

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему: «Використання методів розв'язування

планіметричних задач у методиці навчання геометрії в школі»

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)(З)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)

Пекарук Богдана Романівна

Керівник: доктор фізико-математичних
наук, професор Шарин С. В.

Рецензент: кандидат педагогічних наук,
доцент Кульчицька Н. В.

Івано-Франківськ – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ I. Методи розв'язування планіметричних задач	6
1.1. Синтетичний метод	6
1.2. Аналітичний метод	9
1.3. Метод від супротивного	12
1.4. Алгебраїчний метод	15
1.5. Метод площ	17
1.6. Метод векторів	19
1.7. Метод координат	22
1.8. Метод геометричних перетворень	24
Висновки до розділу	26
РОЗДІЛ II. Методика розв'язування шкільних планіметричних задач	28
2.1. Геометричні перетворення	28
2.2. Методи допоміжних елементів	32
2.3. Методи допоміжних побудов	35
2.4. Векторні методи	36
Висновки до розділу	40
РОЗДІЛ III. Види задач та приклади розв'язання	41
3.1. Приклади розв'язування задач	41
3.2. Завдання для самостійного розв'язання	47

3.3. Задачі олімпіадного характеру	50
3.4. Олімпіадні задачі для самостійного розв'язання	52
Висновки до розділу	54
ВИСНОВКИ	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	58

ВСТУП

Актуальність дослідження. Через війну і коронавірус учні перейшли на онлайн навчання, тому є проблема освоєння окремих розділів математики, до яких можна віднести планіметрію як таку, що важко сприймається онлайн. Тому треба вивчити існуючі методики навчання та, можливо, удосконалювати чи змінювати їх.

Розв'язування планіметричних задач розвиває в учнів логічне мислення, пам'ять, увагу, підвищує їхню культуру. Адже особливістю таких задач є знаходження і виконання ланцюга операцій – побудов для знаходження певного алгоритму, виконання якого дозволяє розв'язати дану задачу.

Дуже важливо навчити учнів розв'язувати такі типи задач ще на початку вивчення планіметрії, тому що від цього залежить не тільки якість навчання на даному етапі, а й результативність їх подальшої роботи. Адже виконання великої кількості таких задач призведе до ефективності майбутнього навчання.

Більшість вчителів відводять половину навчального часу на розв'язування планіметричних задач, але результати такої праці не завжди значні. Як правило, під час розв'язування таких задач, учитель більше уваги приділяє пошуку розв'язання і його запису. Це правильно, але практика показує, що на висновки розв'язання задачі не вистачає ні часу, ні сил. Тому треба збагатити учнів загальними методами розв'язування задач, адже не кількість розв'язаних вправ, а метод їх розв'язання визначає ефективність навчання.

Об'єкт дослідження: методика навчання планіметрії у школі.

Предмет дослідження: методи розв'язування планіметричних задач та їх використання.

Мета дослідження: дослідити використання методів розв'язування планіметричних задач у методиці навчання геометрії в школі.

Завдання дослідження:

- Познайомитись з різних джерел з методами розв'язування планіметричних задач;
- Вивчити методичні особливості;
- Навести власні методичні рекомендації до процесу навчання;
- Навести конкретні приклади і задачі з даної теми;

Методи дослідження:

- аналіз методичної літератури та шкільних підручників математики;
- аналіз системи знань про методи розв'язування планіметричних задач;
- узагальнення та систематизація теоретичних і практичних знань з даної теми.

В ході дослідження була опрацьована психолого-педагогічна та науково-методична література, методичні рекомендації щодо навчання даної теми, розв'язані задачі.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, списку використаних джерел. Перший розділ складається з восьми підрозділів, другий розділ містить чотири підрозділи, третій розділ складається з чотирьох підрозділів.

Загальний обсяг роботи – 61 сторінка.

РОЗДІЛ I. Методи розв'язування планіметричних задач

1.1. Синтетичний метод

Суть цього методу полягає у тому, що виходячи з теореми чи умови даної задачі і використовуючи вже відомі твердження, будується ланцюг міркувань, який збігається з вимогою задачі.

Цей метод доцільно використовувати тоді, коли вже відомий спосіб розв'язання задачі або коли вона легка. Синтетичний метод дуже простий з логічної точки зору, тому такі доведення є переконливі і порівняно короткі. Тому у шкільному курсі математики багато теорем доводять синтетичним методом. Цей метод зручний тоді, коли доведення уже відоме і ми хочемо пояснити його іншим.

Перш за все звернімо увагу на той факт, що синтетичний метод тісно взаємодіє з аналізом Евкліда. Зокрема, алгоритм використання синтетичного методу полягає у тому, що розпочинають з умови, поступово приходячи до висновку.

Успішне використання синтетичного методу можливе у випадку, коли формулювання задачі дає вказівку на те, які висновки випливають з умов, тобто «ланцюг висновків легко відкривається».

В. Болух наводить такий перелік дій під час використання синтетичного методу з використанням аналізу Евкліда: 1. Припустимо, що висновок певної теореми є правильним; 2. Сформулюймо всі можливі наслідки відповідно до цього твердження; 3. Переконаємося в тому, що ці наслідки – очевидні або доведені твердженнями раніше; 4. Візьміть одержаний правильний висновок за вихідне твердження, поміркуйте в зворотному порядку і перейдіть, якщо це можливо, до висновку про правильність вимог теореми, яку необхідно довести.

Досліджуючи математичні методи Т. Дейніченко звертає увагу на найбільш поширений метод, у якому поєднуються підходи аналітичного та

синтетичного методів, а саме на аналітико-синтетичний метод, основними складовими якого є: «аналіз – процедура уявного або реального дроблення, розчленовування предмета (явища, процесу), властивості предмета (предметів) на складові частини, компоненти; тобто дослідження окремих елементів для вивчення властивостей загального; синтез – уявне з'єднання частин, сторін, ознак; узагальнення; угруповання якогось цілого, тобто об'єднання окремих елементів для визначення необхідного» [Дейніченко, с. 67]. У свою чергу виділення окремо аналітичного або синтетичного методу ускладнюється через взаємозв'язок між синтезом і аналізом. Зауважмо, що основою синтетичного методу розв'язання є умова завдання, а аналітичного – її вимоги. Іншими словами: аналіз дає змогу поділити складну задачу на декілька простіших, тоді як синтез об'єднує отримані розв'язки.

На аналітико-синтетичний метод звертає увагу й В. Болух, який описує його наступним чином: спочатку здійснюється пошук доведення за допомогою аналітичного методу, тобто доведення починають від вимоги, проте саме міркування не доводять до логічного кінця, а зупиняючись на певному етапі, починають міркування у протилежному напрямку, тобто розгортають умову з використанням синтетичного методу, і ним же закінчують розв'язок [Болух, с. 53].

Отже, синтетичний метод – один із основних методів у геометрії, який має такий принцип розв'язку: починають з умови, поступово доходячи до розв'язку. Важливим етапом використання синтетичного методу є його взаємодія з аналітичним, що утворює аналітико-синтетичний метод, є те, що від час певного кроку здійснюється міркування в зворотному напрямку.

Приклад. Дано прямокутник, бісектриса ділить більшу сторону на два відрізки 5 см і 7 см. Знайти периметр прямокутника.

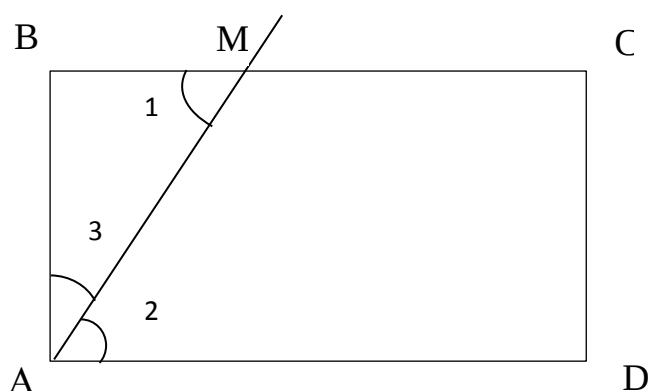
Дано: $ABCD$ – прямокутник;

AM – бісектриса, $M \in BC$;

$BM = 5$ см, $MC = 7$ см (або $BM = 7$ см, $MC = 5$ см).

Знайти: P_{ABCD} .

Розв'язання:



AM – бісектриса прямого кута BAD , $BC \parallel AD$, AM – січна, а тому $\angle 1 = \angle 2$ (як внутрішні різносторонні кути).

AM – бісектриса, а тому $\angle 2 = \angle 3$. Маємо, що $\angle 1 = \angle 3$.

З $\triangle ABM$: $\angle 1 = \angle 3$, тому $\triangle ABM$ – рівнобедрений ($AB = BM$).

1) Якщо $BM = 5$ см і $MC = 7$ см, то $AB = BM = 5$ см і $BC = 5 + 7 = 12$ (см).

Тоді $P_{ABCD} = (5 + 12) \cdot 2 = 34$ (см).

2) Якщо $BM = 7$ см і $MC = 5$ см, то $AB = BM = 7$ см і $BC = 5 + 7 = 12$ (см).

Тоді $P_{ABCD} = (7 + 12) \cdot 2 = 38$ (см).

Відповідь: 34 см або 38 см.

1.2. Аналітичний метод

Суть цього методу полягає у тому, що виходячи з вимоги твердження (задачі чи теореми) і спираючись на вже відомі твердження, будується ланцюг міркувань, який показує, що вимога є результатом умови.

Цей метод дуже ефективний, так як кожен крок учнів цілеспрямований. Тут учні шукають тільки те, що треба, а не те, що можна знайти. При розв'язуванні важкої задачі краще користуватися іншими методами.

Як зазначає Ю. Скрипченко цей метод реалізується у формах висхідного та низхідного аналізів, а також в алгебраїчному методі. Розгляньмо їх детальніше.

Так, висхідний аналіз має на меті довести, що відомі співвідношення (дані в умові) достатні для формулювання висновку задачі [Скрипченко, с. 82]. Загалом метод висхідного аналізу полягає у доборі такого істинного твердження В, що дасть змогу окреслити висновок Х задачі, а потім і такого твердження С, з якого випливає В і т.д. Цей процес триває доти, доки не дійдуть до застосування даних умови задачі. Під час цього не виникає потреби у проведенні інших додаткових досліджень, оскільки висновок задачі формується відповідно до умови, а «правильні посилання не можуть дати неправильний висновок» [Скрипченко, с. 82].

Ю. Скрипченко подає такі першочергові дії розв'язування планіметричних задач з використанням методу висхідного аналізу, в основі якого такі складові: послідовне з'ясування питань і того, що треба знайти чи довести, що для цього достатньо знайти, довести. Зауважмо, що такі питання ставляться до кожного проміжного твердження, якого вимагає задача.

Зокрема, дослідниця стверджує, що висхідний аналіз має методичні переваги серед інших аналізів. Так, до них відносимо: забезпечення свідомого і самостійного пошуку доведення; здатність розвивати логічне мислення; формування цілеспрямованих дій на кожному етапі міркувань [Скрипченко, с. 82].

Наступним видом аналітичного методу є низхідний аналіз, який реалізується у формах недосконалого аналізу та методу доведення від супротивного. Схарактеризуймо детальніше особливості недосконалого аналізу, який застосовується у геометрії для складання плану розв'язання планіметричних задач на доведення і побудову. Суть цього методу полягає у наступному: спершу формують висновок X , який вважають гіпотетично правильним. Наступним етапом є пошук наслідку B , який є вагомою складовою для формулювання твердження X . Ю. Скрипченко зауважує, що «якщо відносно істинності або хибності наслідку B ніякого висновку зробити не можна, то використовуючи дані і наслідок B , одержують новий наслідок C , з яким чинять аналогічно до попереднього» [Скрипченко, с. 82]. Такий алгоритм перетворення висновку використовують доти, поки не отримають необхідний для умови наслідок, який без сумнівів буде істинним або хибним.

У свою чергу В. Болух стверджує, що першочерговим завданням аналітичного міркування є спроба відтворити послідовність руху думки, тому спочатку здійснюється постановка проблеми, яка потребує вирішення, а не формулювання аксіом та раніше доведених тверджень, подібно до синтетичного методу [Болух, с. 54].

Основні етапи, які необхідні для використання аналітичного методу:

1. Запитати: яке раніше відоме твердження стало основою, з якої впливає висновок твердження, яке доводиться?
2. Якщо пошук такого раніше відомого твердження не дав результатів, то потрібно добирати інше, досі не доведене твердження, з якого впливатиме висновок твердження, що доводиться.
3. Потім добирати наступне твердження, з якого впливало попереднє, і т.д., поки не знайдемо таке твердження, яке безпосередньо впливає з умови теореми.
4. Зробити висновок, що це твердження є доведеним, адже виокремлено весь ланцюг достатніх умов для формулювання висновку, який задовольняється в силу його умови [Болух, с. 54].

