей. Описано геометричні нерівності в трикутнику та в чотирикутнику, а також описується про використання геометрії для доведення алгебраїчних нерівностей.

У четвертому розділі наведено приклади задач та їх розв'язання, які можуть використовуватися як завдання олімпіадних чи факультативних занять із математики.

Зміст

РОЗДІЛ 1	5
РОЛЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ	5
РОЗДІЛ 2	10
МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ	10
2.1 Метод різниці доведення нерівностей	10
2.2 Метод спрощення нерівності	12
2.3 Метод застосування очевидної нерівності	13
2.4. Метод застосування відомих нерівностей	15
РОЗДІЛ 3	18
ВИДИ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ	18
3.1 Геометричні нерівності в трикутнику	18
3.2 Геометричні нерівності в чотирикутнику	25
3.3 Використання геометрії для доведення алгебраїчних нерівностей	29
РОЗДІЛ 4	32
ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ НА ОЛІМПІАДНИХ ТА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ	32
ВИСНОВКИ	38
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39

РОЗДІЛ 1

РОЛЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ

Геометричні нерівності є важливою частиною математики. Розв'язування задач на геометричні нерівності потребує більше творчого та логічного мислення, ніж складних математичних знань та технік. Тому при розв'язуванні подібних задач учні формують уміння розв'язувати типові математичні задачі, опановують дедуктивний метод доведення та спростування тверджень, вчаться володіти методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач. Все це складає зміст математичної компетентності учня.

Компетентність – це знання, які повинні постійно оновлюватися. Також – це дієві методи, за допомогою яких ці знання можна використовувати у певній ситуації. Можна дати і таке означення компетентності – це критичне мислення, яке дає можливість оцінювати певні ідеї чи знання та можливість їх застосовувати в певній ситуації.

Існує три рівні математичної компетентності. Перший рівень полягає у відтворенні у певній ситуації фактів, відомих прийомів, розпізнання об'єктів математики та їх властивостей, використання відомих алгоритмів, навичок та безпосереднього виконання обчислень.

Суть другого рівня у встановленні зв'язків. Тобто розв'язуються завдання, які, є схожими до типових. Тобто уже саме формулювання завдання підказує, до матеріалу якого розділу потрібно звернутися та які використати відомі методи. Третій рівень - рівень міркувань. У завданнях цього рівня необхідно знаходити закономірності, проводити узагальнення та обґрунтовувати результати. А для цього потрібно мати розвинену інтуїцію, творчий підхід до вибору математичного інструментарію. Також у завданнях цього рівня часто спостерігається інтеграція знань з різних розділів курсу математики, а також самостійні розробки алгоритмів дій при розв'язуванні задач.

Математична компетентність відноситься до однієї із головних компетентностей, оволодівши якими, можна вирішувати проблеми повсякденного, професійного та соціального життя. Математика є необхідним

підґрунтям усіх творчих професій, вона дає можливість людині орієнтуватися в навколишньому світі, тому що, вона сприяє розвитку уяви та інтуїції, які складають основу творчої діяльності особистості.

Математична освіта формує логічне мислення учнів, тобто його раціональність, повноту, послідовність, обґрунтованість, яке є складовою математичної компетентності.

Існують такі шляхи до формування компетентності:

- вміння працювати із формулами та володіти технікою обчислень;
- вміння будувати та проводити аналіз графіків функцій, а також вміння досліджувати їх властивості;
- вміння застосовувати знання із статистики та теорії ймовірності для характеристики деяких явищ та процесів, які відбуваються в реальному житті;
- вміння використати при потребі довідкові матеріали та обчислювальні пристрої;
- вміння сконструювати геометричні фігури на площині та в просторі, а також вміння їх класифікувати;
- вміння будувати та досліджувати різні математичні моделі об'єктів, процесів чи явищ реального життя.

Математична компетентність учня є сукупністю окремих компетентностей, а саме процедурної, логічної, технологічної, дослідницької та методологічної компетентності.

Процедурна компетентність – це вміння розв'язувати типові математичні задачі; уміння відтворити контекст задачі, яка може виникнути в індивідуальній або соціальній практиці, та звести її до типової; уміння систематизувати типові задачі; уміння розпізнати серед заданих задач типову чи звести деяку нетипову задачу до типової.

Прикладом може бути використання уже відомих та очевидних нерівностей як метод доведення заданих нерівностей.

Набути навиків процедурної компетентності можна застосовуючи у процесі навчання алгоритми розв'язання типових задач; пошуком критеріїв зведення задач до типових; а також використанням різних інформаційних

джерел для пошуку методів розв'язування типових задач, це можуть бути підручники, довідники чи Інтернет-ресурси.

Логічна компетентність – це володіння дедуктивним методом доведення тверджень, тобто вмінням застосовувати теоретичні поняття, теореми та твердження, які вже раніше були доведені.

Також навички логічної компетентності набуваються при відтворенні дедуктивного доведення теорем, при обґрунтуванні правильності алгоритму розв'язання задач та при пошуках логічних помилок у дедуктивних міркуваннях;

Прикладом набуття логічної компетентності може бути метод спрощення доведення нерівностей. Адже, його основа полягає у дедуктивних міркуваннях, тобто міркування відбуваються від початкового твердження до кінця.

Або на уроках геометрії у 7 класі, при вивченні теми «Нерівність трикутника», можна, для кожного учня приготувати заготовки (відрізки довжиною 10см, 5см, 2см) і поставити перед ними таке завдання: «Складіть з даних відрізків трикутник». Як би учні не старалися, вони приходять до висновку, що трикутник скласти неможливо, не має третьої вершини. Таким чином можна учнів поступово підвести до поняття «Нерівності трикутника». Під час таких уроків формується логічна компетентність.

Технологічна компетентність – це володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності.

Навички технологічної компетентності також формуються при оцінюванні похибки наближених обчислень та побудові комп'ютерної моделі предметної області деякої задачі для їх наближеного чи точного розв'язання.

Дослідницька компетентність – це володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач за допомогою ІКТ та математичних методів. Дослідницька компетентність розглядається також як характеристика знань, вмінь та досвіду особистості.

Напрями набуття математичної компетентності також є формулювання та побудова аналітичної моделі математичної задачі. При висуванні та перевірці правильності гіпотез, використовуючи відомі методи, а також, власні набуті знання. Також при інтерпретуванні результатів, які були виявленими

формальними методами та при систематизації отриманих результатів, досліджуванні меж виконання отриманих результатів, установленні зв'язків із попередніми результатами, а також при пошуках аналогії в розділах математики.

Прикладом формування даного виду компетентності можуть слугувати різні типи завдань для факультативних занять, де учні вирішують завдання дослідницького характеру.

