

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої
освіти

на тему: «Розвиток математичних компетентностей
старшокласників при вивченні теми «Показникова
та логарифмічна функції»»

Виконав:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня Освіта (Математика)

Романюк А. М.

Керівник: к. е. н., доц. Никифорчин І. В.

Рецензент:

Івано-Франківськ—2023р.

АНОТАЦІЯ

Магістерська робота присвячена дослідженню процесу розвитку математичних компетентностей при вивченні теми «Показникова та логарифмічна функції».

В роботі систематизовано та виокремлено фактори впливу, що впливають на розвиток математичних компетентностей старшокласників; опрацьовано діючі підручники по заданій темі. Окрема увага приділена розробці самостійних робіт для проведення аналізу засвоєних знань учнів 11 класу.

Предмет роботи – розвиток математичних компетентностей старшокласників при вивченні теми «Показникова та логарифмічна функції».

Мета роботи – дослідити процес вивчення та освоєння учнями заданої теми дослідження.

Дипломна робота викладена на 62 сторінках, містить 3 розділи, 12 рисунків, 3 таблиці, 6 джерел у списку використаної літератури.

У першому розділі проаналізовано навчальні програми і діючі підручники щодо вивчення показникової та логарифмічної функцій, мету навчання та основні вимоги до знань і вмінь учнів по заданій темі. Також представлено процес становлення та розвитку математичних компетентностей учнів на уроках математики.

У другому розділі розглядається показникова та логарифмічна функції, їх роль та місце в шкільному курсі математики. Зокрема, показникова функція, показникові рівняння та нерівності, логарифм і його властивості, логарифмічна функція та її властивості, логарифмічні рівняння та нерівності, похідна показникової та логарифмічної функцій.

У третьому розділі представлено систему вправ, спрямовану на розвиток математичних компетентностей під час вивчення заданої теми, а саме задачі шкільного рівня та аналіз засвоєних знань учнів 11 класу.

Ключові слова: показникова функція, показникові рівняння та нерівності, логарифм, логарифмічна функція, логарифмічні рівняння та нерівності, похідна показникової функції, похідна логарифмічної функції, математичні компетентності.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ЗМІСТ ТА АНАЛІЗ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ	4
1.1. Аналіз навчальних програм і діючих підручників щодо вивчення показникової та логарифмічної функції у старшій школі.....	4
1.2. Мета навчання та основні вимоги до знань і вмінь учнів по заданій темі	10
1.3. Становлення та розвиток математичних компетентностей в учнів на уроках математики.....	12
Висновки до розділу I.....	14
РОЗДІЛ 2. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ, ЇХ РОЛЬ І МІСЦЕ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	15
2.1. Показникова функція.....	15
2.2. Показникові рівняння та нерівності	17
2.3. Логарифм і його властивості	24
2.4. Логарифмічна функція та її властивості	25
2.5. Логарифмічні рівняння та нерівності	26
2.6. Похідна показникової та логарифмічної функцій.....	29
Висновки до розділу II.....	31
РОЗДІЛ 3. СИСТЕМА ВПРАВ, СПРЯМОВАНА НА РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЗАДАНОЇ ТЕМИ.....	32
3.1. Задачі шкільного рівня	32
3.2. Аналіз засвоєних знань учнів 11 класу	36
Висновки до розділу III.....	44
ВИСНОВКИ	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	46
ДОДАТКИ	47

ВСТУП

Значна частина шкільного курсу математики присвячена вивченню функцій та їх властивостей. Це пояснюється тим, що під час вивчення функцій в учнів формуються математичні компетентності, котрі мають прикладний та практичний характер.

Актуальність дослідження. Показникова та логарифмічна функції є математичною моделлю значної кількості процесів, що є пов'язаними з діяльністю людини, або ж просто відбуваються в природі.

Основою вивчення математики, так як і інших дисциплін є математична компетентність, що є необхідним елементом загальноосвітньої підготовки учнів. Розвиток математичної компетентності в учнів розвиває навички раціональної організації діяльності, активізує увагу та пам'ять учнів.

Об'єкт дослідження. Процес вивчення алгебри та початків аналізу в старшій школі.

Предмет дослідження. Розвиток математичних компетентностей старшокласників при вивченні теми «Показникова та логарифмічна функції».

Мета дослідження. Дослідити процес вивчення та освоєння учнями заданої теми дослідження.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати наукову та методичну літературу;
2. Провести аналіз по заданій темі, використовуючи різні підручники;
3. Розробити два варіанти самостійних робіт по заданих функціях для учнів 11 класу.
4. Провести аналіз засвоєних знань учнів на основі проведених та перевірених самостійних робіт.

Структура дипломної роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ЗМІСТ ТА АНАЛІЗ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

1.1 Аналіз навчальних програм і діючих підручників щодо вивчення показникової та логарифмічної функції у старшій школі

Рівень стандарту

Зміст навчального матеріалу за рівнем стандарту передбачає наступні теми [1]:

- Повторення відомостей про функції;
- Степінь із довільним дійсним показником. Властивості та графіки показникової функції;
- Логарифми та їх властивості. Властивості та графік логарифмічної функції;
- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Згідно з навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів [1] , на рівні стандарту, для вивчення теми: «Показникова та логарифмічна функції» виділено 12 годин.

Навчальні досягнення учня на даному рівні:

- Розв’язує найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності;
- Розпізнає та будує графіки показникової і логарифмічної функції;
- Вміє застосовувати показникову та логарифмічну функції для опису реальних процесів;
- Ілюструє властивості показникової та логарифмічної функцій за допомогою графіків.

Академічний рівень

Зміст навчального матеріалу за академічним рівнем навчання передбачає наступні теми [1]:

- Степінь з дійсним показником;
- Властивості та графік показникової функції;
- Логарифми та їх властивості. Натуральний логарифм;
- Властивості та графік логарифмічної функції.

- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності;
- Похідні показникової і логарифмічної функцій.

Згідно з навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів [1], на академічному рівні, для вивчення теми: «Показникова та логарифмічна функції» виділено 22 години.