Отже, аналітичний метод характеризується послідовним розгорнутим способом розв'язання, який дає змогу схарактеризувати проблему й

вирішувати її.

Приклад. Дано опуклий чотирикутник, довести, що середини його сторін є вершинами паралелограма.

Дано: $ABCD$ – чотирикутник;

$L \in AB, AL = LB$;

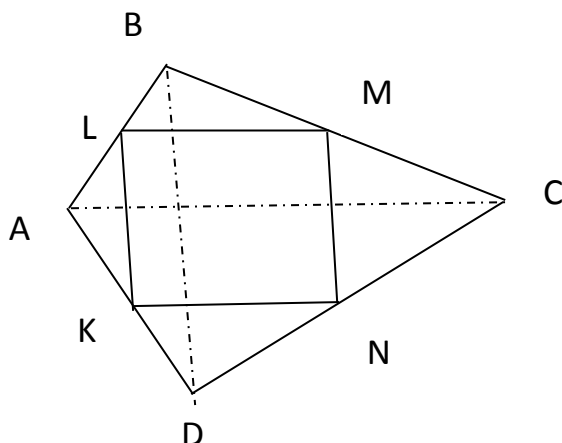
$M \in BC, BM = MC$;

$N \in CD, CN = ND$;

$K \in AD, AK = KD$;

Довести: $KLMN$ – паралелограм.

Доведення:



$ABCD$ – даний чотирикутник. K, L, M, N – середини відповідних сторін.
 AC і BD – діагоналі даного чотирикутника.

У $\triangle ABC$: LM – середня лінія, тому $LM \parallel AC$.

У $\triangle ADC$: KN – середня лінія, тому $KN \parallel AC$.

Тоді:

1) $LM \parallel AC$ і $KN \parallel AC$, звідси $LM \parallel KN$ (за ознакою паралельних прямих).

2) Так само $KL \parallel MN$ (як середні лінії $\triangle ABD$ і $\triangle BDC$ відповідно).

Маємо, що у чотирикутнику KLMN протилежні сторони паралельні, тому він є паралелограмом (за ознакою паралелограма), що й треба було довести.

1.3. Метод від супротивного

Суть цього методу полягає у тому, що виходячи з даного твердження, будуємо нове, заперечивши висновок попереднього. Виходячи з цього протилежного твердження, будуємо ланцюг істинних тверджень доти, поки не отримаємо твердження, яке суперечить умові або припущенню. Ми отримуємо висновок, що протилежне твердження є хибним, а тому початкове є істинним (тут діє такий закон: з двох протилежних тверджень одне є істинним, друге хибним).

Цей метод ще називають *непрямим* методом розв'язування задач.

Задачу вважають розв'язаною, якщо:

- 1) відповідь записано у вигляді числа, виразу або вказано алгоритм побудови, якщо це задача на побудову чи дослідження;
- 2) підтверджено твердження в задачі, якщо це задача на доведення.

Ю. Скрипченко зазначає принцип розв'язання задачі цим методом, так: «припускають, що твердження X_1 , яке протилежне висновку X задачі, є правильним. Потім відповідно до цього припущення формують наслідки B, C, D, U доки, поки не отримають суперечність з умовою A задачі або відомою істиною» [Скрипченко, с. 83]. Отримавши таку суперечність, вважають доведеним висновок задачі.

Варто зауважити, що під час розв'язування задач з використанням методу від супротивного перевіряти оборотність умовиводів немає потреби, адже за умови правильної побудови умовиводів та отримання невірної результату, робимо висновок, що припущення невірне. Зокрема,

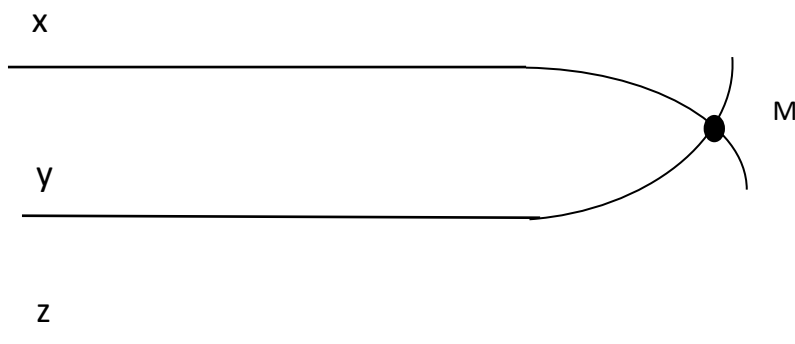
Ю. Скрипченко звертає увагу на недолік у використанні методу доведення від супротивного, який полягає в тому, що виникає складність у виборі наслідків з твердження, яке вважають за правильне, які приведуть до мети. Ю. Скрипченко пояснює цю складність тим, що з будь-якого твердження або даних існує можливість отримати декілька наслідків. Відповідно до цього у результаті невдало зробленого вибору наслідку, постає необхідність будувати новий ланцюг умовиводів [Скрипченко, с.83].

У свою чергу М. Антоненко трактує суть методу від супротивного наступним чином: необхідно довести неможливість будь-якого іншого висновку, окрім доводжуваного. При цьому важливим є факт суперечності припущення, сформульованого на початку міркувань, та висновка з теореми, і зокрема припущення повинне охоплювати всі можливі випадки, крім того, який доводиться. Іноді формулюють припущення, яке є протилежним тому, «яке стверджується теоремою, і зводять його до суперечності з умовою задачі (теореми), або висновком з раніше доведеної теореми, або твердженням аксіоми чи означення» [Антоненко, с. 21].

Отже, метод від супротивного характеризується наявністю двох тверджень, одне з яких гіпотетично правильне, інше – ні. Труднощі у використанні цього методу полягають в тому, що з будь-якого твердження можна отримати декілька висновків.

Приклад. Довести таке твердження: коли дві прямі є паралельні третій, то вони паралельні між собою.

Доведення:



Побудуємо протилежне твердження: існують дві прямі і вони паралельні третій, але не паралельні між собою.

Припустимо, що $x \parallel z$ і $y \parallel z$, але $x \nparallel y$. Тоді $x \cap y = M$.

Ми отримали твердження, яке суперечить аксіомі паралельності: через точку M на площині проходять дві різні прямі, які паралельні третій.

Отже, твердження, яке ми припустили є хибне, а тому початкове твердження – істинне. Тобто дві прямі, паралельні третій є паралельні між собою, що й треба було довести.

1.4. Алгебраїчний метод

Суть цього методу полягає у тому, що проводячи певний аналіз задачі на побудову, положення шуканого елемента на площині ми знаходимо за допомогою алгебри.

Ю. Скрипченко зазначає, що алгебраїчний метод розв'язування задач полягає в тому, що вихідним етапом є шукане, для визначення якого необхідно скласти рівняння. Відповідно до складеного рівняння здійснюється аналіз, який дає змогу встановити уже відомі величини, а які ще потрібно знайти. За умови не охоплення рівнянням усіх зв'язків між даними та шуканими в умові задачі, то використовуючи ці дані й необхідні теоретичні відомості, складають нове рівняння, що дозволяє знайти проміжні невідомі. Зокрема, цим розв'язком повинен забезпечуватися й розв'язок попереднього рівняння. Такий процес триває доти, поки всі невідомі величини не стануть відомими [Скрипченко, с. 83].

Звернімо увагу на те, що використання алгебраїчного методу можливе для пошуку розв'язку задач на побудову, обчислення та доведення. З його використанням можливо спростувати неправильні твердження, а також з'ясувати, чи існує можливість виконання розв'язку задачі на побудову циркулем та лінійкою. Як стверджує Ю. Скрипченко алгебраїчний метод – один з найефективніших, проте не завжди існує можливість його раціонального застосування, адже іноді розв'язування планіметричних задач здійснюється з побудовою дуже складних рівнянь, які учні практично не можуть побудувати [Скрипченко, с. 84].

Отже, алгебраїчний метод полягає у пошуку розв'язку, який вимагає складання рівняння, відповідно до якого здійснюється аналіз, що дає змогу встановити відомі і невідомі величини. Цей метод використовується у планіметричних задачах на доведення, побудову та обчислення.

Приклад. Дано прямокутний трикутник, його периметр дорівнює 48 см. Гіпотенуза відноситься до катета як 5 : 3. Знайти всі сторони трикутника.

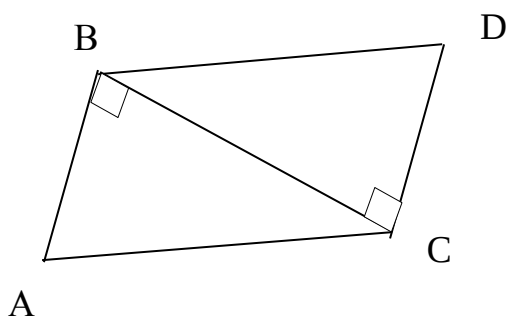
Дано: $\triangle ABC$ ($\angle B$ - прямий);

$$P_{\triangle ABC} = 48 \text{ см};$$

$$AC : BC = 5 : 3.$$

Знайти: AB , BC , AC .

Розв'язання:



Нехай коефіцієнт пропорційності дорівнює m . Тоді $AC = 5m$, а $BC = 3m$.

$$AC^2 = BC^2 + AB^2;$$

$$25m^2 = 9m^2 + AB^2;$$

$$AB = \sqrt{25m^2 - 9m^2} = 4m;$$

$$AB > 0, m > 0.$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 4m + 3m + 5m = 12m;$$

$$12m = 48;$$

$$m = 4;$$

$$AB = 4 \cdot 4 = 16 \text{ (см)};$$

$$BC = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (см)};$$

$$AC = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 16 см, 12 см, 20 см.

1.5. Метод площ

Як стверджує М. Антоненко особливістю використання методу площ є те, що площа може бути виражена різними формулами, під час порівняння яких, знаходять шукані величини.

У свою чергу А. Бистрянцева виділяє три типи задач, що розв'язуються методом площ. До першого типу задач належать ті, у яких площа фігури знаходиться двома способами, а саме складанням рівняння та знаходженням невідомої величини. Цей тип вважається найпростішим та підготовчим. До другого типу відносяться задачі, розв'язування яких відбувається з використанням властивості адитивності площі. Третій тип задач характеризується застосуванням властивостей відношення площ. Він є найбільш складним у методі площ типом задач, у розв'язанні яких існує необхідність одночасного використання властивості адитивності площі і властивості відношень площ фігур [Бистрянцева, с. 34].

Зокрема, відповідно до описаних типів задач, А. Бистрянцева пропонує такі прийоми з використанням методу площ: прийом, в основі якого є знаходження площі фігури з використанням двох способів; прийом, в основі якого є використання властивості адитивності площі; прийом, в основі якого є використання властивостей відношень площ і відповідних відрізків. Так, для прийому, в основі якого є пошук площі фігури з використанням двох способів, реалізується у наступних діях: 1) складання виразу для площі фігури за умовою задачі; 2) складання виразу для площі фігури з використанням невідомого елемента; 3) складання рівності з отриманих виразів для отримання площі фігури; 4) розв'язування отриманого рівняння і знаходження невідомої в умові задачі величини [Бистрянцева, с. 34].

Для другого прийому, в основі якого є використання адитивності площ, характерні наступні дії: 1) поділ фігури на частини, орієнтуючись на умови (вимоги) задачі; 2) складання відповідних виразів для площ фігур, які отримані після поділу; 3) складання виразу для площі фігури як суми площ фігур, які її складають; 4) знаходження площі вихідної фігури, використовуючи дані

задачі; 5) складання рівності отриманих виразів для площі фігури; 6) розв'язування отриманого рівняння і знаходження невідомої в задачі величини [Бистрянцева, с. 34].

Третій прийом, який містить дії, що виконуються з використанням відношень відрізків і площ, які дозволяють виділити сутність цього прийому і дії, що входять до нього: 1) співвідношення шуканих відрізків з площею фігур, елементами яких вони є, із подальшим застосуванням виокремлених властивостей; 2) знаходження відношення між площами цих фігур [Бистрянцева, с. 35].

Отже, метод площ реалізується у трьох прийомах, для кожного з яких існує відповідний алгоритм дій.

Приклад. Відомо, що сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см, 15 см. Знайдіть висоту, проведену до другої сторони трикутника.