Методологічна компетентність – це уміння оцінювати доцільність використання математичних методів та засобів ІКТ для розв'язання індивідуально та суспільно значущих задач.

Методологічна компетентність набувається також через аналіз ефективності розв'язання задач різними методами математики. Також через рефлексію власного досвіду набутого при розв'язуванні задач та при подоланні перешкод, які мають на меті вдосконалення власної методології за допомогою якої можна проводити дослідження.

Для досягнення цієї цілі, набуття всіх складових компетентностей математичної компетентності, та отримання результату від освітнього процесу потрібно застосувати різні методи навчання. Вони повинні бути як традиційними так і сучасні, які будуть сприяти формуванню математичної компетентності учня.

Так при вивченні геометричних нерівностей та методів їх доведення, а саме методу різниці, методу спрощення чи методу застосування очевидної нерівності можна застосувати метод конкретної ситуації. При якому учні більше самостійно думають, аналізують чи узагальнюють інформацію, також можуть розглядати різні способи вирішення задачі чи й самі складають свою.

Варто використовувати і метод інциденту. Тобто потрібно залучати учнів до участі в олімпіадах та конкурсах. Адже, саме тоді учні вчаться діяти у стресових ситуаціях, а це є досить важливим у реальному житті.

Варто сказати, що можна використовувати багато різних методів навчання залежно від рівня підготовки класу чи змісту навчальної програми. Звісно, потрібно враховувати, що на початку вивчення нової теми варто застосовувати

проблемно-пошукові методи, які сприяють формуванню теоретичних знань. А для формування практичних знань краще застосовувати репродуктивні методи

Застосування математики учнями в життєвих ситуаціях – це головна мета викладання математики. Формування таких навичок відбувається через наочну реалізацію нових понять, зв'язків між ними та доведень на уроках.

Можна зробити висновок, що опанувавши описані компетентності, учні озброюються знаннями та вміння знайти потрібну інформацію в потоці інформаційних джерел та застосувати їх у власній діяльності.

Наступне це розуміння того, яким чином можна набути ці знання, та коли доцільно який метод застосувати. Розвивається критичне мислення, що сприяє адекватному оцінюванню себе, навколишнього світу та свого місця у світі.

Тому серед галузевих компетентностей провідне місце займають математичні компетентності, оскільки джерелом математичних понять, теорем та теорій є саме реальність, притому їх призначення – це дослідження реальності за допомогою математичних моделей.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Метод доведення нерівності залежить від типу самої нерівності. Основним підходом до розв'язування нерівностей можуть бути наступні кроки.

Найперше потрібно виразити нерівність так, щоб всі змінні були по одній стороні, а інша сторона була рівна нулеві. Наступним кроком може бути застосування правил алгебри для спрощення виразу або застосування властивостей нерівностей. При цьому потрібно звертати увагу на обмеження, які задані в умові або виникли в ході розв'язання, на операцію множення чи ділення на від'ємне число, яке змінює знак нерівності тощо.

На цих правилах базується один із методів доведення нерівностей, а саме метод різниці.

2.1 Метод різниці доведення нерівностей

Метод різниці полягає в тому, що спочатку знаходиться різниця лівої та правої частини нерівності. Потім доводиться, що отримана різниця може набувати значень постійного знака незалежно від того яких значень набувають змінні.

Тобто, щоб довести, що $A > B$, достатньо показати, що $A - B > 0$;
щоб довести, що $A < B$, достатньо показати, що $A - B < 0$. [7]

Застосуємо даний метод на прикладах.

Приклад 1.

Нехай a, b, c - сторони трикутника. Довести нерівність

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Доведення

Знайдемо різницю правої та лівої частини нерівності:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} - 3 \\ &= \frac{2((a+b-c)(a-b)^2 + (a+c-b)(a-c)^2 + (b+c-a)(b-c)^2)}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \geq 0. \end{aligned}$$

Оскільки за умовою a, b, c - сторони трикутника, то за нерівністю трикутника жодна із дужок $(b + c - a), (a + c - b), (a + b - c)$ не може набувати від'ємного значення, а отже нерівність є правильною.

Доведено

Приклад 2

Довести нерівність

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 > 6ab.$$

Доведення

Знайдемо різницю лівої та правої частини нерівності:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab &= a^2b^2 - 4ab + 4 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (ab - 2)^2 + (a - b)^2. \end{aligned}$$

При довільних значення a, b, c дана нерівність набуває тільки невід'ємних значень, отже, початкова нерівність є правильною.

Доведено

Приклад 3

Довести нерівність, якщо $a > 0, b > 0$:

$$\frac{a}{b + 2a} + \frac{b}{a + 2b} \leq \frac{2}{3}$$

Доведення

Знайдемо різницю лівої та правої частини нерівності:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b + 2a} + \frac{b}{a + 2b} - \frac{2}{3} &= \frac{3a(a + 2b) + 3b(b + 2a) - 2(a + 2b)(b + 2a)}{3(b + 2a)(a + 2b)} \\ &= \frac{3a^2 + 6ab + 3b^2 + 6ab - 2ab - 4a^2 - 4b^2 - 8ab}{3(b + 2a)(a + 2b)} \\ &= \frac{-a^2 + 2ab - b^2}{3(b + 2a)(a + 2b)} = -\frac{(a - b)^2}{3(b + 2a)(a + 2b)} \end{aligned}$$

При $a > 0, b > 0$ ця різниця може набувати недодатних значень. Отже, початкова нерівність є правильною.

2.2 Метод спрощення нерівності

Метод спрощення нерівності полягає в тому, що виконується ряд спрощень виразів, з яких утворюється нерівність, доки задана нерівність не стає очевидною. Тобто, проводиться ряд міркувань від початкової невідомої нерівності до уже відомої.

Приклад 1.

Довести нерівність, якщо $a > 0, b > 0$,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Доведення

Нам потрібно довести, що $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ або, що $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{ab} \geq 0,$$

або $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.

Отримана нерівність правильна для будь-яких додатних значень a, b .

Отже, початкова нерівність є правильною.

Доведено

При розв'язуванні подібних задач в учнів формується логічна, методологічна та дослідницька компетентності, які є одними із складових математичної компетентності. Тому що, в процесі доведення учні шукають правильне твердження з якого може впливати правильний потрібний їм висновок.

Приклад 2.

Довести нерівність

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geq 0$$

Доведення

Погрупуємо доданки нерівності по чотири:

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 = (a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2).$$

Бачимо, що у дужках є квадрати різниці:

$$a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 = (a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2) = (a^4 - 1)^2 + (a^3 - a)^2.$$

Робимо висновок, що при всіх значеннях a різниця може набувати невід'ємних значень. Отже, задана рівність є правильною.

Доведено.