Навчальні досягнення учнів на даному рівні:

- Розв'язує найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності;
- Формулює властивості показникової та логарифмічної функцій і також логарифмів;
- Ілюструє властивості функцій за допомогою графіків;
- Будує графіки показникової та логарифмічної функцій;
- Перетворює найпростіші показникові і логарифмічні вирази.

Профільний рівень

Зміст навчального матеріалу за профільним рівнем навчання передбачає наступні теми [1]:

- Степінь із дійсним показником. Показникова функція;
- Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція;
- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- Похідні показникової та логарифмічної функцій;
- Застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах.

Згідно з навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів [1], на профільному рівні, для вивчення теми: «Показникова та логарифмічна функції» виділено 25 годин.

Навчальні досягнення учнів на даному рівні:

- Учень вміє розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- Формулює означення та властивості показникової і логарифмічної функцій;
- Перетворює вирази, що містять логарифми;

- Вміє формулювати означення та властивості логарифмів;
- Вміє знаходити похідні показникової, логарифмічної та степеневі функцій і також застосовувати їх до дослідження цих класів функцій;
- Учень вміє будувати графіки показникової та логарифмічної функцій.

Класи з поглибленим вивченням математики

Зміст навчального матеріалу для класів з поглибленим вивченням математики передбачає наступні теми [1]:

- Степінь із дійсним показником. Показникова функція;
- Логарифми та їх властивості. Логарифмічна функція;
- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- Похідні показникової та логарифмічної функцій. Нерівність Коші як наслідок нерівності Йенсена;
- Застосування показникової та логарифмічної функцій у прикладних задачах.

Згідно з навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів [1], для класів із поглибленим вивченням математики, для вивчення теми: «Показникова та логарифмічна функції» виділено 25 годин.

Навчальні досягнення учнів на даному рівні:

- Учень вміє розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, зокрема з параметрами;
- Формулює означення та властивості показникової і логарифмічної функцій;
- Перетворює вирази, що містять логарифми;
- Вміє формулювати означення та властивості логарифмів;
- Вміє знаходити похідні показникової, логарифмічної та степеневі функцій і також застосовувати їх до дослідження цих класів функцій;
- Учень вміє будувати графіки показникової та логарифмічної функцій.

Перейдемо до порівняльного аналізу навчального матеріалу, використовуючи для цього діючі підручники з Алгебри і початків аналізу.

Розглянемо підручник Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 11 класу [3].

В даному підручнику тема «Показникова та логарифмічна функції» подається, як окремий розділ, який містить чотири параграфи. Кожен параграф розпочинається з теоретичних відомостей, які доповнюються окремо виділеними означеннями. Після теоретичного матеріалу є можливість перевірити засвоєні знання в рубриці «Перевір себе». Далі теорія подається на прикладі розв’язання вправ і завершується теорія тренувальними завданнями для усного розв’язування. Що стосується практичної частини, тобто завдання до параграфа, то у даному підручнику ці завдання поділено на три рівні: рівень А, рівень В, рівень В, тобто завдання подаються за принципом поступовості - від найпростіших до більш складних. Завершується параграф вправами для повторення. В кінці розділу є два варіанти самостійних робіт, таблицка у якій коротко представлені основні теоретичні відомості під назвою «Скарбничка досягнень і набутих компетентностей», після чого є декілька історичних відомостей про визначних математиків. Завершується розділ тематичними тестами для перевірки знань.

Розглянемо підручник Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу для 11 класу, академічний рівень, профільний рівень [4].

В даному підручнику тема «Показникова та логарифмічна функції» подається, як окремий розділ, що є аналогічним до підручника рівня стандарту. Проте в даному підручнику тема є більш розгорнута і охоплює вісім параграфів. Знову ж таки, кожен параграф розпочинається з теоретичних відомостей, які доповнюються окремо виділеними означеннями та ілюстраціями. Після теоретичного матеріалу є можливість перевірити засвоєні знання в рубриці «Перевір себе». Далі теорія подається на прикладі розв’язання вправ і завершується теорія тренувальними завданнями для усного розв’язування. Що стосується практичної частини, тобто завдання до параграфа, то у даному підручнику ці завдання поділено на три рівні: рівень А, рівень В, рівень В, тобто завдання подаються за принципом поступовості - від найпростіших до більш складних. Завершується параграф вправами для повторення. В кінці

розділу є декілька історичних відомостей про визначних математиків. Завершується розділ узагальненням теоретичних відомостей з цілого розділу.

Розглянемо наступний підручник Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 11 класу [5].

Досліджувана тема розглядається в першому параграфі першого розділу. В цьому параграфі учень ознайомиться з таким поняттям, як степінь з довільним дійсним показником; дізнається, що таке показникова та логарифмічна функції, ознайомиться з властивостями цих функцій та навчиться розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

Отже, проаналізуємо детальніше зміст параграфу. Параграф складається з восьми пунктів. Кожен з яких починається з теоретичного матеріалу, який містить теореми, означення, рисунки та приклади розв'язування задач. Після теорії пропонується три завдання для перевірки знань. Практична частина пункту зібрана в одну групу, тобто немає поділу на три категорії складності завдань, як в попередньому підручнику. Завершується практика вправами для повторення та цікавими фактами до теми. В кінці розділу є зразок олімпіадних завдань: Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.), де пропонується п'ять завдань для розв'язування та доведення. Після олімпіадних завдань є також завдання в тестовій формі (18 завдань). Завершується параграф «Показникова та логарифмічна функції» виокремленням основних означень, формул, властивостей, що є досить корисним для учня.

Тепер перейдемо до аналізу підручника для профільного рівня. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу: профільний рівень: підручник для 11 класу [6].

Досліджувана тема розглядається в першому розділі, який містить вісім пунктів. В даному розділі учень ознайомиться з поняттям степеня з довільним дійсним показником; вчить, що таке показникова та логарифмічна функції, досліджує властивості цих функцій; розв'язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Кожен з пунктів даного розділу розпочинається з теоретичного матеріалу, що

включає леми, теореми, означення, рисунки та приклади розв'язування вправ. Після теорії одразу розпочинається практична частина, яка зібрана в одну групу завдань. Порівняно з рівнем стандарту, тут немає завдань для перевірки знань та немає поділу завдань за рівнями складності. В кінці розділу є зразок олімпіадних завдань: Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.), як в підручнику для рівня стандарту. Завершується розділ «Показникова та логарифмічна функції» викремленням основних означень, формул, властивостей, що є досить корисним для учня.