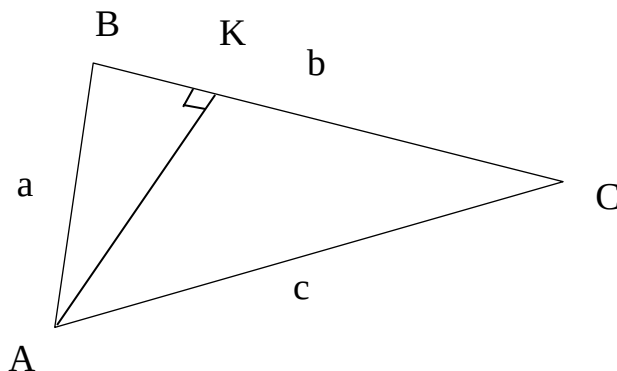
Дано: $\triangle ABC$, $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

Знайти: $AK = h_b$.

Розв'язання:

Нехай $AB = a = 13$ см, $BC = b = 14$ см, $AC = c = 15$ см.

AK – висота.



Скористаємося формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

за іншою формулою:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b.$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

$$84 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_b$$

$$h_b = AK = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 12 см.

1.6. Метод векторів

В. Швець характеризує метод векторів, зауважуючи, що він полягає у певному геометричному розміщенні точок, прямих і площин у просторі, в яких існує необхідність записати мовою векторів, а саме – у вигляді векторної рівності. І, зокрема, наповнити геометричним змістом мову векторних формул і рівностей, тобто відтворити ту чи іншу векторну рівність мовою геометрії, що надасть їй геометричного звучання [Швець, с. 241].

Зокрема, В. Швець звертає увагу на трактування вектора як напрямленого відрізка, що окреслює виразну наочність цих об'єктів та операцій, важливість цих дій пояснюється тим, що велику роль під час формування поняття відіграє саме образний компонент, що породжує необхідність в таких означеннях, що дозволять уяві легко конструювати зразки означених об'єктів [Швець, с. 241].

Понятійний апарат векторного методу становлять такі поняття як «вектор, початок і кінець вектора, співнаправлені та протилежно напрямлені вектори, абсолютна величина вектора (модуль вектора), рівні вектори,

нульовий вектор, координати вектора, проекція вектора на вісь, колінеарні вектори, одиничний вектор, координатні вектори (орти), скалярний добуток векторів, кут між двома ненульовими векторами» [Швець, с. 242].

Основними діями в методі векторів є наступні: додавання та віднімання векторів, множення вектора на число; зображення вектора в вигляді суми, різниці двох векторів; у вигляді добутку вектора на число; заміна вектора йому рівним за допомогою паралельного перенесення; розкладання вектора по осях; перехід від співвідношення між векторами до співвідношення між довжинами і виконання оберненої дії; вираження довжини вектора через скалярний квадрат; вираження величини кута між векторами через скалярний добуток векторів і довжин цих векторів [Швець, с. 242].

Т. Коростіянець до складу діяльності, що спрямована на використання векторного методу, відносить наступні розумові дії: 1) перетворення на мову векторів відношень між фігурами геометричної мови; 2) дії, тобто операції, які проводяться над векторами; 3) подання вектора як суми чи різниці двох векторів, а також як добутка вектора на число; 4) перетворення векторних рівностей за допомогою законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку; 5) перехід, що відбувається від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами [Коростіянець, с. 149].

У свою чергу М. Антоненко поділяє задачі на застосування векторного апарату на такі два види: афінні і метричні. Так, розв'язування афінних задач відбувається з використанням лінійних операцій над векторами та їх властивостей, а саме додавання векторів та множення вектора на число. Тоді як розв'язування метричних задач реалізується з використанням поняття скалярного добутку векторів. У таких задачах необхідно знайти довжину вектора, а також величину кута між векторами [Антоненко, с. 39].

Отже, метод векторів характеризується певним геометричним розміщенням точок, прямих і площин у просторі, в яких існує необхідність записати мовою векторів, тобто у вигляді векторної рівності.

Приклад. Дано опуклий чотирикутник, довести, що середини його сторін є вершинами паралелограма.

Дано: $ABCD$ – чотирикутник;

$L \in AB, AL = LB;$

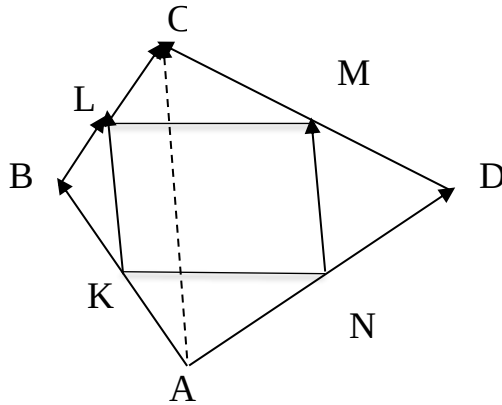
$M \in BC, BM = MC;$

$N \in CD, CN = ND;$

$K \in AD, AK = KD;$

Довести: $KLMN$ – паралелограм.

Доведення:



Замінімо відрізки векторами:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{KB}.$$

Додамо вектори за правилом трикутника:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{KL}.$$

$$\overrightarrow{KB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ (} K \text{ – середина } AB \text{)} \text{ і } \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (} L \text{ – середина } BC \text{)}.$$

$$\text{Тоді } \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Отже, } \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \text{ Так само } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Тому $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$. Вектори співнаправлені, лежать на паралельних прямих і мають однакову довжину.

Тобто, $KLMN$ – паралелограм.

1.7. Метод координат

Наступним методом розв'язку планіметричних задач є метод координат, який полягає у способі визначення положення точки, фігури або тіла на площині за допомогою використання чисел або інших символів.

Варто зауважити, що метод координат дає змогу розв'язувати геометричні задачі використовуючи засоби алгебри, зводити побудови до обчислень, а також координатне розв'язання охоплює всі можливі частинні випадки. В. Швець виділяє такий понятійний апарат координатного методу, на прикладі прямокутної системи координат: абсциса та ордината, які розташовані в певному порядку і описують положення точки на прямій, на площині, в просторі; координатна пряма; координатна площина [Швець, с. 229].

Звернімо увагу на алгоритм використання методу координат під час розв'язування задач, який наводить В. Швець: 1) переклад задачі на мову координат; 2) перетворення аналітичного виразу; 3) зворотній перехід, тобто переклад координатної мови на мову, в термінах якої сформульована задача [Швець, с. 230].

У свою чергу М. Антоненко подає власний алгоритм розв'язування геометричної задачі методом координат: а) переформулювання умови задачі на умову алгебри; б) застосування законів алгебри до знайдених математичних залежностей; в) інтерпретація кінцевого результату в потрібній термінології [Антоненко, с. 36].

Отже, метод координат – це такий геометричний метод, в основі якого є спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині через використання чисел або інших символів.

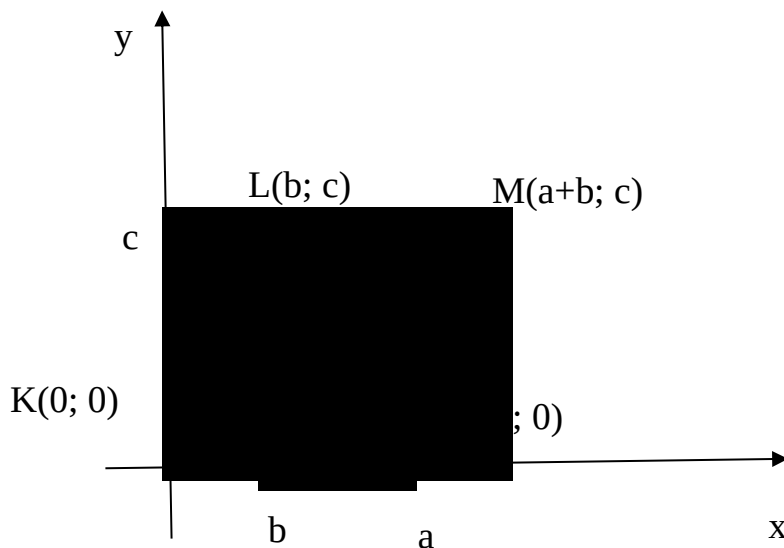
Приклад. Дано паралелограм, у якого діагоналі рівні. Довести, що він прямокутник.

Дано: KLMN – паралелограм;

$$KM = LN;$$

Довести: KLMN – прямокутник.

Доведення:



Помістимо паралелограм у прямокутну систему координат так, щоб вершини мали такі координати: $K(0; 0)$, $L(b; c)$, $M(a+b; c)$, $N(a; 0)$, де $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

Відомо, що $KM = LN$. Знайдемо відстані між точками K і M , L і N через їхні координати:

$$\overline{KM} = \sqrt{(a + b - 0)^2 + (c - 0)^2};$$

$$\overline{LN} = \sqrt{(a - b)^2 + (0 - c)^2}.$$

$$\text{Маємо: } (a + b)^2 + c^2 = (a - b)^2 + c^2;$$

$$4ab = 0.$$

$a > 0$, $b = 0$, тобто точка $L(b; c)$ лежить на осі ординат. Тому кут LKN – прямий.

Маємо, що паралелограм $KLMN$ – прямокутник.

1.8. Метод геометричних перетворень

Метод геометричних перетворень є одним з найдавніших у математичній науці. Т. Коростіянець зазначає, що теорія геометричних перетворень сформувалась відповідно до досліджень законів зображення предметів на площині. Дослідниця трактує суть цього методу так: розглянути поряд з наведеними фігурами їх образи, які отримані з використанням певного перетворення.

Зокрема, Т. Коростіянець стверджує, що застосування геометричних перетворень можливе не лише для виконання конкретних задач, які ґрунтуються властивостях різних за типом перетворень, а й для розв'язання інших типів геометричних задач, серед яких і задачі на побудову [Коростіянець, с. 138].

І. Ленчук зазначає, що ідея методу геометричних перетворень полягає в тому, що на початковому етапі розв'язування задачі, а саме під час проведення аналізу, поруч з наявними в умові фігурами і тими, що необхідно побудувати, розглядаються й ті, що одержані із заданих чи шуканих фігур з використанням того чи іншого виду перетворення. Варто зауважити, що вибір перетворення пояснюється необхідністю використання такого виду, який спростив би побудову задачі до елементарної чи більш простої.

І. Ленчук виділяє різновиди методу геометричних перетворень відповідно до того, яке перетворення використано, до цих різновидів належить «метод паралельного перенесення, повороту відносно точки на даний кут, осьової симетрії чи подібності» [Ленчук, с. 37].

Зауважмо, що деякі з таких геометричних перетворень мають властивість переводити окремі з відомих елементів одночасно із шуканим у

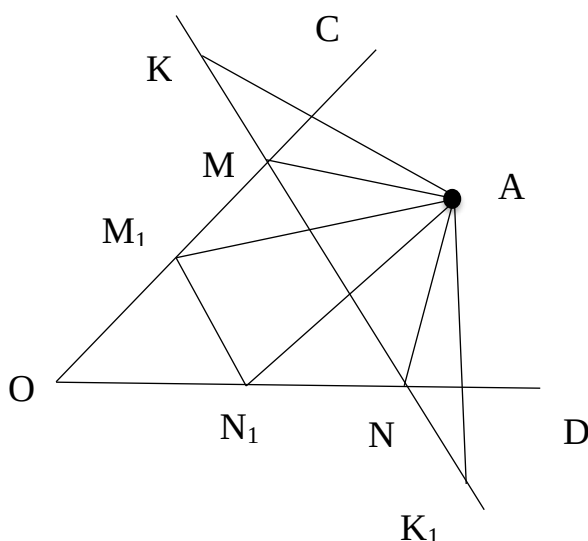
такий спосіб, що їхні образи, перетинаючись з іншими відомими елементами, дадуть змогу визначити ключ до розв'язання задачі.

І. Ленчук, подібно до Т. Коростіянець звертає увагу на використання методу геометричних перетворень для розв'язку задач на побудову, і наводить такий тип перетворень для розв'язування планіметричних задач згаданого типу як паралельне перенесення. Використання цього методу властиве здебільшого для об'єднання роз'єднаних частин різних фігур. Найчастіше він використовується для побудови багатокутників. І. Ленчук стверджує, що паралельне перенесення доцільно трактувати як еквівалент поняття вектора, оскільки одне визначається через інше [Ленчук, с. 37].

Отже, метод геометричних перетворень передбачає розгляд поряд з наведеними фігурами їх образів, які отримані з використанням певного перетворення. Аналізований метод дає змогу пошуку ключа у розв'язку задачі з використанням різних способів, серед яких паралельне перенесення, що здебільшого використовується для побудови багатокутників.

Приклад. Дано точку A , яка знаходиться у середині гострого кута COD . На сторонах кута побудуйте такі точки M і N , щоб периметр $\triangle AMN$ був найменший.