2.3 Метод застосування очевидної нерівності

Даний метод полягає в тому, що задану нерівність отримують у результаті перетворення очевидної нерівності; чи у результаті додавання або множення декількох очевидних нерівностей.

Очевидними вважаються нерівності вигляду:

$$a^2 \geq 0,$$

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ при } a > 0, b^2 - 4ac < 0$$

та інші подібні до них.

Розглянемо доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ уже не методом спрощення нерівності, а методом застосуванням очевидної нерівності. [1]

Приклад 1

Довести нерівність, якщо $a > 0, b > 0$,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Доведення

Якщо відомо, що $a > 0, b > 0$, то $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$,
отже, $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Поділимо обидві частини нерівності на 2 і отримаємо:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Що й треба було довести.

Доведено

Даний метод є досить ефективним, але часто виникають питання із якої очевидної нерівності почати доведення. Тому якщо для учнів із нижчим рівнем

досягнень важко використовувати цей метод, то можна застосовувати і аналітичний метод, який ми ще називаємо методом спрощення нерівності.

Приклад 2

Відомо, що a, b, c - сторони трикутника. Довести нерівність:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

Доведення

Нехай, $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.

Тоді $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$.

Для x, y, z виконуються такі очевидні нерівності:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0;$$

$$(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \geq 0;$$

$$(\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 \geq 0.$$

Звідси,

$$x + y \geq 2\sqrt{xy};$$

$$y + z \geq 2\sqrt{yz};$$

$$z + x \geq 2\sqrt{zx}.$$

Обидві частини нерівностей набувають невід'ємних значень, тому можемо застосувати до них теорему про почленне множення нерівностей, і отримаємо:

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}$$

Оскільки, $x > 0, y > 0, z > 0$, то $\sqrt{x^2y^2z^2} = xyz$.

Маємо, що $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$.

Або $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$.

Доведено

Приклад 3

Відомо, що a, b, c, d - сторони опуклого чотирикутника $ABCD$. Довести нерівність:

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(ac + bd),$$

тобто, що площа опуклого чотирикутника не перевищує півсуму добутків його протилежних сторін.

Доведення

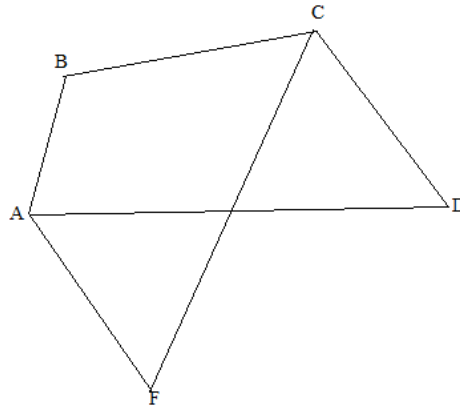


Рис. 2.1

Побудуємо точку F , так, щоб $AF = CD, CF = AD$ (рис. 2.1).

Тоді $S_{ABCD} = S_{ABCF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCF} \leq \frac{1}{2}AB \cdot AF + \frac{1}{2}BC \cdot CF = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, тому що, площа трикутника не перевищує половину добутку його сторін.

Доведено

2.4. Метод застосування відомих нерівностей

Даний метод полягає в тому, що раніше доведені нерівності використовують при доведенні інших.

Саме цей метод використовують при розв'язуванні більшості задач на доведення нерівностей.

Розглянемо найбільш поширені такі нерівності та декілька прикладів на їх застосування. [3]

$$\text{Нерівність } \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$$

Приклад 1.

Довести дану нерівність, якщо $a, b, c > 0$

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

Доведення

Поділимо чисельник на знаменник кожного дробу лівої частини нерівності. Отримаємо:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \\ \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Доведено.

Нерівність «трьох квадратів»

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Приклад 2.

Довести нерівність, якщо a, b, c - сторони трикутника, R – радіус описаного кола навколо даного трикутника,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Доведення

Застосуємо нерівність «трьох квадратів»:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Використаємо відомі формули для знаходження площі трикутника:

$$S = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \Rightarrow a+b+c = \frac{2S}{r};$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4RS.$$

Отже, можемо записати, що

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{\frac{2S}{r}}{4RS} = \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2R \frac{R}{2}} = \frac{1}{R^2}.$$

Доведено

Нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$$

Приклад 3.

Довести нерівність, якщо a, b, c - сторони трикутника, R – радіус описаного кола навколо даного трикутника,

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2.$$

Доведення

Застосуємо нерівність $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ та відомі формули для знаходження площі трикутника:

$$S = r \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \Rightarrow a + b + c = \frac{2S}{r};$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow abc = 4RS.$$

Маємо:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) = 4RS \frac{2S}{r} = 8S^2 \frac{2r}{r} = 16S^2, \text{ бо } R \geq 2r.$$

Доведено

РОЗДІЛ 3

ВИДИ ГЕОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

3.1 Геометричні нерівності в трикутнику

Геометричні нерівності визначаються для різних фігур на площині, зокрема трикутників, чотирикутників, багатокутників та будуються між їх сторонами, площею, периметром тощо. Часто розв'язування таких нерівностей базується на застосуванні уже відомих алгебраїчних нерівностей.

Для доведення нерівностей, які пов'язують сторони трикутника, існує загальний метод, який дозволяє просто вирішити подібні задачі.

Опишемо основну ідею методу.

Впишемо в трикутник ABC зі сторонами a, b, c коло. Нехай A', B', C' - точки його дотику з відповідними сторонами, $AC' = z, BA' = x, CB' = y$. [2]

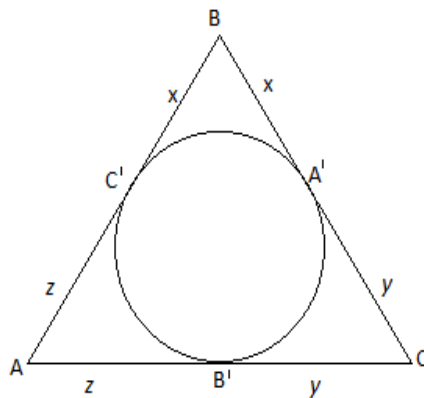


Рис.3.1

$$\text{Тоді } a = x + y, b = y + z, c = z + x. \quad (1)$$

Отже, якщо a, b, c – довжини сторін трикутника, то існують додатні числа x, y, z задовольняють відношення (1).

І навпаки, якщо $a = x + y, b = y + z, c = z + x$, де $x > 0, y > 0, z > 0$, то очевидно існує трикутник із сторонами a, b, c , причому x, y, z - це довжини відрізків, на які діляться його сторони точками дотику з ними вписаним колом.

Такі перетворення називаються перетворенням Раві.