Особливість даного підручника в наступному: теоретична частина містить багато теорем, лемм та наслідків; кожен з пунктів пропонує багато зразків розв'язування завдань різного типу складності.

Проаналізовані вище підручники є найбільш практичними для використання. Матеріал, який розглядається в даних підручниках підібраний так, щоб учень усвідомив важливість вивчення даної теми та навчився використовувати отримані знання в житті.

Проаналізувавши зміст вище перелічених підручників, можна зробити такі висновки:

Навчальний матеріал, що подається в даних підручниках за принципом доступності та послідовності цілком відповідає профілю навчання.

Кожен з підручників висвітлює тему «Показникова та логарифмічна функції» повно та доступно.

Навчальний матеріал викладений в підручниках на відповідних рівнях сприяє усвідомленню місця та ролі математики.

Підручники містять різнорівневі вправи, що дає можливість застосовувати засвоєний матеріал, як до розв'язування стандартних задач, так і до задач креативного характеру.

Аналізувавши зміст розглянутих мною підручників, можна зробити висновок, що на розвиток математичних компетентностей сприяє кожен з них, проте, на мою думку, в підручнику Г. П. Бевза більше вправ та задач, що сприяють їх розвитку.

1.2 Мета навчання та основні вимоги до знань і вмінь учнів по заданій темі

Однією з основних тем шкільної програми з математики в старшій школі є «Показникова та логарифмічна функції». Під час вивчення даної теми учні засвоюють поняття показникової та логарифмічної функції, досліджують їх властивості та графіки, узагальнюють знання про корені та степені, розвивають вміння та навички виконувати тотожні перетворення виразів і найголовніше - вчать розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння, нерівності, системи. Багато уваги приділяється саме розв'язуванню показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей, так як такого роду завдання часто зустрічаються на вступних екзаменах, що є одним з факторів актуальності теми дослідження.

Розділ «Показникова та логарифмічна функції» знайомлять учнів з наступними темами:

- Степінь із довільним дійсним показником. Показникова функція.
- Показникові рівняння.
- Показникові нерівності.
- Логарифми та їх властивості.
- Логарифмічна функція та її властивості.
- Логарифмічні рівняння.
- Логарифмічні нерівності.
- Похідна показникової та логарифмічної функції.

В ході вивчення учнями вище перелічених тем, можемо виділити результат, який має бути досягнутий, це і буде метою навчання.

Отже, мета вивчення заданої теми наступна:

о Учні вчать формулювати означення показникової функції; означення логарифмічної функції; властивості цих функцій; означення логарифма; властивості логарифмів.

о Учні вчать будувати графіки показникової функції; логарифмічної функції.

о Учні вчать розв'язувати показникові рівняння; показникові нерівності та си-

стеми; логарифмічні рівняння; логарифмічні нерівності та системи.

○ Учні вчать перетворювати вирази, що містять логарифми.

○ Учні вчать застосовувати показникову і логарифмічну функції до прикладних задач.

○ Учні вчать знаходити похідні показникових функцій; логарифмічних функцій; степеневих функцій. Також вчать застосовувати їх до дослідження цих класів функцій.

Для досягнення мети розглянемо наступні завдання (*навчальні, розвиваючі, виховні*):

Навчальні завдання:

- Ввести основні поняття та терміни теми «Показникова та логарифмічна функції».
- Дослідити та проаналізувати властивості показникової і логарифмічної функції та їх графіки.
- Детально розглянути та навчити будувати графіки показникової і логарифмічної функції.
- Використовуючи набуті знання про властивості функцій навчити виконувати тотожні перетворення.
- Навести приклади та навчити детально розв'язувати рівняння та нерівності.
- Продемонструвати приклади використання показникової та логарифмічної функції в навколишньому середовищі.

Розвиваючі завдання:

- Сформулювати в учнів творче мислення.
- Розвинути інтерес до показникової та логарифмічної функції.
- Удосконалити математичне мовлення учнів.

Виховні завдання:

- Виховати культуру спілкування в учнів для колективної роботи.
- Виховати почуття відповідальності за виконання поставлених завдань.

1.3 Становлення та розвиток математичних компетентностей в учнів на уроках математики

Математична компетентність - здатність особи бачити математику в житті, створювати математичні моделі об'єктів, явищ, процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час виконання навчально-пізнавальних і практично зорієнтованих завдань [2].

Компонентами математичної компетентності є: інтерес та внутрішня мотивація учня; комплекс знань та умінь; навички самостійності та самоконтролю.

Згідно з державним стандартом мета математичної освітньої галузі наступна:

- Розвиток мислення;
- Формування математичних та інших ключових компетентностей;
- Вміння робити усвідомлений вибір;
- Застосовувати математичні методи до розпізнавання та моделювання процесів

з повсякденного життя.

Таким чином, вивчаючи математику в школі учні досягають таких результатів:

- Застосовують математику для пізнання навколишнього світу;
- Розв'язуючи різноманітні завдання моделюють та розробляють стратегію дій;
- Досліджують, аналізують та визначають проблеми, які можна розв'язати математичними методами;
- Оцінюють процес та результат дослідження того чи іншого завдання.

Розрізняють три рівні математичної компетентності: *рівень відтворення, рівень встановлення зв'язків, рівень міркувань*.

Рівень відтворення - це пряме застосування відомих алгоритмів, стандартних прийомів, відомих фактів та розпізнавання математичних об'єктів і властивостей.

Рівень встановлення зв'язків - це рівень, який будується на репродуктивній діяльності розв'язання задач, що є близькими до типових завдань. Зміст та умова завдання підказує, які методи слід застосовувати і який розділ математики необхідно використати, при цьому встановлюючи зв'язок між даними в умові, або ж різними уявленнями ситуації, описаної в завданні.

Рівень міркувань - це рівень, який вимагає роздумів, творчості та міркувань, щоб розробити алгоритм розв'язування завдань. Часто для розв'язування завдань цього рівня потрібно знайти закономірність, провести аналіз та обґрунтувати отримані результати.