Розв'язання:



Аналіз. Нехай $\triangle AM_1N_1$ – шуканий і відома вершина трикутника – точка А.

Потрібно знайти точки M_1 і N_1 .

Точки M_1 і N_1 лежать на сторонах ОС і OD відповідно.

Будуємо точки К і K_1 – симетричні відносно сторін $\angle COD$.

Будуємо відрізки AM_1 , AN_1 , KK_1 .

$$P_{\triangle AM_1N_1} = AM_1 + M_1N_1 + AN_1.$$

Коли точки К, M_1 , N_1 , K_1 будуть лежати на прямій KK_1 , тоді довжина ламаної $KM_1N_1K_1$ буде найменшою.

Тому точками перетину сторін $\angle COD$ з прямою KK_1 будуть точки M_1 і N_1 .

Побудова. Побудуємо:

- а) симетричні точці А відносно сторін $\angle COD$ точки К і K_1 ;
- б) пряму KK_1 ;
- в) точки перетину прямої KK_1 із сторонами $\angle COD$ – точки М і N.

$\triangle AMN$ – шуканий.

Відповідь. $\triangle AMN$ – шуканий.

Висновки до розділу

Проаналізувавши методи розв'язування планіметричних задач, узагальнимо їх:

- Синтетичний метод – один із основних методів у геометрії, який має такий принцип розв'язку: починають з умови, поступово доходячи до розв'язку. Важливим етапом використання синтетичного методу є його взаємодія з аналітичним, що утворює аналітико-синтетичний метод, є й те, що під час певного кроку здійснюється міркування в зворотному напрямку.
- Аналітичний метод характеризується послідовним розгорнутим способом розв'язання, який дає змогу схарактеризувати проблему й вирішувати її.

- Метод від супротивного характеризується наявністю двох тверджень, одне з яких гіпотетично правильне, інше – ні. Труднощі у використанні цього методу полягають в тому, що з будь-якого твердження можна отримати декілька висновків.
- Алгебраїчний метод полягає у пошуку розв'язку, який вимагає складання рівняння, відповідно до якого здійснюється аналіз, що дає змогу встановити відомі і невідомі величини. Цей метод використовується у планіметричних задачах на доведення, побудову та обчислення.
- Метод площ реалізується у трьох прийомах, для кожного з яких існує відповідний алгоритм дій.
- Метод векторів характеризується певним геометричним розміщенням точок, прямих і площин у просторі, які існує необхідність записати мовою векторів, тобто у вигляді векторної рівності.
- Метод координат – це такий геометричний метод, в основі якого є спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині через використання чисел або інших символів.

Метод геометричних перетворень передбачає розгляд поряд з наведеними фігурами їх образів, які отримані з використанням певного перетворення. Цей метод дає змогу пошуку ключа у розв'язку задачі з використанням різних способів, серед яких паралельне перенесення, що здебільшого використовується для побудови багатокутників.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ШКІЛЬНИХ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Геометричні перетворення

Геометричні перетворення є значущим розділом геометричного курсу, але через ряд об'єктивних причин їм приділяється дуже мало уваги. Як стверджує О. Чашечникова, ідея геометричних перетворень є фундаментальною для математики та різних її програм. Ця ідея тісно пов'язана з концепцією «функції», де точка однієї фігури відповідає одній і тільки одній точці іншої фігури за певним правилом [30].

Т. Коростіянець звертає увагу на становлення методу геометричних перетворень у шкільному курсі. Так, у 1960-х роках, коли активізувався рух за реформу математичної освіти, інтерес до геометричних перетворень у шкільному курсі знову зріс. Вони стали провідними темами геометрії та інструментом для доведення теорем і вирішення задач. Були розроблені відповідні підручники, такі як планіметрія за редакцією А. Колмогорова. Проте спроба трактувати геометричні перетворення як зображення площини (або простору), з використанням термінології та символіки множини, призвела до значної формалізації матеріалу і, як наслідок, до труднощів у сприйнятті його, і ці підручники не були схвалені педагогічною громадськістю. У поточній програмі та підручниках геометричні перетворення залишаються єдиними з основних тем, але їх роль і значення в порівнянні з попередніми підручниками значно зменшилися. Програма і дії підручників передбачають вивчення геометричних перетворень і подібності фігур у курсі планіметрії, який вивчається в 9-му класі [13, с. 138].

Головним призначенням вивчення геометричних перетворень є ознайомлення учнів з іншими видами рухів (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення), подібністю та гомотетією, їх властивостями, введення загального поняття про рівність і подібність фігури та використання окремих видів перетворень для розв'язування завдань. Учні

повинні розуміти сутність кожного з наведених геометричних видів перетворень, знати їх властивості, ознаки подібності трикутників і вміти застосовувати їх для вирішення простих завдань.

У шкільному курсі геометрії вивчають також рух і перспективно-подібні перетворення, такі як гомотетія. Важливим є введення поняття перетворення на рівні, доступному для розуміння учнів, на інтуїтивному рівні. Крім того, усвідомлюємо, що при подібних перетвореннях відстань між точками відповідних фігур (образу та прообразу) знаходиться у відмінності від коефіцієнта подібності, позначеного як " k ". У разі, коли " k " дорівнює одиниці – це перетворення подібності [13, с. 138].

Для кращого розуміння учнями специфіки перетворень, центральної та осьової симетрії, повороту та паралельного перенесення, важливо використовувати не лише комп'ютерні технології, але й рухомі планіметричні моделі. Ці моделі можуть бути виготовлені як вчителем, так і самими учнями і використовуватися для наглядного пояснення центральної та осьової симетрії, поворотів і паралельних перенесень.

У шкільному курсі геометрії розглядаються два основних види геометричних перетворень: перше – це рухи, які зберігають відстань між точками (це може бути рух на площині або в просторі); другий вид – це перетворення подібності, у яких змінюється відстань між точками на одну й ту саму кількість разів, цей процес має назву – гомотетія [13, с. 138].

Т. Коростіянець наводить ряд навичок необхідних для успішного розв'язання геометричних задач: а) будувати геометричні фігури за допомогою конкретних видів перетворення; б) визначати вид перетворення, спираючись на характеристики геометричних фігур; в) встановити положення відповідних точок шляхом обчислення або геометричної побудови при певному вигляді перетворення. Властивості геометричних перетворень стають ефективними інструментами для виконання завдань тільки у випадку, коли учні володіють цими навичками [13, с. 139].

Для формування цих навичок корисно вирішувати завдання на геометричну побудову. Задачі такого типу М. Антоненко умовно поділяє на дві групи:

1. Побудова відповідних точок за заданим геометричним перетворенням.
2. Побудова геометричної фігури, для якої потрібно знайти відповідне перетворення [1, с. 23].

Зокрема, М. Антоненко звертає увагу на метод симетрії точки, який використовується в задачах, які стосуються центрально-симетричних фігур або відрізків із серединою в даній точці та кінцями на двох визначених прямих.

Суть розв'язання полягає в наступному:

- а) Знаходження положення прямої, яка проходить через центр симетрії двох геометричних фігур;
- б) Визначення місця розташування точки на одній із фігур, якщо відомі центр їх симетрії та положення початкової точки [1, 23].

У загальному контексті ідея методу геометричного перетворення виникає в тому, що при аналізі завдання, на першому етапі розв'язання враховуються не лише задані фігури і ті, які потрібно побудувати, але також інші фігури, які можуть бути отримані із заданих або шуканих фігур (або їхніх частин) за допомогою різних геометричних перетворень. У кожному конкретному випадку обирається таке перетворення, яке спрощує завдання до елементарної задачі або, принаймні, до простої побудови.

Залежно від того, яке саме геометричне перетворення використовується, можна говорити про різновиди методу геометричних перетворень. Наприклад, це може бути метод паралельного перенесення, де фігура зсувається паралельно відносно себе, метод повороту відносно точки на заданий кут, метод осьової симетрії, коли фігура відображається відносно осі, чи метод подібності, включаючи гомотетію, де фігура збільшується або зменшується в певну кількість разів зберігаючи пропорції. Останній метод дозволяє розглядати геометричні задачі з більш абстрактної точки зору, спрощуючи їх

розв'язання і з використанням геометричних перетворень для досягнення бажаного результату [17, с. 39].

Як стверджує І. Ленчук, вибір правильного геометричного перетворення для розв'язання конкретної задачі є справжнім мистецтвом, і він може залежати від багатьох факторів, таких як структура задачі, властивості, доступні геометричні інструменти та досвід розв'язування подібних задач, що, у свою чергу, створює певні труднощі. Дослідник моделює наступні ситуації, які є типовими (без претензій на завершеність та повноту) для розуміння. Доречне використання цих ситуацій буде спрямовувати учня на правильний шлях [17, с. 39].

Ситуація 1. У таких випадках, коли фігури в умовах завдання віддалені одна від однієї, вигідно використовувати рух, щоб наблизити їх і створити нову фігуру, яку легше побудувати. Це особливо корисно в задачах побудови складних багатокутників, що дає змогу звести розв'язок задачі до побудови певного трикутника з відомими трьома складовими.

Ситуація 2. Якщо виникла задача в побудові точки, яка є спільною для двох ліній, одна з яких отримана з іншої за допомогою певного перетворення, використання цього перетворення може бути ключем до розв'язання.

Ситуація 3. Якщо можна побудувати фігуру F' , з якою шукана фігура F може бути одержана за допомогою певного геометричного перетворення. Це особливо корисно, коли єдиний невідомий елемент у фігурі F - це відрізок, інші параметри фігури відомі. У цьому випадку, І. Ленчук вважає доречним скористатися подібністю (зокрема, гомотетією).

Ситуація 4. Іноді використання перетворення, яке переводить шукану фігуру в себе, може спростити задачу. Це особливо корисно, коли це перетворення одночасно включає окремі елементи фігури, і їхні образи при взаємодії з іншими відомими елементами дають ключ до розв'язання задачі [17, с. 40].

Геометричне перетворення є великим розділом геометрії, який вивчають у 9 класі, але деякі основні поняття з цієї теми передбачено для вивчення у 8

класі, зокрема подібність трикутників. Метод геометричних перетворень є продуктивним способом розв'язання геометричних задач. Геометричні перетворення, разом із засобами алгебри, такими як вектори і координати, а також ознаками рівності трикутників, використовують як основний інструмент для доведення геометричних тверджень. Вони сприяють розвитку і формуванню графічних навичок учнів, і ці знання стають корисними в подальшому вивченні геометрії в старших класах [10, с. 129].

Геометричне перетворення є основою для розуміння різноманітних геометричних концепцій з однієї загальної точки зору. Вони є моделями для розуміння двох основних понять – функцій і перетворення площини, і це дозволяє встановити зв'язок між алгеброю і геометрією [10, с. 129].

Основними навчальними завданнями цієї теми є формування вміння розв'язувати практичні задачі, а також розвиток усвідомлення учнями необхідності доведення геометричних тверджень.

Отже, метод геометричних перетворень може бути ефективним інструментом для розв'язання різних планіметричних завдань у школі, включаючи завдання на побудову, доведення теорем, обчислення відстаней і кутів тощо. Він вимагає від математиків абстрактного мислення та здатності бачити взаємозв'язки між геометричними об'єктами.

2.2. Методи допоміжних елементів

М. Антоненко звертає увагу на ті випадки, коли під час розв'язування задачі неможливо зв'язати дані та шукані величини, і пропонує використовувати метод введення допоміжного елемента. Цей допоміжний елемент може бути представлений у формі відрізка, кута, площі або об'єму. Під час розв'язування задачі можуть виникнути дві ситуації: а) необхідно застосувати (розрахувати) допоміжний елемент; б) допоміжний елемент не потребує збільшення числової величини [1, с. 31].

Допоміжний відрізок як допоміжний елемент є зручним для використання під час розв'язання планіметричних задач, особливо, коли

маємо справу з подібними фігурами. Тоді за допомогою пропорцій ми можемо скласти відповідне рівняння. М. Бурда зазначає: якщо можливо виразити шукані або відомі елементи фігури через тригонометричні функції, то можемо використати допоміжний кут. Як стверджує дослідник, розв'язування багатьох задач вимагає вміння користуватися допоміжним трикутником (або ланцюгом нерівних трикутників) [9]. М. Бурда розглядає шуканий елемент фігури як складову певного трикутника, який можна розв'язати. Далі автор пропонує знайти на малюнку до задачі такий трикутник (або побудувати його, провівши потрібні відрізки). Задача вважається розв'язаною тоді, коли знайдена величина цього трикутника відповідає умові. Якщо ні, відшукуємо інший визначений трикутник, враховуючи знайдену величину, і так доти, поки не досягнемо трикутника, де сторона, кут або інший елемент є розв'язком задачі [9]. У свою чергу рівні допоміжні трикутники можемо використати для обґрунтування рівності відрізків (кутів), і відповідно включаємо їх у рівні трикутники. За відсутності на малюнку таких трикутників, ми їх будуємо. При доведенні метричних співвідношень, що відповідають рівності другого ступеня, ми вводимо подібні допоміжні трикутники. Також коло може виступати як допоміжний елемент: на малюнку до задачі спочатку знаходимо геометричну фігуру, яку можна описати або вписати в коло, а потім використовуємо властивості хорди, діаметрів, вписаних кутів, кутів з вершиною в середині кола і так далі. При доведенні метричних співвідношень, що мають у своєму складі рівності другого степеня, доцільним є введення подібних допоміжних трикутників [9].