Причому, зрозуміло, що

$$x = \frac{a+c-b}{2}, y = \frac{a+b-c}{2}, z = \frac{b+c-a}{2},$$

$$\text{або } x = p - b, y = p - c, z = p - a,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

За допомогою підстановки (1) нерівності для сторін трикутника зводяться до нерівностей для довільних додатніх чисел. Тоді отримані нерівності доводяться значно легше ніж задані.

Задача 1

Нехай a, b, c – сторони трикутника, S – його площа, p – півпериметр, r – радіус вписаного кола. Довести нерівність.

$$2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$$

Доведення

Нехай $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.

$$\text{Тоді, } a^2 + b^2 + c^2 = \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_{a^2} + \underbrace{y^2 + 2yz + z^2}_{b^2} + \underbrace{z^2 + 2zx + x^2}_{c^2} =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx).$$

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) &= 2((x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y)) = \\ &= 2(xy + xz + y^2 + yz + yz + yx + z^2 + zx + zx + zy + x^2 + xy) = \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) + 4(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) + 4(xy + yz + zx) \\ &\quad - 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) > 0 \end{aligned}$$

$$4(xy + yz + zx) > 0$$

Оскільки $xy + yz + zx > 0$, то і $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$.

Доведено.

Задача 2

Нехай a, b, c – сторони трикутника. Довести нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Доведення

Позначимо $a = x + y, b = y + z, c = z + x$, де $x, y, z > 0$.

Відомо, що площу трикутника можна обчислити за формулою $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр трикутника, а a, b, c – його сторони. Виразимо p через x, y, z :

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{x+y+y+z+z+x}{2} = \frac{2x+2y+2z}{2} = x+y+z.$$

Виконаємо підстановки для нерівності:

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \geq$$

$$4\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(x+y+z-x-y)(x+y+z-y-z)(x+y+z-z-x)},$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 + z^2 + 2xz + x^2 \geq 4\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(xyz)},$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \geq 4\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(xyz)},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 2\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(xyz)}.$$

Зробимо оцінку лівої частини. Для цього скористаємося нерівністю $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$, яка рівносильна наступним нерівностям $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ і, відповідно $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz &= \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \\ xy + yz + xz &\geq \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{3}(xy + yz + xz) + xy + yz + xz = \frac{2}{3}(x^2 + \\ y^2 + z^2) + \frac{4}{3}(xy + yz + xz) &= \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) = \frac{2}{3}(x+y+z)^2. \end{aligned}$$

Оцінимо ліву частину.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(xyz)} &\leq 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{27}(x+y+z)} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(x+y+z)^2 \\ &= \frac{2}{3}(x+y+z)^2. \end{aligned}$$

Тут ми скористалися нерівністю $xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}$, що є наслідком нерівності Коші $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

Порівнюючи (4) і (5), бачимо, що $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \geq 2\sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)(xyz)}$.

Доведено

Задача 3

Нехай a, b, c – сторони трикутника, S – його площа, p – півпериметр, r – радіус вписаного кола. Довести нерівність.

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

Доведення

Нехай $a = x + y, b = y + z, c = z + x, p = x + y + z$.

Тоді, можна записати, що $p - a = z, p - b = x, p - c = y$.

Отже, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{z^2x^2 + x^2y^2 + z^2y^2}{x^2y^2z^2} \geq \frac{1}{r^2}$.

Оскільки, $S = pr$, то $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$.

$\frac{1}{r^2} = \frac{x+y+z}{xyz}$, тому можна записати, що

$$\frac{z^2x^2 + x^2y^2 + z^2y^2}{x^2y^2z^2} \geq \frac{x+y+z}{xyz}$$

$$\frac{z^2x^2 + x^2y^2 + z^2y^2}{xyz} \geq x+y+z$$

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} - x - y - z \geq 0$$

$$z^2x^2 + x^2y^2 + z^2y^2 - x^2yz - y^2xz - z^2xy \geq 0$$

$$xz(xz - y^2) + xy(xy - z^2) + yz(yz - x^2) \geq 0$$

Оскільки, $x, y, z \geq 0, xz \geq y^2, xy \geq z^2, yz \geq x^2$. Остання нерівність вірна, а отже, вихідна нерівність теж вірна.

Доведено

У шкільному курсі геометрії із геометричними нерівностями учні вперше зустрічаються у 7 класі. Тоді вивчається *нерівність трикутника*, яка формулюється так: [5]

Кожна сторона трикутника є меншою від суми двох інших його сторін.

Доведення

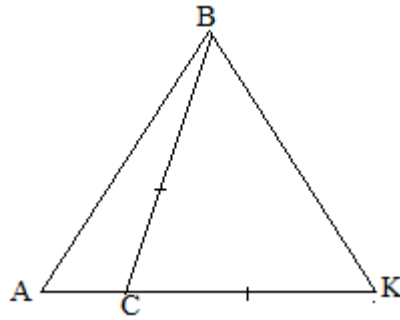


Рис. 3.2

Розглянемо довільний трикутник (рис.3.2). Нам потрібно довести, що $AB < BC + CA$, $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$.

Доведемо 1 нерівність.

Продовжимо сторону AC трикутника ABC і відкладемо на ній відрізок CK , який рівний стороні BC .

Тепер в трикутнику ABK кут CBK рівний куту CKB , тому що $BC = CK$.

Очевидно, що кут ABK більший за кут K . Оскільки проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$.

Враховуючи, що $AK = CA + CK = CA + BC$, то маємо що $AB < BC + CA$, що й треба було довести.

Аналогічно доводяться дві інші нерівності.

Доведено

З доведення можна зробити висновок, що для трьох точок A , B , C виконуються такі нерівності: $AB < BC + CA$, $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$, причому точки A , B , C не лежать на одній прямій. Кожна із таких нерівностей називається нерівністю трикутника. [8]

Якщо точки A , B , C лежать на одній прямій, то вони не є вершинами трикутника і тоді виконується тільки дві із розглянутих нерівностей, а третя перетворюється на рівність. Наприклад, якщо точка A лежить між B і C (рис.3.3),

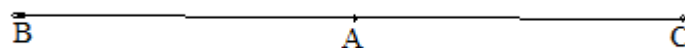


Рис. 3.3

то виконуються наступні співвідношення: $BC = BA + AC$, $BA < BC + AC$, $AC < BC + BA$.

Отже, можна зробити висновок, що як би не були розташовані точки A , B , C , то завжди виконуються такі нерівності: $AB \leq BC + CA$, $BC \leq CA + AB$, $AC \leq CB + BA$.

Наслідком із нерівності трикутника є наступне твердження.

Кожна сторона трикутника є більша ніж модуль різниці двох інших його сторін.