Розрізняють декілька видів математичної компетентності: *логічна компетентність, процедурна компетентність, технологічна компетентність, методологічна компетентність та дослідницька компетентність*.

Логічна компетентність - уміння спростувати твердження та довести його дедуктивним методом.

Процедурна компетентність - володіння навичками, які дозволяють розв'язувати типові математичні задачі.

Технологічна компетентність - уміння застосовувати сучасні математичні прийоми.

Методологічна компетентність - уміння оцінювати та застосовувати математичні методи.

Дослідницька компетентність - володіння математичними методами та коректність їх застосування для розв'язування практичних і прикладних задач.

Висновки до розділу I

Аналізуючи чинні підручники з алгебри та початків аналізу для учнів 11 класу, можна виділити те, що підручники профільного і академічного рівня, а також рівня з поглибленим вивченням математики подають матеріал не тільки текстом, але і з використанням великої кількості схем та таблиць. Така подача інформації значно полегшує сприйняття матеріалу. Проте, в підручниках стандартного рівня також доступно розглядається дана тема. Крім цього, подається достатня кількість розглянутих прикладів, що допомагає учневі краще засвоїти алгоритм розв'язування того чи іншого завдання.

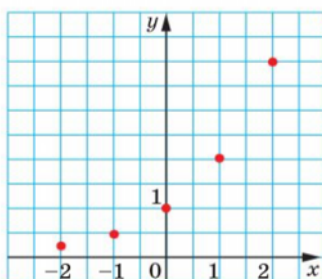
Набуття учнями математичних компетентностей є однією з основних складових життєвих компетентностей, тому головною метою освіти є всебічний розвиток людини, як особистості. Питання впровадження компетентнісного підходу в навчальний процес досліджується багатьма науковцями та педагогами з різних позицій.

РОЗДІЛ 2. ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ, ЇХ РОЛЬ І МІСЦЕ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

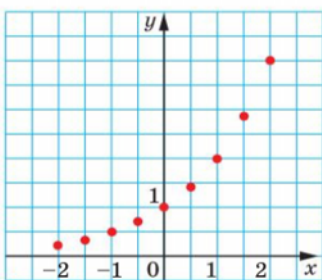
2.1 Показникова функція

Маємо функцію $f(x) = 2^x$, де областю визначення функції f є множина $\mathbb{Q}$, x є раціональним числом.

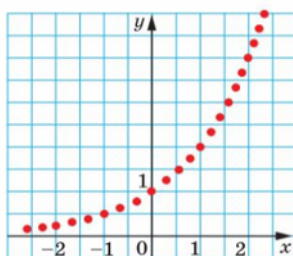
Розглянемо рисунок 1, на якому позначено точки графіка функції f , що відповідають цілим значенням x .



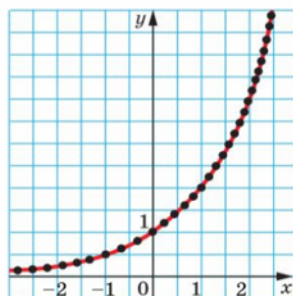
Знайдемо значення функції $f(x) = 2^x$ при: $x = \frac{1}{2}$, $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41$. У випадку, коли до точок рисунка 1 додати точки графіка функції $f(x)$ ($x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$), то в результаті отримаємо множину точок, яка зображена на рисунку 2:



Для того, щоб отримати більш точний графік функції f необхідно позначити точки, які будуть відповідати іншим раціональним значенням аргументу (рис.3).



Існує функція g така, що її графік проходить через усі точки графіка функції f і є неперервною на $\mathbb{R}$ (рис 4).



Множина точок графіка функції f є підмножиною множини точок графіка функції g [5].

Функція g називається *показниковою*, що має основу 2 і виглядає наступним чином: $g(x) = 2^x$.

Також дану функцію можна розглядати з будь-якою основою a , $a > 0$, $a \neq 1$, при цьому вона виглядатиме так: $g(x) = a^x$.

Значення функції g у точці x називають *степенем додатного числа з дійсним показником* і позначають a^x [5].

Розглянемо наступні рівності для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних чисел x, y :

1. $a^x a^y = a^{x+y}$.
2. $a^x \div a^y = a^{x-y}$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Властивості показникової функції $f(x) = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$.

1. Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел, тобто $D(f) = \mathbb{R}$ [5].

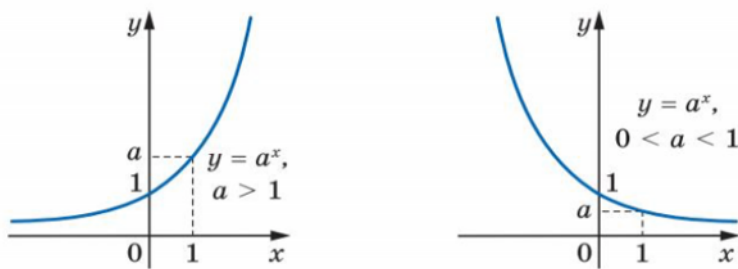
2. Областю значень показникової функції є множина $(0; +\infty)$, тобто $E(f) = (0; +\infty)$ [5].

3. Показникова функція не має нулів, і проміжок $(-\infty; +\infty)$, є її проміжком знакосталості [5].

4. При $a > 1$ показникова функція є зростаючою, при $0 < a < 1$ показникова функція є спадною [5].

5. Показникова функція є диференційовною [5].

Розглянемо графіки показникової функції для випадків: $a > 1$ і $0 < a < 1$.



Звернемо увагу на одну важливу властивість графіка функції $y = a^x$ зі збільшенням модуля x . У випадку, коли $a > 1$ і $x < 0$ спостерігається, що відстані від точок графіка $y = a^x$ до осі абсцис стають все меншими, проте ніколи не будуть дорівнювати нулю. Аналогічну властивість має графік a^x при $0 < a < 1, x > 0$.

2.2 Показникові рівняння та нерівності

Показникові рівняння

Показниковими рівняннями називаються рівняння, у яких невідоме буде міститися при основах в показнику степеня.