М. Бурда зауважує, що у навчальних підручниках категорії завдань розділені за типами використаних допоміжних елементів. Завдання в межах усіх категорій вирішуються аналогічними методами, і всі ці категорії мають спільний підхід до їх розв'язання. Тому навчання вирішувати таке завдання включає в себе формування методів розв'язання завдань, які віднесені до окремих категорій, та подальше уточнення й узагальнення цих методів за мірою освоєння навчального матеріалу [9].

Зокрема, дослідник стверджує, що для досягнення ефективності навчання важливо структурувати завдання та групувати їх у змістовні блоки відповідно до рівня складності (зокрема, специфіка використання додаткових даних) та методів їх розв'язання. Процес навчання з використання допоміжних елементів передбачає наступні кроки: 1) розв'язування типових задач, де використовуються всі етапи методики; 2) виокремлення методу виконання; 3) закріплення навичок застосування методики завдання; 4) уточнення або загальний огляд методики в процесі навчання [9].

Д. Бевз подібно до М. Бурди, серед аналітичних методів виділяє два підходи: метод допоміжного відрізка і метод допоміжної площі. Обидва ці методи обґрунтовуються введенням додаткових елементів, щоб сформулювати рівняння [3, с. 17].

Метод допоміжного відрізка зручно використовувати, коли фігури є подібними. У такому випадку за допомогою пропорцій або геометричних конструкцій створюється рівняння, де допоміжний відрізок стає членом рівняння, і його значення може бути легко визначено [3, с. 17].

Введення площі як допоміжного елемента подібне до введення відрізка. Порівнюючи площі різних фігур, можна отримати рівняння, що складається з невідомих елементів задачі або співвідношення у формі формули. Зручно порівнювати площі, де сума або різниця площі дає площу заданої фігури, або де відношення площі фігури має важливе значення, особливо коли лінійні елементи є шуканими або складовими частинами складеними у формулі [3, с. 17].

Отже, допоміжні елементи в планіметричних задачах – це геометричні об'єкти або конструкції, які додаються до вихідної задачі з полегшенням її розв'язання. Ці допоміжні елементи можуть бути побудовані на основі вихідних даних або введені для вирішення конкретного завдання. Важливо вміти правильно вибрати допоміжні елементи та розуміти їхні геометричні властивості, щоб успішно використовувати цей метод.

2.3. Методи допоміжних побудов

Для розв'язання певних геометричних задач необхідно використати допоміжні побудови, які включають побудову відрізків та кутів, які не були зазначені у вихідних умовах задачі. Це виконується з метою створення допоміжних геометричних фігур. Існують певні типи додаткових побудов, які застосовуються досить часто.

Теорему синусів було вперше наведено астрономом із Хорезма аль-Біруні в XI столітті, а в європейській математиці почали використовувати її з XVI століття. Як зазначає Т. Коростіянець підручнику О. В. Погорелова ця теорема доводиться за допомогою додаткових побудов – спочатку проводиться висота з однієї вершини трикутника (для доведення однієї частини рівності), а потім з іншої вершини (для доведення іншої частини рівності) [13, с. 123].

Іноді побудова геометричної фігури може бути важкою проблемою тільки через те, що її частини розташовані далеко одна від однієї, і це робить важким включення всіх деталей на малюнку. У таких випадках зручно використовувати метод одночасного перенесення. Суть цього методу полягає в тому, що одну з частин фігури паралельно переносять на певну відстань у певному напрямку, що дозволяє створити допоміжну фігуру, яку легко побудувати. Після побудови допоміжної фігури виконується паралельне перенесення в протилежному напрямку на ту саму відстань, щоб отримати бажану геометричну фігуру [8].

Зокрема, характерною особливістю розв'язання геометричних завдань є використання допоміжних побудов, які допомагають звести складну задачу до більш простих, елементарних завдань. Допоміжні побудови іноді впливають із самої задачі. Наприклад, якщо в задачі описано пряму, що відноситься до кола, то природно провести радіус у точку дотику та використати факт, що цей радіус перпендикулярний до дотичної. Але у вирішенні нетривіальних завдань знаходження відповідних допоміжних конструкцій може бути непростим. Тут важливий досвід, креативність і геометричне інтуїтивне розуміння, щоб

придумати, які додаткові лінії або точки слід ввести. Також вміння використовувати геометричні перетворення, які допомагають побудові додаткових фігур, наприклад, ключ до розв'язку низки задач дає допоміжний трикутник, який можна отримати шляхом повороту елементів заданої фігури.

Зокрема, метод додаткових побудов включає такі дії:

1. Проведення прямої лінії через дві задані точки.
2. Продовження відрізка або відрізків на певну відстань або до їх перетину з певною прямою.
3. Проведення через задану точку прямої, яка паралельна або перпендикулярна до даної прямої.

Цей метод використовується головним чином, щоб спростити задачу, перетворити її на попередньо вирішену або більш просту. У додатковому процесі побудови формуються нові геометричні фігури, які не дозволяють використовувати більше формул і теорем для розв'язання задачі [15, с. 131].

Отже, допоміжні побудови – це важливий інструмент при розв'язанні геометричних задач, і вони допомагають математикам отримати більше інформації про геометричні об'єкти та їх взаємозв'язки. Ці побудови використовують для спрощення задачі, отримання додаткової інформації або встановлення взаємозв'язків між геометричними об'єктами.

2.4. Векторні методи

Векторний метод – є одним із основних методів розв'язування планіметричних задач у школі. При розв'язанні завдань за допомогою векторного методу необхідно дотримуватися конкретних правил, які представляють собою специфічні векторні відношення. М. Антоненко до таких правил зараховує: правила паралельного перенесення та його властивості, умови рівності двох векторів, правила додавання векторів і множення вектора на число, формули для обчислення довжини вектора, скалярного добутку векторів, умови перпендикулярності та колінеарності

векторів (як для площини, так і для простору). У зв'язку з використанням декартових координат деякі з цих правил виражаються не тільки в геометричній формі, але і в координатній формі. Це дозволяє більш раціонально розв'язувати багато геометричних задач [1, с. 39].

Хоча не існує загального алгоритму розв'язання завдань векторним методом, часто корисно використовувати такі прийоми:

а) "векторизувати" умову задачі, тобто виразити умову у векторному вигляді; б) написання векторів у вибраних позначеннях (або координатах); в) виконання необхідних операцій з векторами відповідно до правил; г) пояснити знайдений результат геометрично, надаючи йому інтерпретацію в контексті задачі. Ці підходи допомагають систематизувати та спростити процес розв'язання геометричних задач за допомогою векторів [1, с. 39].

Чим більше учні знають про властивості векторів, тим більше можливостей вони мають для виразного запису геометричних взаємозв'язків у вигляді векторних рівностей. Це, у свою чергу, розширює коло геометричних задач, які вони можуть успішно розв'язувати за допомогою аналізованого методу. Для того, щоб ефективно використовувати векторний метод, важливо навчити їх складати таблиці геометричних співвідношень та відповідних векторних рівностей. Такі таблиці можна демонструвати на уроках, коли вивчаються конкретні властивості векторів, але для більш детального вивчення цього підходу можна проводити додаткове заняття або позакласну роботу. Така практика допомагає учням зрозуміти як використовувати вектори для розв'язання різних геометричних задач і розвиває їх аналітичні навички.

Зокрема, В. Швець виділяє основні етапи у формуванні навичок використання векторного методу в учнів можуть бути такими:

1. Перший етап – підготовчий. На цьому етапі відбувається оволодіння ключовими поняттями та основними діями, пов'язаними з векторами.
2. Другий етап – мотиваційний. Завданням цього етапу є демонстрація важливості та застосовності методу векторів. Це дає учням зрозуміти, чому цей метод є корисним для їхньої навчальної програми.

3. Третій етап – орієнтувальний. На цьому етапі пояснюється сутність векторного методу і виділяються основні його компоненти за допомогою прикладу задачі, розв'язаної векторним методом.
4. Четвертий етап – оволодіння компонентами методу. Метою цього етапу є формування окремих компонентів застосування методу через виконання спеціально обраних завдань. Спочатку учні вирішують завдання, пов'язані з одним компонентом, а потім поступово переходять до більш складних, які включають кілька компонентів.
5. П'ятий етап – формування методу в "цілому". На цьому етапі учні визначають зміст вправ і розв'язують задачі, які вимагають застосування всіх компонентів векторного методу [33, с. 242].

Основними компонентами векторного методу розв'язання задач є:

1. Переклад умов задачі на мову векторів, включаючи введення векторів, вибір системи координат (за потреби), вибір базисних векторів та розклад векторів по базисах.
2. Складання системи векторних рівностей або однієї векторної рівності.
3. Спрощення векторних рівностей.
4. Заміна векторних рівностей алгебраїчними рівняннями та їх розв'язання.
5. Пояснення геометричного змісту системи отриманих розв'язків [33, с. 243].

Для визначення конкретного змісту вправ, які формують навички використання векторів, необхідно виділити дії, які є відповідними цій діяльності.

Учні, вибираючи векторний метод, активізують певні розумові дії для досягнення успішних результатів. Основними такими діями В. Швець виділяє:

1. Переклад геометричних термінів на мову векторів і навпаки, тобто здійснення переходу від відношення між фігурами до відношення між векторами та навпаки.
2. Виконання операцій над векторами, такими як знаходження суми, різниці векторів та множення вектора на число.

3. Представлення вектора у вигляді суми або різниці інших векторів.
4. Представлення вектора у вигляді добутку вектора на число.
5. Перетворення векторних співвідношень для отримання нових співвідношень.
6. Перехід від відношення між векторами до відношення між їхніми довжинами та навпаки.
7. Вираження довжини вектора через його скалярний квадрат.
8. Виразити розмір кута між векторами через їх скалярний добуток [33, с. 242].

Важливо зауважити, що векторний метод не є універсальним і використовується в обмеженому колі геометричних задач. В. Швець виділяє такі типи завдань, які можна успішно розв'язувати векторним методом:

1. Задачі на доведення паралельності прямих та відрізків.
2. Задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок у певному відношенні.
3. Задачі на доведення належності трьох точок однієї прямої.
4. Задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків.
5. Задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків.
6. Задачі на знаходження розміру кута між векторами.

Для навчання учнів векторному методу та формуванню в них відповідних розумових дій можна почати з детального розгляду двох прикладів, де цей метод використовується для доведення геометричних тверджень, які учні можуть розв'язати і без векторів [Швець, с. 243].

Отже, векторний метод – це підхід до розв'язання геометричних задач, який базується на використанні векторів та властивостей цих векторів для аналізу та розв'язання різних геометричних конструкцій і задач. Метод дозволяє замінити геометричні об'єкти (точки, відрізки, кути тощо) векторами та розв'язувати задачі за допомогою векторних операцій, таких як сума, різниця, множення на число тощо. Векторний метод дозволяє також розв'язувати різні типи геометричних задач, такі як задачі на доведення

паралельності, перпендикулярності, рівності відрізків, доведення залежності між довжинами відрізків та багато інших.