Доведення

Нам потрібно довести, що

$$|AB - AC| < BC,$$

$$|AB - BC| < AC,$$

$$|BC - AC| < AB.$$

Розглянемо нерівність $AB < AC + BC$. Віднімемо від обох частин даної нерівності BC :

$$AB - BC < AC, \text{ отже, } AC > AB - BC.$$

Розглянемо нерівність $BC < AC + AB$. Віднімемо від обох частин даної нерівності AB :

$$BC - AB < AC, \text{ отже, } AC > BC - AB.$$

Робимо висновок, що $|AB - BC| < AC$.

Аналогічно можна довести дві інші нерівності.

Доведено

З доведених вище нерівностей можна зробити висновок, що:

будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін, але менша ніж модуль їх різниці.

Опираючись на таку найпростішу властивість як нерівність трикутника можна розв'язувати задачі. Розглянемо декілька таких задач.

Задача 1

У трикутнику дві сторони дорівнюють 2,9 см і 8,3 см. Яка може бути найменша і найбільша довжина третьої сторони, якщо вона є цілим числом?

Розв'язання

Нехай довжина третьої сторони трикутника a см. Тоді за теоремою про нерівність трикутника і наслідком із неї, ми можемо записати, що:

$$2,9 + 8,3 > a \Rightarrow a < 11,2;$$

$$8,3 - 2,9 < a \Rightarrow a > 5,4$$

Отже, при $a = 11$ см найбільша довжина третьої сторони заданого трикутника, а при $a = 6$ см – найменша довжина третьої сторони трикутника.

Розв'язано

Задачі, які розв'язуються за допомогою нерівності трикутника можуть містити не тільки дані про сторони трикутника, а й про інші його елементи та величини.

Задача 2

Довести, що медіана трикутника є меншою за півсуму прилеглих до неї сторін.

Доведення

Виконаємо рисунок 3.4.

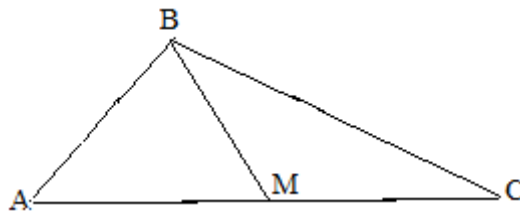


Рис.3.4

ABC - даний трикутник, BM - медіана. Тобто нам потрібно довести, що

$$\frac{AB+BC}{2} > BM.$$

Добудуємо до трикутника ABC паралелограм $ABCD$ (рис.3.5).

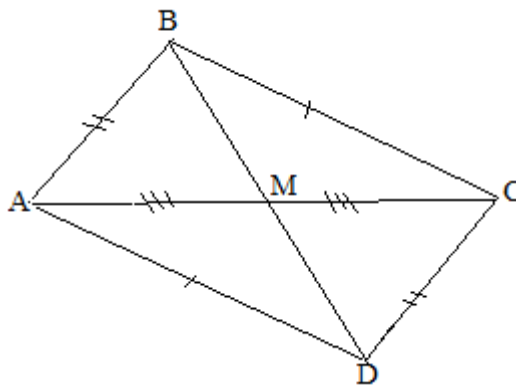


Рис.3.5

За нерівністю трикутника для трикутника ABD , маємо, що

$$AB + AD > 2BM$$

$$\frac{AB+AD}{2} > BM.$$

Оскільки $AD = BC$, то $\frac{AB+AD}{2} = \frac{AB+BC}{2} > BM$.

Доведено

Задача 3

Чи може одна із сторін трикутника дорівнювати половині його периметра?
А сума двох його сторін?

Розв'язання

Позначимо сторони трикутника через a, b, c , тоді $P = a + b + c$ - периметр трикутника. Тоді нам потрібно перевірити чи:

$$1) a = \frac{P}{2};$$

$$2) a + b = \frac{P}{2}.$$

Перевіряємо першу рівність: $a = \frac{a+b+c}{2}$

$$2a = a + b + c$$

$a = b + c$ - за нерівністю трикутника одна із сторін трикутника є меншою за суму двох інших, отже, робимо висновок, що одна із сторін трикутника не може дорівнювати половині його периметра.

Перевіряємо другу рівність: $a + b = \frac{a+b+c}{2}$

$$2a + 2b = a + b + c$$

$a + b = c$ - аналогічно із першим випадком робимо висновок, що сума двох сторін трикутника не може дорівнювати половині його периметра.

Розв'язано

3.2 Геометричні нерівності в чотирикутнику

Нерівність 1. Кожна сторона опуклого чотирикутника є меншою, ніж сума всіх інших його сторін. Тобто для довільного чотирикутника a, b, c, d виконується:

$$a < b + c + d,$$

$$b < a + c + d,$$

$$c < a + b + d,$$

$$d < a + b + c.$$

Доведення

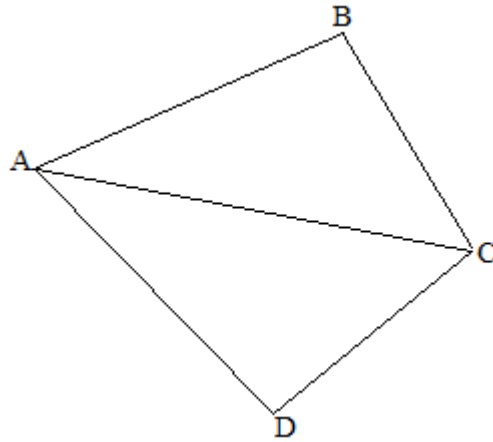


Рис. 3.6

Розглянемо чотирикутник $ABCD$ (рис. 3.6)

Доведемо, що $AB < BC + CD + AD$. Проведемо в даному чотирикутнику діагональ AC . Для сторін AB трикутника ABC і AC трикутника ACD , за нерівністю трикутника маємо:

$$AB < BC + AC \text{ і } AC < AD + CD.$$

$$\text{Отже, } AB < BC + AC < BC + AD + CD.$$

Що і треба було довести, аналогічно доводяться нерівності для інших сторін чотирикутника.

Доведено

Нерівність 2. Кожна сторона чотирикутника є меншою, ніж його півпериметр.

$$a < \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$b < \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$c < \frac{a + b + c + d}{2},$$

$$d < \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Доведення

$$\text{Доведемо, що } a < \frac{a+b+c+d}{2};$$

Маємо, що $2a < a + b + c + d$; $a < b + c + d$ – ця нерівність правильна, оскільки кожна сторона чотирикутника є меншою, ніж сума трьох інших. Отже і початкова нерівність є правильною. Аналогічно можна довести для інших сторін чотирикутника.