Розглянемо приклади показникових рівнянь:

$$2^x = 8,$$

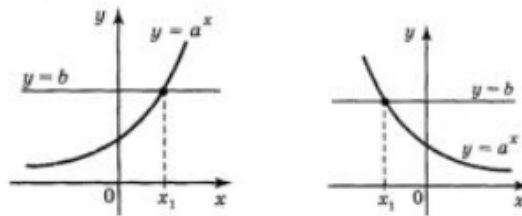
$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0, 3^{x-4} = 0, 3^{x^2},$$

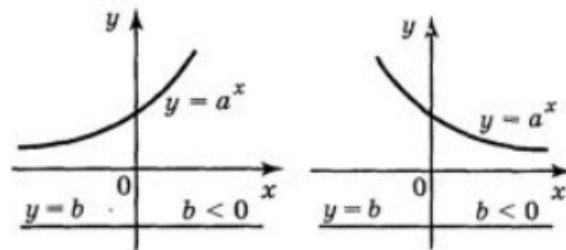
де змінна міститься тільки у показнику степеня.

Розглянемо найпростіше показникове рівняння $a^x = b$, $a > 0, a \neq 1$. Так як множина значень функції $y = a^x$ є множиною додатних значень, то отримаємо такі випадки розв'язання рівняння $a^x = b$:

1) рівняння $a^x = b$ буде мати один корінь, якщо $b > 0$.



2) рівняння $a^x = b$ не має коренів, якщо $b < 0$.



Теорема 1. При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ [5].

Доведення. Зрозуміло, що якщо $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Слід довести, що з такої рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ буде випливати така рівність $x_1 = x_2$.

Нехай $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$, або $x_1 > x_2$. Припустимо, наприклад, що $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$, яка буде або спадною, або зростаючою.

Звідси, з такої рівності $x_1 < x_2$ слідує що $a^{x_1} < a^{x_2}$ при $a > 1$, або $a^{x_1} = a^{x_2}$

при $0 < a < 1$. Але за умовою буде виконуватися рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$, тому маємо суперечність. У випадку, коли $x_1 > x_2$ також отримаємо суперечність. Таким чином $x_1 = x_2$.

Наслідок. Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

Існує декілька методів розв'язання показникових рівнянь:

- Винесення спільного множника за дужки;
- Зведення до спільної основи;
- Зведення рівняння до квадратного;
- Зведення до спільного показника;
- Графічний спосіб.

Приклад 1 (Винесення спільного множника за дужки).

$$3^{x+1} + 3^x = 108$$

$$3^x \cdot 3 + 3^x = 108$$

$$3^x(3 + 1) = 108$$

$$3^x \cdot 4 = 108$$

$$3^x = 108 \div 4$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3.$$

Приклад 2 (Зведення до спільної основи).

$$15^{x^2-5x+6} = 1$$

$$1 = 15^0,$$

$$15^{x^2-5x+6} = 15^0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Приклад 3 (Зведення рівняння до квадратного).

$$49^x - 8 \cdot 76x + 7 = 0$$

$$(7^2)^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$$

Нехай $7^x = t$, тоді:

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$t_1 = 7, t_2 = 1$$

$$1) 7^x = 7, x = 1.$$

$$2) 7^x = 1, 7^x = 7^0, x = 0.$$

Приклад 4 (Зведення до спільного показника).

$$2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^3$$

$$10^x = 10^{-1} \cdot 10^{3x-3}$$

$$10^x = 10^{3x-4}$$

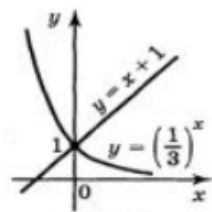
$$x = 3x - 4$$

$$x = 2.$$

Приклад 5 (Графічний спосіб).

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$$

В одній системі координат будемо графіки двох функцій $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ і $y = x + 1$.



Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої $x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

Показникові нерівності

Розглянемо приклади показникових нерівностей:

$$0,2 < 25$$

$$7^{x^2} > 2^x$$

$$2^x + 5^x > 1.$$

Для розв'язування показникових нерівностей використовують властивості показникової функції, а саме:

- функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;
- функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;
- функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Розглянемо класифікацію показникових нерівностей за способами їх розв'язання:

а) Найпростіші показникові нерівності та ті, які зводяться до найпростіших:

- ☐ винесення за дужки спільного множника;
- ☐ зведення до однієї основи;
- ☐ ділення обох частин на степінь.

б) Показникові нерівності, котрі зводяться до алгебраїчних:

- ☐ однорідні;
- ☐ шляхом заміни звести до квадратної форми.

в) Нестандартні нерівності.

1) Нерівності виду $(f(x))^{g(x)} > 1$.

$$\begin{aligned} (f(x))^{g(x)} > 1 &\iff (f(x))^{g(x)} > (f(x))^0 \iff \\ &\iff \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) Нерівності виду $(f(x))^{g(x)} < 1$.

$$\begin{aligned} (f(x))^{g(x)} < 1 &\iff (f(x))^{g(x)} < (f(x))^0 \iff \\ &\iff \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Нерівності виду $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)}$.

Такі нерівності найчастіше розв'язують логарифмуванням обох частин, при цьому зберігаючи знак початкової нерівності у випадку, коли основа $a > 1$, і у випадку, коли основа логарифма $0 < a < 1$, то знак міняється на протилежний.

Приклад 1.

$$2^x < 8$$

$$2^x < 2^3$$

$$x < 3$$

$$x \in (-\infty; 3).$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &< \frac{1}{16} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &< \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ x &> 4 \end{aligned}$$

$$x \in (4; +\infty).$$

Приклад 3.

$$3^{x^2-1} \geq 27$$

$$3^{x^2-1} \geq 3^3$$

$$x^2 - 1 \geq 3$$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

Приклад 4.

$$(0, 7)^{\frac{x^2-5x+6}{x+3}} \geq 1$$

$$(0, 7)^{\frac{x^2-5x+6}{x+3}} \geq (0, 7)^0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x+3} \leq 0$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup [2; 3].$$

Приклад 5.

$$2^{x+2} + 2^x < 20$$

$$2^x(2^2 + 1) < 20$$

$$2^x \cdot 5 < 20$$

$$2^x < 4$$

$$x < 2$$

$$x \in (-\infty; 2).$$

Приклад 6.

$$2^{2x} + 2^x \geq 20$$

$$2^x = t, t > 0$$

$$t^2 + t - 20 \geq 0$$

$$t_1 = -5, t_2 = 4$$

$$2^x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

$$x \in [2; +\infty).$$

2.3 Логарифм і його властивості

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a де $a > 0, a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b [5].