Висновки до розділу

Проаналізувавши методи розв'язування шкільних планіметричних задач можемо зробити наступні висновки:

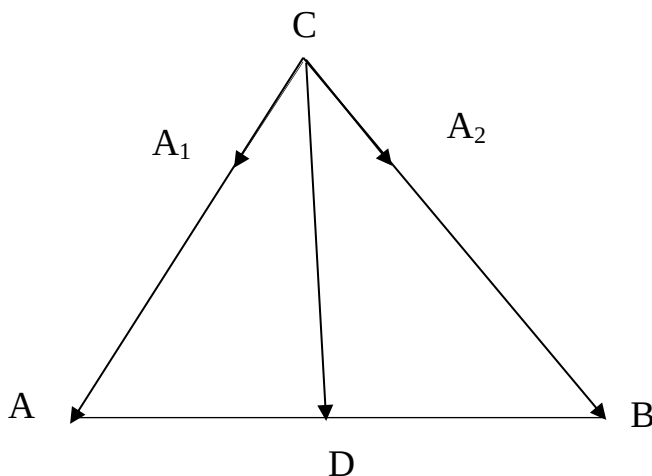
1. Метод геометричних перетворень є потужним інструментом для розв'язання різних планіметричних задач у шкільному курсі геометрії, включаючи завдання на побудову, доведення теорем, вимірювання відстаней і кутів та інші. Використання цього методу вимагає від учнів абстрактного мислення та здатності геометрично розуміти зв'язки між об'єктами.
2. Допоміжні елементи в планіметричних задачах – це геометричні об'єкти або конструкції, які додаються до вихідної задачі для полегшення її розв'язання. Ці допоміжні елементи можуть бути створені на основі початкових даних або додані для вирішення конкретного завдання. Важливо вміло вибирати допоміжні елементи та розуміти їхні геометричні властивості, щоб успішно використати цей метод.
3. Допоміжні побудови – це важливий інструмент при розв'язанні геометричних задач, які допомагають учням отримувати більше інформації про геометричні об'єкти та їх взаємозв'язки. Такі побудови використовують для спрощення завдань, отримання додаткової інформації або встановлення зв'язків між геометричними об'єктами.
4. Векторний метод – це підхід до розв'язання геометричних задач, який базується на використанні векторів та їх властивостей для аналізу та розв'язання різних геометричних конструкцій і завдань. Цей метод дозволяє замінити геометричні об'єкти (точки, відрізки, кути) векторами і розв'язувати задачі за допомогою векторних операцій, таких як додавання, віднімання, множення на число і т.д. Векторний метод дає змогу розв'язувати різні типи геометричних задач, такі як доведення

паралельності, перпендикулярності, рівності відрізків, визначення зв'язку між довжиною відрізків та багато інших.

РОЗДІЛ 3. ВИДИ ЗАДАЧ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.1. Приклади розв'язування задач

У попередніх розділах охарактеризовано основні методи розв'язування планіметричних задач. Розглянемо приклади їх застосування для конкретних задач. В. Швець пропонує наступний розв'язок планіметричної задачі з використанням векторного методу. У задачі необхідно довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам.



Розв'язання. Нехай $AD:DB = m:n$

Відкладемо на CA і CB вектори одиничної довжини: $\overrightarrow{CA_1} = \vec{l}_1$ і $\overrightarrow{CA_2} = \vec{l}_2$.

Виразимо вектор $\overrightarrow{CD}$ двічі через вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{CD} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{CB} +$

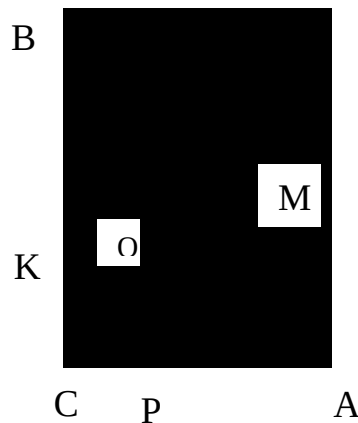
$\frac{n}{m+n} \overrightarrow{CA} = \frac{m}{m+n} \cdot a \cdot \vec{l}_2 + \frac{n}{m+n} \cdot b \cdot \vec{l}_1$, де a, b – довжини векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{CD} = x \cdot (\vec{l}_1 + \vec{l}_2) = x \cdot \vec{l}_1 + x \cdot \vec{l}_2$.

Отже, запишемо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{n \cdot b}{m+n} = x, \\ \frac{m \cdot a}{m+n} = x \end{cases}$. Поділимо почленно ці два

рівняння системи, отримаємо: $\frac{n \cdot b}{a \cdot m} = 1$, тобто $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. Або, остаточно: $AD:DB = AC:BC$ [33, с. 245].

М. Антоненко пропонує наступну задачу і приклад її розв'язку. Обчисліть катети прямокутного трикутника за радіусом m вписаного кола та гіпотенузою c [1, с. 81].



Розв'язання. Нехай O – центр, OK , OM , OP – радіуси вписаного кола. За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, маємо: $AP = AM$, $BC = BK + CM$. Позначимо $AB = c$, $AC = x$, $BC = y$. Маємо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = p \cdot r, \text{ де } p = \frac{x+y+c}{2}.$$

Але $x+y=c+2r$, тому $xy = r(c+2r+c)$, або $xy = 2r(c+r)$. Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = c + 2r, \\ xy = 2r(c + r). \end{cases}$$

На основі теореми Вієта x та y – суть корені рівняння:

$$z^2 - (c+2r)z + 2r(c+r) = 0.$$

Розв'язавши його матимемо:

$$z_1 = x = \frac{1}{2}(c+2r + \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2}),$$

$$z_2 = y = \frac{1}{2}(c+2r - \sqrt{c^2 - 4rc - 4r^2}).$$

Дослідження: Областю існування трикутника ABC 1) є $0 < AC < AB$.

Підставивши (2) в (1) дістанемо:

$$0 < \frac{1}{2}(2r+c+\sqrt{c^2-4rc-4r^2}) < c.$$

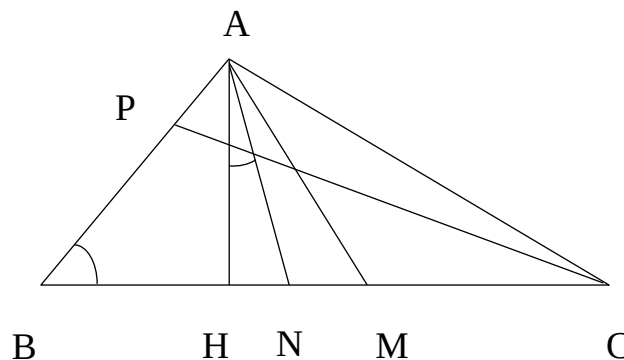
Розв'язавши систему нерівностей, маємо:

$$0 < 2r \leq c(\sqrt{2}-1).$$

Відповідь: Катети дорівнюють $\frac{1}{2}(2r+c \pm \sqrt{c^2-4rc-4r^2})$, причому $0 < 2r \leq c(\sqrt{2}-1)$ [1, с. 81].

Часто для розв'язку планіметричних задач використовується метод введення допоміжної невідомої величини.

О. Сарана наводить приклад такої задачі. У трикутнику ABC проведено медіану AM, висоту AH та бісектрису AN. Відомо, що $AM = l$, $AH = h$ та $HN = NM = m$. Знайти відстань AO, де O – точка перетину висот $\triangle ABC$ [22, с. 13].



Проведемо $CP \perp AB$. Позначимо $\angle ABC = \beta$. Тоді з $\triangle PBC$ маємо, що $\angle PCB = 90^\circ - \beta$, звідки з $\triangle HOC$ маємо $\angle HOC = \beta$.

Трикутники ABH і OCH подібні, тому $\frac{AH}{HC} = \frac{BH}{OH}$, звідки $OH = \frac{BH \cdot CH}{AH}$, $AO = AH - OH = h - \frac{BH \cdot HC}{h}$. Позначимо $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $HN = NM = m$ (з $\triangle ANM$ маємо

$m = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$). Оскільки $BH = \frac{a}{2} - 2m$, $HC = \frac{a}{2} = 2m$, то маємо

$$AO = \frac{h^2 - \left(\frac{a}{2} - 2m\right)\left(\frac{a}{2} + 2m\right)}{h} = \frac{h^2 - \frac{a^2}{4} + 4m^2}{h} = \frac{h^2 - \frac{a^2}{4} + l^2 - h^2}{h} = \frac{l^2 - \frac{a^2}{4}}{h} = \frac{4l^2 - a^2}{4h}.$$

Із співвідношень у прямокутних трикутниках ABH, ACH та властивості бісектриси AN $\triangle ABC$ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2 = \left(\frac{a}{2} - 2m\right)^2 + h^2 b^2, \\ \frac{c}{b} = \left(\frac{a}{2} + 2m\right)^2 + h^2 \frac{\frac{a}{2} - m}{\frac{a}{2} + m} \end{cases}$$

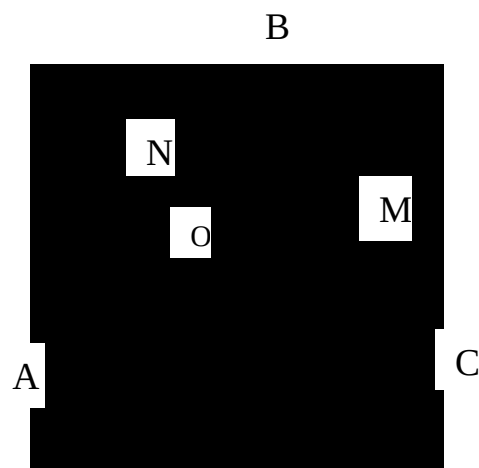
Виключивши b і c , маємо рівняння:

$$\frac{\left(\frac{a}{2} - 2m\right)^2 + h^2}{\left(\frac{a}{2} + 2m\right)^2 + h^2} = \frac{\left(\frac{a}{2} - m\right)^2}{\left(\frac{a}{2} + m\right)^2}$$

Після перетворень отримуємо: $a^2 = 4h^2 + 8m^2$, звідки

$$AO = \frac{4l^2 - 4h^2 - 8m^2}{4h} = \frac{l^2 - h^2}{2h} [22, \text{с. } 13].$$

Зокрема, О. Сарана зауважує, що у багатьох задачах отримати розв'язок допомагає підрахунок кутів. У гострокутному трикутнику ABC сторона AB більша, ніж сторона BC , відрізки AM і CN є висотами, точка O – центр описаного кола. Кут ABC дорівнює β , а площа чотирикутника $NOMB$ дорівнює S . Знайти сторону AC [22, с. 14].



Розв'язання. Позначимо $OA = OB = OC = R$, $\angle ABO = \angle BAO = \beta_1$, $\angle CBO = \angle BCO = \beta_2$. За властивістю вписаних кутів маємо $\angle ABO = 2 \angle ACB = 2 \angle C$, звідки $2 \angle C + 2 \angle \beta_1 = 180^\circ$, $\angle \beta_1 = 90^\circ - \angle C$. Аналогічно $\angle \beta_2 = 90^\circ - \angle A$.

Очевидно, що виразити AC безпосередньо через S та β складно, тому спробуємо виразити площу S чотирикутника $NOMB$ через AC та β .

Маємо $S = S_{\Delta NOB} + S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}R(BN \cdot \sin \beta_1 + BM \cdot \sin \beta_2)$. Із трикутників BNC , BAM маємо $BN = BC \cdot \cos \beta_1$, $BM = AB \cdot \cos \beta_2$, тому, враховуючи, що $\cos \beta_1 = \cos \angle C$, $\cos \beta_2 = \cos \angle A$, отримуємо:

$$S = \frac{1}{2}R(BC \cos \beta \cdot \cos \angle C + AB \cos \angle A) = \frac{1}{2}R \cos \beta (BC \cdot \cos \angle C + AB \cos \angle A).$$

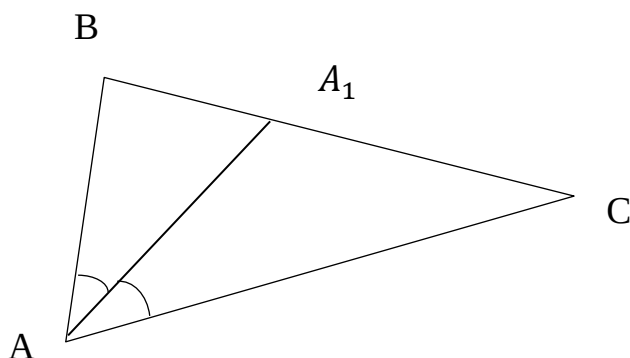
Використавши теорему синусів: $\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$, отримуємо

$$S = \frac{1}{2}R(2R \sin \angle A \cdot \cos \angle C + 2R \sin \angle C \cdot \cos \angle A) = R^2 \cos \beta \cdot \sin \beta (\angle A + \angle C) = R^2 \cos \beta \cdot \sin \beta = \frac{AC^2}{4 \operatorname{tg} \beta}.$$

Звідси отримуємо: $AC = 2\sqrt{S \cdot \operatorname{tg} \beta}$ [22, с. 14].