Доведено

Нерівність 3. Кожна діагональ чотирикутника є меншою ніж його півпериметр, тобто:

$$d_1 < \frac{a + b + c + d}{2};$$

$$d_2 < \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Доведення

Доведемо наприклад, що

$$d_1 < \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Розглянемо рис. 3.7.

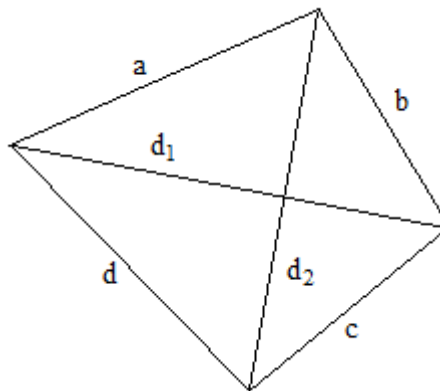


Рис. 3.7

За нерівністю трикутника $d_1 < a + b$;

$$d_1 < d + c.$$

Додаємо ці дві нерівності: $d_1 + d_1 < a + b + d + c$;

$$2d_1 < a + b + d + c, \text{ звідси маємо, що } d_1 < \frac{a+b+d+c}{2}.$$

Аналогічно доводиться і друга нерівність.

Доведено

Можна зробити висновок, що $d_1 + d_2 < a + b + d + c$.

Нерівність 4. Якщо чотирикутник опуклий, то сума його діагоналей є більшою за його півпериметр, тобто

$$d_1 + d_2 > \frac{a+b+d+c}{2}.$$

Доведення

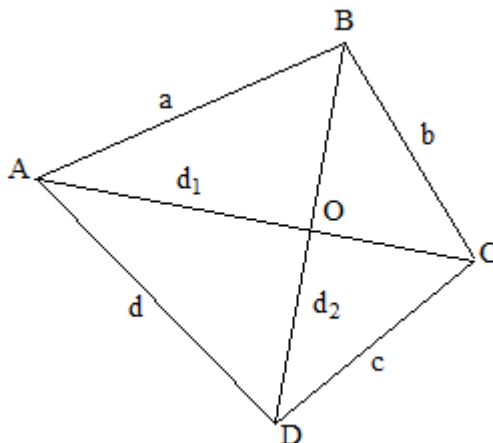


Рис. 3.8

Розглянемо чотирикутник $ABCD$, де $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$; $AC = d_1, BD = d_2$ – діагоналі. O – точка перетину діагоналей.

Запишемо нерівності трикутника для:

трикутника AOB : $AB < AO + OB$;

трикутника BOC : $BC < BO + OC$;

трикутника COD : $CD < CO + OD$;

трикутника AOD : $AD < AO + OD$.

Знайдемо суму даних нерівностей: $AB + BC + CD + AD < AO + OB + BO + OC + CO + OD + AO + OD$, тобто $AB + BC + CD + AD < 2AC + 2BD$.

$$AB + BC + CD + AD < 2(AC + BD)$$

$$AC + BD > \frac{AB+BC+CD+AD}{2}.$$

$$\text{Або } d_1 + d_2 > \frac{a+b+d+c}{2}.$$

Доведено

Нерівність 5. В опуклому чотирикутнику сума довжин діагоналей є більшою, ніж сума довжин будь-якої пари протилежних сторін чотирикутника. Тобто, якщо a, b, c, d – послідовні сторони чотирикутника, то завжди

$$d_1 + d_2 > a + c,$$

$$d_1 + d_2 > b + d.$$

Доведення

Розглянемо чотирикутник $ABCD$, де $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d$; $AC = d_1, BD = d_2$ – діагоналі. O – точка перетину діагоналей (рис.3.9).

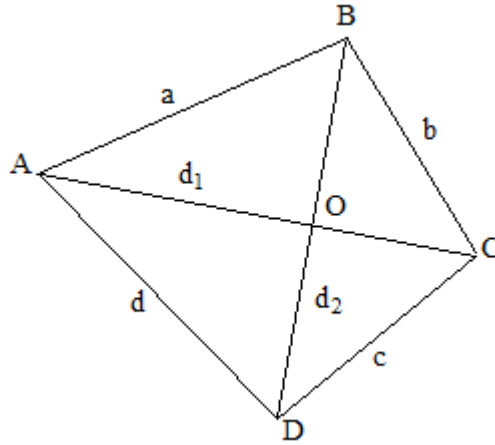


Рис. 3.9

Запишемо нерівності трикутника для:

трикутника AOB : $AO + OB > AB$;

трикутника COD : $DO + OC > CD$.

Знайдемо суму даних нерівностей: $AO + OB + DO + OC > AB + CD$

$$AC + BD > AB + CD$$

Або $d_1 + d_2 > a + c$. Аналогічно доводиться і друга нерівність.

Доведено

3.3 Використання геометрії для доведення алгебраїчних нерівностей

При доведенні алгебраїчних нерівностей використовують геометрію. Це дозволяє нерівність зробити геометрично наглядною та створює можливості для нових шляхів доведень.

Алгебраїчні нерівності можна розглядати як співвідношення між геометричними фігурами і величинами. Наприклад, відповідно ідей координатного методу, кожній парі змінних відповідає точка з такими ж координатами чи лінійне рівняння на координатній площині відповідає прямій.

Приклад 1.

Довести, що для всіх x, y, z виконується нерівність

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Доведення

Розглянемо на координатній прямій точки $B\left(-\frac{y}{2}; \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\frac{z}{2}; \frac{z\sqrt{3}}{2}\right), A(x, 0)$.

Знайдемо відстані між цими точками і отримаємо, $AB = \sqrt{x^2 + xy + y^2}, AC = \sqrt{x^2 + xz + z^2}, BC = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$. За нерівністю трикутника завжди $AB + AC > BC$, тобто, $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} > \sqrt{y^2 + yz + z^2}$. Рівність виконується при $x = y = z = 0$.

Доведено

При доведенні алгебраїчних нерівностей також використовують ідеї векторної алгебри.

Розглянемо два вектори $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$. Виконується нерівність $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$ або в координатному вигляді $|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Якщо виконується векторна рівність $a + b = c$, то перейшовши до довжин векторів за нерівністю трикутника отримаємо $|c| \leq |a| + |b|$ та враховуючи, що $c = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, маємо, що

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. [9]$$

Приклад 2.

Довести, що для довільних невід'ємних трьох чисел a, b, c таких, що $a + b + c = 3$, виконується нерівність $(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq 9$.

Доведення

Розглянемо вектори $u = (a, \sqrt{b}, \sqrt{c}), v = (1, \sqrt{b}, \sqrt{c})$.