Позначають це так $\log_a b$.

При $a > 0, a \neq 1, b > 0$, з означення логарифма буде слідувати виконання наступної рівності

$$a^{\log_a b} = b,$$

яка називається *основною логарифмічною тотожністю*.

При $a > 0, a \neq 1$, з урахуванням означення логарифма, справедливими будуть також такі рівності:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1.$$

Десятковим логарифмом називається логарифм з основою 10 і позначається так: $\lg b$.

При $b > 0$ та з урахуванням основної логарифмічної тотожності справедливим є наступне: $10^{\lg b} = b$.

Основні властивості логарифмів

Теорема (логарифм добутку). При $x > 0, y > 0, a > 0$ і $a \neq 1$, є справедливою така рівність

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Доведення. Маємо два вирази: $a^{\log_a xy}$, $a^{\log_a x + \log_a y}$.

Тепер доведемо, що ці вирази є рівними.

Застосувавши основну логарифмічну тотожність та властивості степеня, отримаємо:

$$a^{\log_a xy} = xy,$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Таким чином, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$.

Отже, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Теорема (логарифм частки). При $x > 0, y > 0, a > 0$ і $a \neq 1$, є справедливою така рівність

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Теорема (логарифм степеня). При $x > 0, a > 0$ і $a \neq 1$, то для $\forall \beta \in \mathbb{R}$ є справедливою така рівність

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x.$$

Теорема (перехід від однієї основи логарифма до іншої).

При $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ є справедливою така рівність

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Наслідок. При $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ є справедливою така рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Наслідок. При $a > 0, b > 0, a \neq 1$, для $\forall \beta \neq 0$ є справедливою така рівність

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b.$$

2.4 Логарифмічна функція та її властивості

Розглянемо, що таке логарифмічна функція.

При $a > 0, a \neq 1$: будь-якому числу x , що є додатним можна поставити у відповідність число y таке, що буде справедливою наступна рівність: $y = \log_a x$. Тобто маємо функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $G(f) = (0; +\infty)$.

Основні властивості логарифмічної функції.

1. Функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль $x = 1$ [5].
2. Функція $y = \log_a x$ має два проміжки знакосталості:

Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$, $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$;

Якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$, $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$ [5].

3. Функція $y = \log_a x$ є зростаючою при $a > 1$ та є спадною при $0 < a < 1$ [5].
4. Логарифмічна функція є диференційовною [5].

2.5 Логарифмічні рівняння та нерівності

Логарифмічним називають рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду:

$$\log_a x = b,$$

$a > 0, a \neq 1$.

Такого роду рівняння можна розв'язати за допомогою означення логарифма.

Теорема. Якщо $a > 0, a \neq 1$, то рівняння виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 [5]. \end{cases}$$

Приклад 1.

$$\log_2(2x - 1) = 3$$

$$2x - 1 = 2^3$$

$$2x - 1 = 8$$

$$2x = 9$$

$$x = 4, 5.$$

Приклад 2.

$$\log_2 \log_3 x = 2$$

$$\log_3 x = 2^2$$

$$\log_3 x = 4$$

$$x = 3^4$$

$$x = 81$$

Приклад 3.

$$\log_x 16 = 2$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$x = 4.$$

Приклад 4.

$$\log_3(3^{2x} - 2) = x$$

$$3^{2x} - 2 = 3^x$$

$$3^{2x} - 3^x - 2 = 0$$

$$3^x = t, t > 0$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_1 = 2, t_2 = -1$$

$$3^x = 2$$

$$x = \log_3 2.$$

Логарифмічні нерівності

Логарифмічною називають нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма.

Для розв'язання логарифмічних нерівностей застосовують властивості логарифмічної функції, а саме монотонність, тобто зростання чи спадання (залежно від величини основи).

Для цього також застосовують взаємну оберненість, як показникової функції, так і логарифмічної.

Теорема. У випадку, коли $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ буде рівносильна такій системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

У випадку, коли $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ буде рівносильна такій системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Приклад 1.

$$\log_{0,9}(3x) > 2$$

$$0 < 3x < 0,81$$

$$< 0x < 0,27$$

$$x \in (0; 0,27).$$

Приклад 2.

$$\log_3(2x - 1) \leq 3$$

$$\log_3(2x - 1) \leq \log_3 3^3$$

$$\log_3(2x - 1) \leq \log_3 27$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 27, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 28, \\ 2x > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 14, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x \in (\frac{1}{2}; 14].$$

Приклад 3.

$$\log_{0,2}(2x - 1) > \log_{0,2}(3x - 4)$$

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3x - 4, \\ 2x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3x < 1 - 4, \\ 2x > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x < -3, \\ x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$x \in (3; +\infty).$$

2.6 Похідна показникової та логарифмічної функцій

Серед показникових функцій $f(x) = a^x$ існує єдина функція, похідна якої буде дорівнювати самій функції $f'(x) = f(x)$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. Основою степеня такої функції є число e , а функція виглядає так $f(x) = e^x$.

Таким чином,

$$(e^x)' = e^x.$$

Таке число є ірраціональним і записується у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$e = 2,71828182845 \dots$$

Отже, функція $f(x) = e^x$ буде називатися *експонентною*.

Що стосується логарифма, то логарифм з основою e буде називатися *натуральним логарифмом*. Виглядає він так $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Так як $f(x) = a^x$ дорівнює $a^x \ln a$, то при $a > 0, a \neq 1$ можна записати:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

А також справедливими є наступні рівності:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Висновки до розділу II

Вивчення показникової та логарифмічної функції передбачено на усіх рівнях навчальної програми, проте не на кожному рівні однаковий обсяг матеріалу. У шкільному курсі математики значне місце займають показникові та логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи. Знайомство учнів з цими рівняннями та нерівностями відбувається в 11 класі, після того, як учні вже ознайомилися з показниковими та логарифмічними функціями і їх властивостями.