О. Сарана зауважує, що під час розв'язування планіметричних задач поширене використання методу площ і наводить наступну задачу. Довести, що в трикутнику ABC бісектрису AA_1 можна знайти за формулою:

$$AA_1 = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, \text{ де } b = AC, c = AB \text{ [22, с. 15].}$$



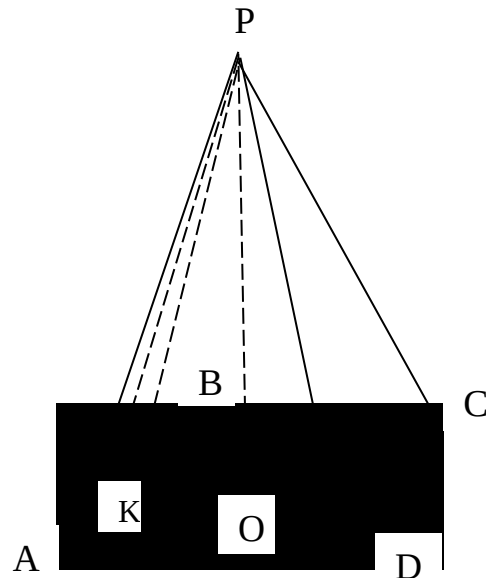
Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює $S = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$. З іншого боку, його площу можна знайти також як суму площ трикутників ABA_1 та ACA_1 :

$$S = \frac{1}{2}c \cdot AA_1 \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AA_1 \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot (b + c) \sin \frac{A}{2}$$

Прирівнявши площі, отримуємо:

$$AA_1 = \frac{\frac{1}{2}bc \sin A}{\frac{1}{2}(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{bc \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} [22, \text{с. 15}]$$

Основа піраміди – прямокутник із сторонами a і b , всі бічні ребра дорівнюють l . Знайдіть об'єм піраміди.



Розв'язання. За умовою задачі: $AB=a$, $AD=b$, $PA=l$. Об'єм піраміди обчислимо за формулою:

$$V = AB \cdot AD \cdot PO.$$

$$\text{Але } OA = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \text{ тому } PO = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}.$$

Підставляючи матимемо:

$$V = ab \sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}.$$

Дослідження. Побудуємо $OK \perp AB$. За допоміжну фігуру виберемо тетраедр $PAKO$, областю існування якого є:

$$0 < OK < OA < PA.$$

Справді, якщо $0 < OK < OA$, існує прямокутний трикутник $АОК$ – основа тетраедра, а коли $0 < OA$, а коли $0 < OA < PA$, існує прямокутний трикутник $РАО$, існує тетраедр $РАКО$, а отже і піраміда $PABCD$.

Підставимо: $0 < \frac{b}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, або $0 < b < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l$.

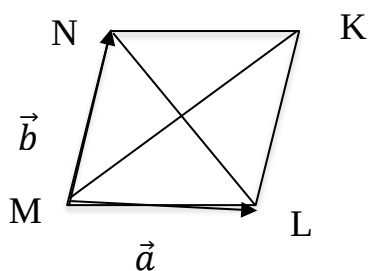
Відповідь: Об'єм піраміди дорівнює $ab\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)}$, причому $0 < b < \sqrt{a^2 + b^2} < 2l$ [1, с. 83].

Отже, у наведених прикладах розв'язку планіметричних задач ми простережуємо використання методу векторів, методів допоміжних фігур, методу площ та методу геометричних перетворень, які є ефективними під час розв'язування таких типів задач.

3.2. Завдання для самостійного розв'язання

Варіант 1

1. Суть цього методу полягає у тому, що виходячи з даного твердження, будуємо нове, заперечивши висновок попереднього. Про який метод йде мова?
2. У чому полягає суть синтетичного методу?
3. Назвіть алгоритм для розв'язування задач методом площ.
4. За даним рисунком, доведіть що діагоналі ромба перпендикулярні ($MK \perp NL$).



5. Побудувати відрізок із серединою в даній точці і кінцями на двох даних кривих (центральна симетрія).

6. Сторони вписаного чотирикутника $ABCD$ задовольняють співвідношення $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Доведіть, що площі трикутників ABC і ADC рівні.

7. Знайти третю сторону трикутника, якщо дано дві його сторони a і b та відомо, що медіани, які відповідають цим сторонам, перетинаються під прямим кутом. За яких умов такий трикутник існує?

8. З вершини C прямого кута $\triangle ABC$ проведено висоту CK , а в $\triangle ACK$ проведено бісектрису CE . Пряма, яка паралельна CE і проходить через точку B , перетинає CK в точці F . Довести, що пряма EF ділить відрізок AC навпіл.

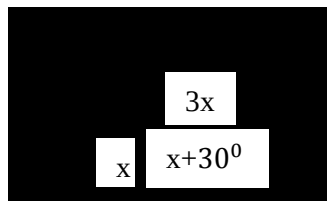
Варіант 2

1. Суть цього методу полягає у тому, що проводячи певний аналіз задачі на побудову, положення шуканого елемента на площині ми знаходимо за допомогою алгебри. Про який метод йде мова?

2. У чому полягає суть аналітичного методу?

3. Назвіть алгоритм для розв'язування задач методом координат.

4. За даним рисунком, знайдіть кути трикутника.



5. Побудувати відрізок з кінцями на двох даних кривих, серединою на даній прямій, так щоб пряма, яка містить цей відрізок, була перпендикулярною до цієї прямої (осьова симетрія).

6. Площа трикутника дорівнює S , периметр дорівнює P . Прямі, на яких розташовано його сторони, відсуваються (у зовнішній бік) на відстань h . Знайдіть площу й периметр трикутника, утвореного трьома отриманими прямими.

7. У трапеції довжини меншої та більшої основ відповідно дорівнюють a і b , а величини кутів при більшій основі α і β . Знайти довжини бічних сторін.

8. Вписане (або зовнішньо вписане) у трикутник ABC коло дотикається прямих BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Довести, що прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинаються в одній точці.

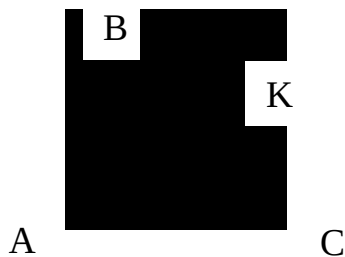
Варіант 3

1. Суть цього методу полягає у тому, що виходячи з теореми чи умови даної задачі і використовуючи вже відомі твердження, будується ланцюг міркувань, який збігається з вимогою задачі. Про який метод йде мова?

2. У чому полягає суть методу геометричних перетворень?

3. Назвіть алгоритм для розв'язування задач методом векторів.

4. За даним рисунком, знайдіть AK , якщо $A(-2;1)$, $B(0;6)$, $C(4;0)$.



5. Побудувати рівнобедрений трикутник із вершиною в заданій точці A , кутом при цій вершині α , так щоб дві інші його вершини, що належать основі, містились на двох заданих кривим y_1 , y_2 (поворот).

6. Через точку M всередині трикутника ABC проведено прямі, паралельні сторонам трикутника. Вони розбивають трикутник на 6 частин, з яких 3 частини є трикутниками, площі яких дорівнюють S_1 , S_2 , S_3 . Знайдіть площу трикутника ABC .

7. Площа паралелограма дорівнює S , його периметр P , а різниця квадратів діагоналей дорівнює q^2 . Знайти сторони паралелограма.

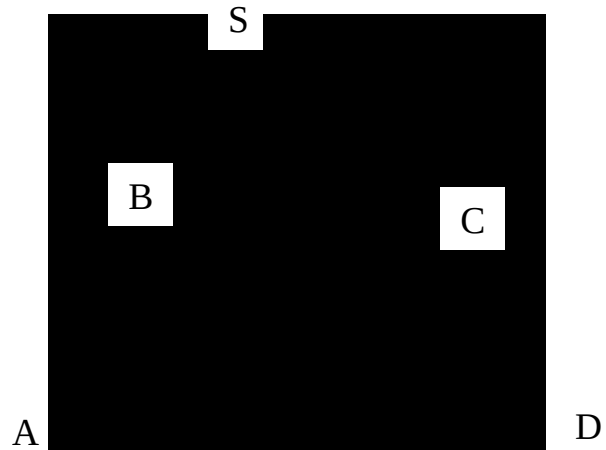
8. На сторонах BC , CA , AB трикутника ABC взято точки A_1 , B_1 , C_1 відповідно так, що відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі

$$f'(y) = 0: \frac{(x_2 - x_1)(y^2 + x_1 + x_2) - 2y^2(x_2 - x_1)}{(y^2 + x_1x_2)^2} = 0 \Rightarrow y^2 = x_1x_2,$$

$$\text{а } y = \sqrt{x_1x_2}$$

Із геометричних міркувань випливає, що в точці O функція $f(y)$ досягає максимуму. На малюнку 1 чітко показано побудову відрізка AB : на OB_1 , як на діаметрі описано півколо, звідки $OK = y$; тоді дуга радіусом y із центром у точці O висікатиме точку C на осі O_y , а остання визначає пряму CAB [16].

У свою чергу Б. Беседін пропонує таку планіметричну задачу олімпіадного характеру: нехай $ABCD$ – даний (опуклий) чотирикутник, в якому $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$, $\angle CAD = \angle CDB = \alpha$. Доведемо, що $AB + CD = AD$ [4, с. 13].



«Продовжимо протилежні сторони AB і CD до перетину у точці S . Оскільки за умовою $\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ$, то трикутник ADS є правильним. Звідки $AS = SD = AD$. Розглянемо $\triangle ADC$ і $\triangle DSB$: оскільки $AD = DS$, $\angle CAD = \angle BDS = \alpha$, $\angle ADC = \angle DSB = 60^\circ$, то $\triangle ADC = \triangle DSB$ за стороною і прилеглими кутами. І тому $DC = SB$, $AC = DB$.

Оскільки $AS = SD$ і $BS = CS$, то $AS + BS = SD + CD$. Звідки $AB = SC$. Оскільки $AD = AS$, то $AD = AB + BS = AB + CD$. Крім того, $AC = BD$ » [4, с. 14].

Отже, наведені приклади планіметричних задач олімпіадного характеру дають змогу зробити висновок, що на олімпіадах використовуються задачі

різного типу на доведення, побудову, обчислення площі фігури, кожна з яких вимагає від учня володіння ефективними геометричними навичками та методами розв'язку.

3.4. Олімпіадні задачі для самостійного розв'язання

Задача 1. Доведіть, що відстань d між центрами описаного навколо трикутника і вписаного у цей трикутник кіл виражається формулою Ейлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, де R та r – радіуси таких кіл [29].

Задача 2. У дугу ABC на колі вписали ламану, що складається з хорд AB та BC , причому $AB > BC$. Доведіть, що перпендикуляр MK , опущений із середини M дуги AC на AB , ділить ламану ABC на дві рівні частини: $AK = KB + BC$ (теорема Архімеда) [29].

Задача 3. Доведіть, що якщо бісектриси кутів опуклого чотирикутника при перетині утворюють чотирикутник, то в нього можна вписати коло [29].

Задача 4. У гострокутному трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 є основами висот, $\angle B = 60^\circ$. На променях B_1A_1 та B_1C_1 поза трикутником ABC взяли точки M та N відповідно такі, що $MA_1 = A_1C = C_1N$. Доведіть, що точки M, B, N лежать на одній прямій [29].

Задача 5. Два кола перетинаються в точках A та B . C – діаметрально протилежна до A на першому колі, E – на другому. Доведіть, що точки B, C, E лежать на одній прямій [29].

Задача 6. Доведіть, що довільний опуклий багатокутник можна розрізати двома взаємно перпендикулярними прямими на 4 фігури однакової площі [29].

Задача 7. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника з довжинами сторін a, b, c [29].

Задача 8. AA_1, BB_1, CC_1 – бісектриси трикутника ABC . Доведіть, що відношення площ трикутників $A_1B_1C_1$ та ABC дорівнює $2abc : (a+b)(b+c)(c+a)$ [29].

Задача 9. Гострокутний трикутник вписаний в коло. Побудуйте вписаний у це ж коло шестикутник із вдвічі більшою площею [29].

Задача 10. На відрізку АВ взято точку С і побудовано півкола з діаметрами АВ, АС і ВС (по один бік від прямої АВ). Знайдіть відношення площі криволінійного трикутника, обмеженого цими півколами, до площі трикутника, утвореного серединами дуг цих півкіл [20, с. 256].

Задача 11. У трикутнику АВС медіана ВЕ та бісектриса CD перпендикулярні. Відомо, що площа трикутника АВС дорівнює 54 см^2 , а довжина CD дорівнює 9 см. Знайти довжину медіани ВЕ [22, с. 61].

Задача 12. Яким буде трикутник (гострокутним, прямокутним чи тупокутним), якщо: а) його висоти рівні 3 см, 4 см, 5 см; б) його медіани рівні 3 см, 4 см та 5 см? [34, 89].

Задача 13. У колі радіусом R проведено два діаметри, кут між якими дорівнює α . Доведіть, що відстань між основами перпендикулярів, проведених з довільної точки кола на ці діаметри, не залежить від положення точки на колі, та знайдіть цю відстань [34, с. 89].