Знайдемо їх довжини та скалярний добуток. Маємо $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b + c}; |\vec{v}| = \sqrt{1 + b + c}; uv = a + b + c$. Виконується нерівність $u^2 v^2 \geq (u \cdot v)^2$, маємо:

$$(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq (a + b + c)^2 = 3^2 = 9.$$

Рівність виконується при умові колінеарності векторів, коли $\frac{a}{1} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}$, тобто при $a = 1$, та для довільних невід'ємних b, c таких, що $b + c = 2$.

Доведено

Нерівність трикутника формулюється і мовою векторів: довжина суми векторів не перевищує суму їх довжин.

Приклад 3.

Довести, що $KL \leq \frac{AC+BD}{2}$,

де точки K, L - середини відрізків AB і CD .

Доведення

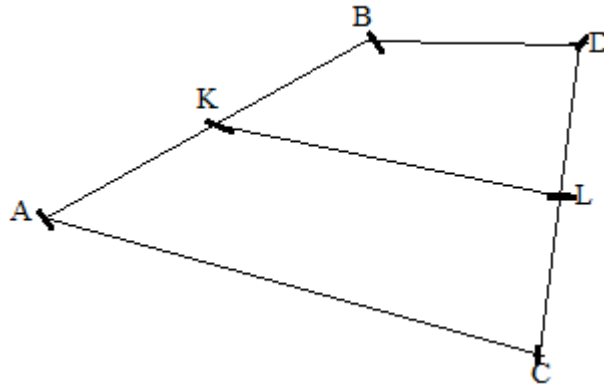


Рис.3.10

Нам потрібно довести, що $KL \leq \frac{AC+BD}{2}$ або $2KL \leq AC + BD$ (рис.3.10).

Знайдемо вектор $\overrightarrow{KL}$ із чотирикутника $KBDL$ та $KLCA$ відповідно:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL} \text{ та } \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}.$$

Знайдено їх суму $2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Доведено

РОЗДІЛ 4

ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ НА ОЛІМПІАДНИХ ТА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ

Олімпіадні та факультативні задачі – це такі задачі, які мають підвищений рівень складності. Така задача повинна відрізнятися від стандартної задачі і формулюванням і методом розв’язання.

За змістом олімпіадні задачі повинні відповідати таким критеріям:

зростати рівень складного від першого завдання і так поступово до останнього;

завдання повинні складатися відповідно основ програми з математики шкільного курсу;

в одне олімпіадне змагання повинні входити завдання із геометрії, алгебри та комбінаторики. Для молодших класів повинні бути завдання з арифметики та логічні задачі; а для учнів старших класів повинні міститися завдання з теорії чисел та математичного аналізу; тобто мають бути завдання, що об’єднують різні розділи шкільного курсу математики;

нестандартні завдання, які наділені певною новизною для школярів, які беруть участь в олімпіаді.

Тому олімпіадні та факультативні заняття спрямовані на підвищення інтересу до вивчення математики, розширення умінь та набуття навичок пізнавальної діяльності учнів. Тобто метою подібних занять є розвиток творчих здібностей здобувачів освіти, що є змістом математичної компетентності.

Відомо, що за допомогою нерівностей будується два типи завдань. Перший на доведення істинності нерівності за допомогою уже заданих умов. Та другий, на знаходження умов, при виконанні яких виконується задана нерівність.

Також знаємо, що для розв’язання (доведення) нерівностей існують чотири основні методи: метод різниці, метод спрощення нерівності, метод застосування відомої нерівності та метод застосування очевидної нерівності.

На факультативних заняттях розглядаються детально усі ці стандартні методи доведення нерівностей та розв’язуються задачі із різними підходами до розв’язання. Серед олімпіадних задач також можуть зустрічатися задачі із

стандартним підходом та задачі для розв'язання яких потрібні спеціальні методи. Але рідше зустрічаються задачі, які можна розв'язати за допомогою стандартного підходу. Але, беззаперечно, використовуються і загальновідомі нерівності та методи для розв'язання подібних задач.

Розглянемо декілька задач, які можна використати як підготовку до олімпіади, чи як одне із завдань факультативного заняття. Найперше опрацьовують задачі між елементами трикутника та чотирикутника (сторонами та кутами). Це окрім стандартних геометричних нерівностей (нерівність трикутника, твердження «проти більшої сторони лежить більший кут, незалежно від того, який трикутник» тощо), які вивчаються у школі, та перетворенням Раві (побудувати трикутник зі сторонами a, b, c можна при умові, що існують такі додатні дійсні числа x, y, z , що $a = y + z, b = z + x, c = x + y$), можна розглянути нерівність Герона.

Нерівність Герона. Для довільного трикутника ABC , де $AB = c, BC = a, CA = b$, виконується наступна нерівність:

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc$$

Доведення

Позначимо $a = y + z, b = x + z, c = y + x$, де $x, y, z > 0$.

Виконаємо перетворення для лівої сторони.

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = (x + z + y + x - y - z)(y + x + y + z - x - z)(y + z + x + z - y - x) = 8xyz.$$

Виконаємо перетворення для правої сторони.

$$abc = (y + z)(x + z)(y + x)$$

Отже, нам потрібно тепер довести таку нерівність:

$$8xyz \leq (y + z)(x + z)(y + x), \text{ де } x, y, z > 0.$$

Для доведення цієї нерівності використаємо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}, \sqrt{zy} \leq \frac{z + y}{2}, \sqrt{xz} \leq \frac{x + z}{2}$$

Перемноживши їх отримаємо нерівність, яка доводиться.

Доведено

Наступною нерівністю, яку варто розглянути на факультативному занятті є нерівність Ейлера.

Нерівність Ейлера. Для довільного трикутника ABC виконується така нерівність:

$$R \geq 2r,$$

де R — радіус описаного кола навколо трикутника ABC , а r — радіус вписаного кола.

Доведення

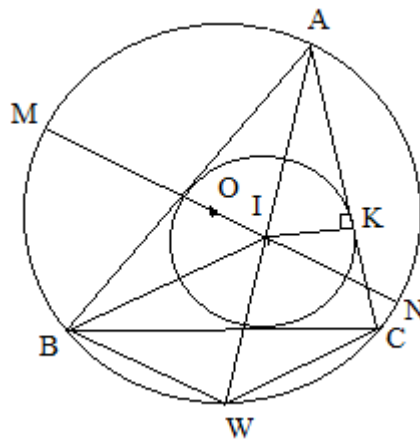


Рис. 4.1

Розглянемо рисунок 4.1. W — середина дуги BC описаного кола навколо трикутника ABC , O — центр описаного кола, I — центр вписаного кола, а K — точка дотику вписаного кола із стороною AC .

AW — бісектриса кута BAC , тому що, W — середина дуги BC . Отже точка I лежить на цій бісектрисі. Звідси, $WB = WI = WC$.

Побудуємо діаметр MN описаного кола, який буде проходити через точку I .