Щоб розкрити роль і місце показникової та логарифмічної функції в шкільному курсі математики я обрала підручник автора Мерзляк А. Г. рівень стандарту.

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМА ВПРАВ, СПРЯМОВАНА НА РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧ- НИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЗАДАНОЇ ТЕМИ

3.1 Задачі шкільного рівня

1. Спростити вираз: $\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} &= \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{\sqrt{7}}-1)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \\ &= \frac{(a^{2\sqrt{7}}-1)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1.\end{aligned}$$

Відповідь: 1.

2. Розв'язати нерівність: $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geq \left(\frac{9}{25}\right)^x$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x &\geq \left(\frac{9}{25}\right)^x, \\ \left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x &\geq \left(\frac{9}{25}\right)^x, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x &\geq \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.\end{aligned}$$

Так як $0 < \frac{3}{5} < 1$, то отримана вище нерівність буде рівносильна такій нерівності:
 $x \leq 2x$; $x \geq 0$.

Відповідь: $[0; +\infty)$.

3. Знайти значення виразу: $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$.

Розв'язання. Застосувавши до заданої рівності теореми про логарифм добутку і логарифм частки, будемо мати наступну рівність:

$$\begin{aligned}\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 &= \log_2(20 \cdot 12) - \log_2 15 = \\ &= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.\end{aligned}$$

Відповідь: 4.

4. Знайти область визначення функції: $f(x) = \log_3(x^2 + 3x)$.

Розв'язання. У зв'язку з тим, що областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$ буде областю визначення заданої функції.

Отже, маємо що:

$$x^2 + 3x > 0,$$

$$x(x + 3) > 0,$$

$$x < -3 \quad \text{або} \quad x > 0.$$

Таким чином, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь: $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

5. Розв'язати рівняння: $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Розв'язання. Так як $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то наше рівняння буде рівносильне такому рівнянню

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Припустимо, що $\log_2 x = t$. В такому разі маємо: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Отже,

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{cases}$$

Повернемося до початкового рівняння та запишемо отриману сукупність:

$$\begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $\sqrt{2}; 4$.

6. Розв'язати нерівність: $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.

Розв'язання. Задана в умові нерівність буде рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x > 1, \\ x > 2. \end{cases}$$

Відповідь: $(2; +\infty)$.

7. Знайти похідні таких функцій:

$$1) y = e^x(x^2 - 4x); \quad 2) y = x^3 \cdot 3^x; \quad 3) y = \frac{x^4}{\ln x}.$$

Розв'язання.

1) Скористаємося теоремою про похідну добутку двох функцій:

$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x = \\ &= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4). \end{aligned}$$

2)

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

3)

$$y' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4 \ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

8. (Пробне ЗНО 2020) Задано дві функції: $f(x) = 3 - \frac{x}{4}$ і $g(x) = \log_2 x$.

- 1) Побудувати графік функції $f(x)$.
- 2) Побудувати графік функції $g(x)$.
- 3) Позначити та записати координати точки перетину двох графіків $f(x)$ і $g(x)$.
- 4) Розв'язати нерівність $f(x) \geq g(x)$ скориставшись рисунком.

Розв'язання.

- 1) Для побудови першого графіка $f(x) = 3 - \frac{x}{4}$ заповнимо таблицю:

x	0	4
y	3	2

- 2) Для побудови першого графіка $g(x) = \log_2 x$ заповнимо таблицю:

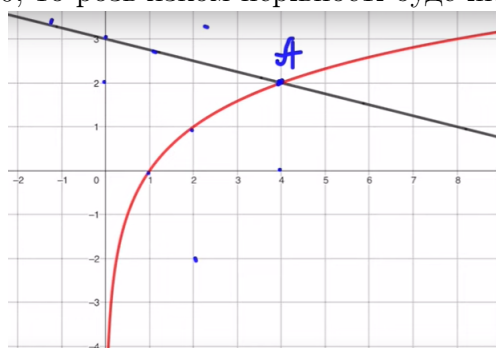
x	1	2	4
y	0	1	2

- 3) $A(4; 2)$.

- 4) Знайдемо розв'язок даної нерівності за графіком $f(x) \geq g(x)$.

Це означає, що кожна точка прямої $f(x)$ буде вище кожної точки графіка логарифмічної функції $g(x)$, або співпадають.

Отже, оскільки $x > 0$, то розв'язком нерівності буде інтервал $x \in (0; 4]$.



3.2 Аналіз засвоєних знань учнів 11 класу

Для перевірки розвитку математичних компетентностей та засвоєних знань учнів мною було розроблено чотири варіанти самостійних робіт для учнів 11 класу. Теми самостійних робіт наступні: «Показникова функція», «Логарифмічна функція» (для кожної з тем є два варіанти завдань). Перевірка та аналіз результатів я проводила під час проходження виробничої практики з учнями 11 класу.

Отже, розглянемо запропоновані мною два варіанти самостійної роботи по темі «Показникова функція»:

I Варіант

1. Вказати, яка з поданих функцій є показниковою:

а) $y = 3^x$;

б) $y = x^3$;

в) $y = x$;

г) $y = 7, 2^9$.

2. Оберіть множину значень показникової функції при $0 < a < 1$:

а) $(-\infty; 0)$;

б) $(-\infty; +\infty)$;

в) $(0; +\infty)$;

г) $(1; +\infty)$.

3. Вкажіть зростаючу функцію:

а) $y = 0, 4^x$;

б) $y = 8^x$;

в) $y = 0, 01^4$;

г) $y = -2^x$.

4. При $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$ порівняти основу степеня a ($a > 0$) з одиницею:

а) $a > 1$;

б) $a = 1$;

в) $a < 1$;

г) $0 < a < 1$.

5. Спростити вираз $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$:

а) $a^{\sqrt{2}}$;

б) $a^{2+\sqrt{2}}$;

в) $a^{2-\sqrt{2}}$;

г) a^2 .

6. При якому із наведених значень a ($a > 0, a \neq 1$) графік функції $y = a^x$ буде проходити через точку $A(1; 7)$:

а) $a = 7$;

б) $a = 1$;

в) $a = \frac{1}{7}$;

г) $a = 0$.