Задача 14. У кут величини α вписали коло радіусом 1. Далі вписали друге коло, що дотикається першого кола зсередини кута, вписали третє коло, що дотикається другого кола зсередини кута і так далі. Знайдіть радіус 1000-го кола [34, с. 89]. В. Ясінський подає таку вказівку до розв'язку цієї задачі з використанням методу геометричних перетворень: гомотетія з центром у вершині кута, яка переводить перше коло в друге, друге коло в третє, третє – в четверте і т. д. Простий підрахунок показує, що коефіцієнт цієї гомотетії дорівнює:

$$\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \quad [34, \text{с. 89}].$$

Задача 15. На бісектрисі зовнішнього кута С трикутника АВС взято точку $M \neq C$. Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$. Розв'язок Нехай A' і B' – точки, симетричні точкам А і В відносно прямої СМ. Тоді $AM + MB = A'M + MB > A'B = A'C + CB = AC + CB$ [34, с. 90].

Висновки до розділу

У цьому розділі нами наведено приклади розв'язку планіметричних задач, у яких простежуємо використання методу векторів, методів допоміжних фігур, методу площ та методу геометричних перетворень, які є ефективними під час розв'язування таких типів задач. Виділено планіметричні задачі для самостійного розв'язання, які стимулюють розумову діяльність учнів, дають змогу самостійно знайти метод вирішення конкретної задачі. У свою чергу наведені приклади планіметричних задач олімпіадного характеру дають змогу зробити висновок, що на олімпіадах використовуються задачі різного типу на доведення, побудову, обчислення площі фігури, кожна з яких вимагає від учня володіння ефективними геометричними навичками та методами розв'язку. Олімпіадні задачі для самостійного розв'язання сприяють розвитку креативності та здатності знаходити альтернативні методи розв'язку, а також розвивають логічне мислення та аналітичні навички.

ВИСНОВКИ

У першому розділі нами проаналізовано основні методи розв'язування планіметричних задач. Так, синтетичний метод – один із основних методів у геометрії, який має такий принцип розв'язку: починають з умови, поступово доходячи до розв'язку. Важливим етапом використання синтетичного методу є його взаємодія з аналітичним, що утворює аналітико-синтетичний метод, є те, що під час певного кроку здійснюється міркування в зворотному напрямку. У свою чергу аналітичний метод характеризується послідовним розгорнутим способом розв'язання, який дає змогу схарактеризувати проблему й вирішувати її. Метод від супротивного характеризується наявністю двох тверджень, одне з яких гіпотетично правильне, інше – ні. Труднощі у використанні цього методу полягають в тому, що з будь-якого твердження можна отримати декілька висновків. Алгебраїчний метод полягає у пошуку розв'язку, який вимагає складання рівняння, відповідно до якого здійснюється аналіз, що дає змогу встановити відомі і невідомі величини. Цей метод використовується у планіметричних задачах на доведення, побудову та обчислення. Метод площ реалізується у трьох прийомах, для кожного з яких існує відповідний алгоритм дій. Тоді як метод векторів характеризується певним геометричним розміщенням точок, прямих і площин у просторі, в яких існує необхідність записати мовою векторів, тобто у вигляді векторної рівності. Метод координат – це такий геометричний метод, в основі якого є спосіб визначення положення точки, фігури або тіла на площині через використання чисел або інших символів. Метод геометричних перетворень передбачає розгляд поряд з наведеними фігурами їх образів, які отримані з використанням певного перетворення. Аналізований метод дає змогу пошуку ключа у розв'язку задачі з використанням різних способів, серед яких паралельне перенесення, що здебільшого використовується для побудови багатокутників.

У другому розділі досліджено методи розв'язання шкільних планіметричних задач, тож можемо узагальнити їх. Метод геометричних перетворень може бути потужним інструментом для розв'язання різних планіметричних задач у шкільному курсі геометрії, включаючи завдання на побудову, доведення теорем, вимірювання відстаней і кутів та інші. Використання цього методу вимагає від учнів абстрактного мислення та здатності геометрично розуміти зв'язки між об'єктами.

Допоміжні елементи в планіметричних задачах – це геометричні об'єкти або конструкції, які додаються до вихідної задачі для полегшення її розв'язання. Ці допоміжні елементи можуть бути створені на основі початкових даних або додані для вирішення конкретного завдання. Важливо вміло вибирати допоміжні елементи та розуміти їхні геометричні властивості, щоб успішно використати цей метод. У свою чергу допоміжні побудови – це важливий інструмент при розв'язанні геометричних задач, які допомагають учням отримувати більше інформації про геометричні об'єкти та їх взаємозв'язки. Ці побудови використовують для спрощення завдань, отримання додаткової інформації або встановлення зв'язків між геометричними об'єктами.

Векторний метод – це підхід до розв'язання геометричних задач, який базується на використанні векторів та їх властивостей для аналізу та розв'язання різних геометричних конструкцій і завдань. Цей метод дозволяє замінити геометричні об'єкти (точки, відрізки, кути) векторами і розв'язувати задачі за допомогою векторних операцій, таких як додавання, віднімання, множення на число. Векторний метод дає змогу розв'язувати різні типи геометричних задач, такі як доведення паралельності, перпендикулярності, рівності відрізків, визначення зв'язку між довжиною відрізків та багато інших.

У останньому розділі наведено приклади розв'язку планіметричних задач, у яких простежуємо використання методу векторів, методів допоміжних фігур, методу площ та методу геометричних перетворень, які є ефективними під час розв'язування таких типів задач. Виділено планіметричні задачі для

самостійного розв'язання, які стимулюють розумову діяльність учнів, дають змогу самостійно знайти метод вирішення конкретної задачі. У свою чергу наведені приклади планіметричних задач олімпіадного характеру, які дають змогу зробити висновок, що на олімпіадах використовуються задачі різного типу: на доведення, побудову, обчислення площі фігури, кожна з яких вимагає від учня володіння ефективними геометричними навичками та методами розв'язку. Олімпіадні задачі для самостійного розв'язання сприяють розвитку креативності та здатності знаходити альтернативні методи розв'язку, сприяють розвитку логічного мислення та аналітичних навичок, які є ключовими результатами у вивченні математики.

Список використаних джерел

1. Антоненко М. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя. Київ, 1991. 128 с. URL: https://shron1.chtyvo.org.ua/Antonenko_MI/Rozviazuvannia_heometrychnykh_zadach_Knyzhka_dlia_vchytelia.pdf?PHPSESSID=u4gu279s57bogtap8965kui660.
2. Бевз Г. Методи навчання математики. Харків: Вид. Група "Основа", 2003. 96 с.
3. Бевз Д. Методи розв'язування планіметричних задач за допомогою введення допоміжного відрізка та площі. С. 16-21. URL: https://fmft.vspu.edu.ua/wp-content/uploads/2018/06/Almanakh_1_2018.compressed.pdf.
4. Беседін Б., Кадубовський О. Олімпіадні задачі: Розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2010. Навчальний посібник. Слов'янськ, 2011. 80 с. URL: https://ddpu.edu.ua/fmk/publications/manuals/manual_06.pdf.
5. Бистрянцева А. Використання методу площ при розв'язуванні геометричних задач. *Проблеми та перспективи розвитку освіти*. Львів, 30-31 березня 2017. С. 33-35. URL: <http://molodyvcheny.in.ua/files/conf/ped/21march2017/11.pdf>.
6. Болух В. Аналітичний, синтетичний та аналітико-синтетичний методи доведення геометричних тверджень як засоби формування логічної компетентності студентів. URL: <https://eprints.pharm.zt.ua/id/eprint/82/1/%D0%91%D0%BE%D0%BB%D1%83%D1%85%20%D0%AF%D0%BA%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C%20%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%BE%D1%97%20%D0%BE%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B8.pdf>.
7. Боравльов А. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навчальний посібник. Київ: Вища шк., 2002. 192 с.

8. Бугаєць Н. Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв'язування задач на побудову в шкільному курсі планіметрії. URL: [Жалдак М \(npu.edu.ua\)](http://npu.edu.ua).

9. Бурда М. Застосування допоміжних елементів у розв'язуванні задач підручника з геометрії. URL: https://lib.iitta.gov.ua/719918/2/psp_2019_22_6.pdf.

10. Волошина Д. Методичні особливості вивчення площ фігур в курсі планіметрії основної школи. URL: https://library.vspu.net/jspui/bitstream/123456789/6163/1/%d0%b7%d0%b1_%d1%80%d0%bd%d0%b8%d0%ba%20%d0%bd%d0%b0%d1%83%d0%ba%d0%bf%d1%80%d0%b0%d1%86%d1%8c%20%d0%a4%d0%9c%d0%a4%d0%9a%d0%9d%d0%a2%202020-128-133.pdf.

11. Дейніченко Т. Загальнонаукові методи в навчанні математики. *Наумовські читання*. Харків. 2022. С. 65-67. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/c7d4d13c-d47b-4634-b807-427f91d4201d/content#page=65>.

12. Кононова О. Використання евристичних прийомів під час розв'язування позиційних задач на побудову із застосуванням інформаційних технологій. *Математика в школі*. 2008. №3. С. 29 – 37.

13. Коростіянець Т. Планіметрія в шкільному курсі математики: навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" для здобувачів освітнього рівня "бакалавр". Одеса, Університет Ушинського, 2023. 155 с. URL: [Korostiyanets Tamara Petrivna 2023.pdf \(pdpu.edu.ua\)](http://pdpu.edu.ua).

14. Крамаренко Т. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів/ За ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.

15. Кушнір І. Методи розв'язання задач з геометрії [Текст] : кн. для вчителя. Київ: Абрис, 1994. 464 с.

16. Ленчук І. Алгебраїчний метод: олімпіадні задачі на побудову. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/31414/1/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC>

[%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%E2%84%969_2016%20%D1%81.%2040-48.pdf](#) .

17. Ленчук І. Метод перетворень: паралельне перенесення. *Математика в рідній школі*. № 3. 2016. С. 37-42. URL: http://eprints.zu.edu.ua/31422/1/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%E2%84%963_2016%2037-42.pdf .

18. Малова Ю. Метод координат його можливості. Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26 – 27 червня 2013 р. Київ: НУХТ. С. 133-135.

19. Мурач М. Загальні та часткові методи розв'язування задач: Методичні рекомендації вчителям математики. Чернігів, 1982. 62 с.

20. Прасолов В. Задачі з планіметрії. Тернопіль: Навчальна книга. 2012. 576 с.

21. Раков С. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням пакета динамічної геометрії DG. *Математика в школі*. 2005. №7. С. 2 – 9.

22. Сарана О., Семенець С. Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2007. 150 с.

23. Семенець С. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/12083041.pdf> .

24. Скрипченко А. Зміст аналітичних методів пошуку розв'язання планіметричних задач. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. 2004. Вип. 21. С. 81-84. URL: http://dm.inf.ua/_21/81-84%2021_2004.pdf .

25. Слєпкань З. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.

26. Тарасенкова Н. Математика. На допомогу вчителю. Київ. Видавничий дім "Освіта". 2013. 56 с.

27. Ульшин П. Використання векторного методу в геометрії. URL: <https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/652/1/mathbook.pdf#page=264> .

28. Федак І. Готуємося до олімпіади з математики Ч.ІІ. Геометрія та нестандартні конструкції. 2003. URL: <https://kmfa.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/64/2020/02/Федак-І.В.-Готуємося-до-олімпіади-з-математики.-Ч.2.-Геометрія-та-нестандартні-конструкції.pdf> .

29. Федак І. Готуємося до олімпіади з математики Ч.ІІІ Задачі для самостійного розв'язування та рекомендована література. URL: <https://kmfa.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/64/2020/02/Федак-І.В.-Готуємося-до-олімпіади-з-математики.-Ч.3.-Задач> .

30. Чашечнікова О. Методичні особливості навчання геометричних перетворень учнів з різними стилями мислення. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2023. Вип. 1(21). С. 113-119. URL: <https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/13730/1/METODYCHNI%20OSOBLIVOSTI.pdf> .

31. Чашечнікова, Л., Кравченко Л. Особливості вивчення геометричних перетворень різними групами учнів. Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики: матеріали Всеукраїнської науково- Актуальні питання природничо-математичної освіти. методичної конференції (Суми, 3–4 грудня 2009 р.). Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, с. 106–107.

32. Чашечнікова, Л., Петренко С., Чашечникова О. Геометричні побудови на площині. Суми: Ярославна.

33. Швець В. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 267 с. http://eprints.zu.edu.ua/20221/1/Prus_Temy_3.8_3.9.pdf .

34. Ясінський В. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. Тернопіль: Навчальна книга. 2012. 208 с.