Використаємо теорему про пропорційність відрізків у колі:

$$MI \cdot IN = AI \cdot IW,$$

$$(R + OI)(R - OI) = \frac{IK}{\sin \frac{A}{2}} \cdot BW,$$

$$R^2 - OI^2 = \frac{IK}{\sin \frac{A}{2}} \cdot BW$$

Застосуємо теорему синусів для трикутника ABW :

$$BW = 2R \sin \frac{A}{2}.$$

$$\text{Отже, } R^2 - OI^2 = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot 2R \sin \frac{A}{2}$$

$$R^2 - OI^2 = 2Rr$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Оскільки, $OI^2 \geq 0$, то $R^2 - 2Rr \geq 0$, тобто, $R \geq 2r$, що і треба було довести.

Доведено

Прикладом задачі, яка пов'язує елементи чотирикутника може бути нерівність Птолемея.

Нерівність Птолемея. Для довільного опуклого чотирикутника виконується наступна нерівність:

$$d_1 d_2 \leq ac + bd,$$

d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника, a, b, c, d — послідовні сторони чотирикутника.

Доведення

Нехай в чотирикутнику $ABCD$ $AB = a, BC = b, CD = c, AD = d, AC = d_1, BD = d_2$ (рис. 4.2).

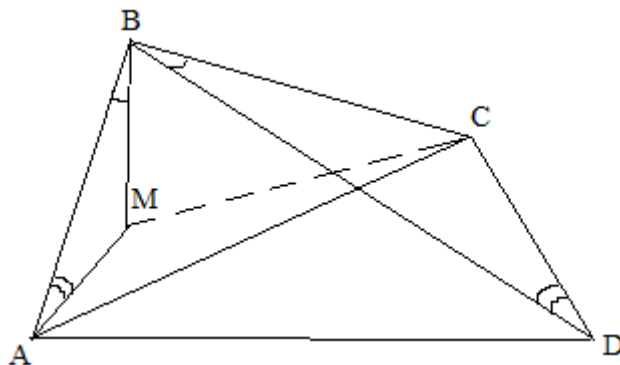


Рис. 4.2

Проведемо через вершини A та B заданого чотирикутника промені AM та BM так, щоб $\angle BAM = \angle BDC$ та $\angle ABM = \angle CBD$.

Використаємо для трикутників ABM та DBC формулу подібності трикутників за двома кутами:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD} \text{ та } \frac{AB}{BD} = \frac{BM}{BC}$$

$$\text{Отже, } AM = \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Трикутники MBC та ABD подібні за двома сторонами $\frac{AB}{BD} = \frac{BM}{BC}$ і кутом між ними $\angle CBD = \angle ABD = \angle PBC$.

Отже, із подібності даних трикутників випливає:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{MC}{AD}, \text{ тобто } MC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

За нерівністю трикутника для трикутника AMC маємо:

$$AM + MC \geq AC$$

Тому $\frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD} \geq AC$. Звідси:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

Доведено

Олімпіадні змагання дозволяються проводити протягом навчального року. Олімпіади проводяться в чотири тури (I, II, III, IV чверті) для учнів різних класів, починаючи з 5 по 11 клас.

Відповідно до результатів кожного туру та результатів в кінці навчального року визначаються переможців кожного із проведених турів і за підсумком навчального року.

В період канікул можна проводити факультативні заняття на яких детально розбирати розв'язки та хід розв'язання задач олімпіади. Вміння розв'язувати задачі і не тільки стандартні, а й ті, які вимагають особливого підходу є одним з основних показників рівня математичного розвитку учня. Адже саме за допомогою цього можна побачити на скільки добре учень зміг засвоїти навчальний матеріал. Тому що, щоб розв'язати задачу, потрібно зрозуміти, що таке задача, яка її побудова та із яких частин складається умова, які методи та навички можна використати, щоб знайти її розв'язок.

Можна зробити висновок, що участь в олімпіадах чи математичних конкурсах є надає учням можливість стати частиною прекрасного світу математики, де панують цікаві та нестандартні задачі. А саме тому, такі математичні змагання є поширеними серед українських школярів. Основне завдання математичної олімпіади полягає в тому, щоб проявити інтерес до математики та розвиток математичних здібностей учнів. Також олімпіадні

змагання виконують таке важливе завдання, як створення умов для забезпечення можливості обдарованим дітям систематично приймати участь у різноманітних інтелектуальних конкурсах.

ВИСНОВКИ

У ході дипломної роботи було проаналізовано та узагальнено вивчення геометричних нерівностей як засіб розвитку математичних компетентностей учнів.

Були описані методи доведення нерівностей, а саме метод різниці, метод спрощення нерівності, метод застосування очевидної нерівності, метод застосування відомих нерівностей. Було розглянуто види геометричних нерівностей, а саме геометричні нерівності в трикутнику, геометричні нерівності в чотирикутнику, використання геометрії для доведення алгебраїчних нерівностей та геометричні нерівності на олімпіадах та факультативних заняттях.

Результати дипломної роботи було висвітлено на V Міжнародній дистанційній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023».

Можна зробити висновок, що математична компетентність відноситься до однієї із головних компетентностей, оволодівши якими, можна вирішувати проблеми повсякденного, професійного та соціального життя. А математика є необхідним підґрунтям усіх творчих професій, вона дає можливість людині орієнтуватися в навколишньому світі, тому що, вона сприяє розвитку уяви та інтуїції, які складають основу творчої діяльності особистості.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Федак І. В. Розв'язування рівнянь. Доведення нерівностей. Посібник для підготовки до математичних олімпіад у 9-10 класах //Тернопіль, 1998
2. Жидков С.І. Геометричні нерівності для довільного трикутника - Х. : Видавнича група "Основа", 2008. - 143 с.
3. Радченко В.М. Про доведення нерівностей // У світі математики, 2(1996), №1.
4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч.посібн. — К.: Видавництво А.С.К., 2004. — 344 с.: іл.
5. Кикоть В. М., Кислюк О.О. Посібник для підготовки учнів 7-11 класів до олімпіад К-77 Математика, Шепетівка, 2011. – 20с.
6. Вороний О.М. Готуємося до олімпіади з математики. Книга 2 – Х.:Вид.група «Основа», 2008-141с.(Б-ка жур. «Математика в школах України).
7. Геометрія: Підруч. для учнів 10-11 кл. з поглиб. вивч. математики в серед. загальноосвіт. закладах / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. – К.: Освіта, 2000. – 239 с
8. Семенов В. О. Доведення нерівностей. Числові послідовності. Скінченні суми і добутки. Х.: Вид. група «Основа», 2009. – 127 с.
9. Тадєєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. МИ. Ядренка. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 480с