7. Для заданої функції $y = 1,4^x$ побудувати схематично графік та описати її властивості.

8. Для заданої функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ знайти найбільше та найменше значення при $x \in [-2; 3]$.

II Варіант

1. Вказати, яка з поданих функцій є показниковою:

а) $y = 5^x$;

б) $y = x^5$;

в) $y = x$;

г) $y = 6, 2^0$.

2. Оберіть множину значень показникової функції при $0 > 1$:

а) $(-\infty; 0)$;

б) $(-\infty; +\infty)$;

в) $(0; +\infty)$;

г) $(1; +\infty)$.

3. Вкажіть спадну функцію:

а) $y = 7^x$;

б) $y = 0, 1^x$;

в) $y = 0,01^4$;

г) $y = 2,5^x$.

4. При $a^{-2} > a$ порівняти основу степеня a ($a > 0$) з одиницею:

а) $0 < a < 1$;

б) $a = 1$;

в) $a < 1$;

г) $a > 1$.

5. Спростити вираз $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}$:

а) $a^{\sqrt{25}}$;

б) $a^{5+\sqrt{20}}$;

в) $a^{5-\sqrt{20}}$;

г) a^{10} .

6. При якому із наведених значень a ($a > 0, a \neq 1$) графік функції $y = a^x$ буде проходити через точку $B(2; 9)$:

а) $a = 3$;

б) $a = 9$;

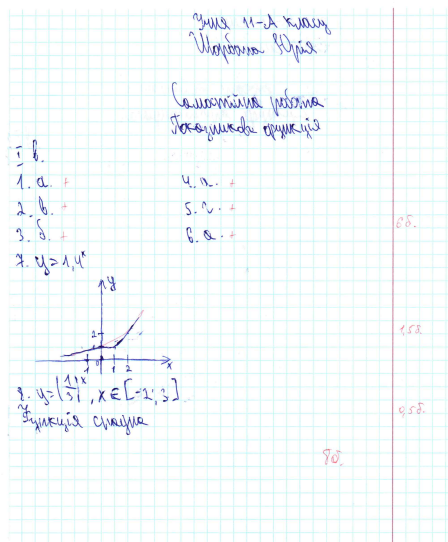
в) $a = \frac{1}{9}$;

г) $a = 2$.

7. Для заданої функції $y = 0,7^x$ побудувати схематично графік та описати її властивості.

8. Для заданої функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ знайти найбільше та найменше значення при $x \in [-1; 4]$.

Перевірку знань проходило 13 учнів 11-А класу. Отже, розглянемо відповіді одного з учнів до запропонованих вище завдань. Решту робіт знаходиться в ДОДАТКУ А.



У результаті виконання самостійної роботи учні набрали 104 бали, тобто середнє арифметичне оцінок = 8.

Тепер розглянемо запропоновані мною два варіанти самостійної роботи по темі «Логарифмічна функція»:

I Варіант

1. Вказати, яка з поданих функцій є логарифмічною:

а) $y = \log_x 2$;

б) $y = \log_1 x$;

в) $y = \log_2 x$;

г) $y = \log_x 10$.

2. Логарифмічна функція при $0 < a < 1$ на проміжку $(0; +\infty)$:

а) зростає;

б) спадає.

3. При $a > 0$ вказати множину значень логарифмічної функції:

а) $y \in \mathbb{R}$;

б) $(0; +\infty)$;

в) $(-\infty; 0)$;

г) $y \in \mathbb{N}$.

4. Вказати зростаючу функцію:

а) $y = \log_{8,5} x$;

б) $y = \log_{0,3} x$;

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

г) $y = \log_{0,75} x$.

5. При $\log_a 5 < \log_a 4,5$ порівняти a ($a > 0, a \neq 1$) з одиницею:

а) $a > 1$;

б) $a = 1$;

в) $a < 1$;

г) $0 < a < 1$.

6. Чи буде належати точка $A\left(\frac{1}{16}; 2\right)$ графіку функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$:

а) так;

б) ні.

7. Для заданої функції $y = \log_3 x$ побудувати схематично графік та описати її властивості.

8. Для заданої функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ знайти найбільше та найменше значення при $x \in [1/4; 16]$.

II Варіант

1. Вказати, яка з поданих функцій є логарифмічною:

а) $y = \log_x 7$;

б) $y = \log_1 x$;

в) $y = \log_4 x$;

г) $y = \log_x 0,75$.

2. Логарифмічна функція при $0 < a < 1$ на проміжку $(0; +\infty)$:

а) спадає;

б) зростає.

3. При $0 < a < 1$ вказати множину значень логарифмічної функції:

а) $y \in \mathbb{R}$;

б) $(0; +\infty)$;

в) $(-\infty; 0)$;

г) $y \in \mathbb{N}$.

4. Вказати спадну функцію:

а) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$;

б) $y = \log_3 x$;

в) $y = \log_{\frac{8}{5}} x$;

г) $y = \log_{7,5} x$.

5. При $\log_a 3, 8 < \log_a 3$ порівняти a ($a > 0, a \neq 1$) з одиницею:

а) $0 < a < 1$;

б) $a = 1$;

в) $a < 1$;

г) $a > 1$.

6. Чи буде належати точка $A\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ графіку функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$:

а) ні;

б) так.

7. Для заданої функції $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ побудувати схематично графік та описати її властивості.

8. Для заданої функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ знайти найбільше та найменше значення при $x \in [1/9; 3]$.

Отже, розглянемо для прикладу відповіді одного з учнів до запропонованих вище завдань. Решту виконаних робіт міститься в ДОДАТКУ Б.

Учні 11 класу Кордун Анастасія		
самостійна робота по логарифмічній функції		
1 варіант		
1. b	4. a	30
2. a	5. 2	
3. a	6. a	
7. $y = \log_2 x$		00
7		
8. $y = \log_2 x, x \in [\frac{1}{16}; 16]$		
Функція спадає		
$y(\frac{1}{16}) = \log_2 \frac{1}{16} = -4 - y_{\max}$		
$y(16) = \log_2 16 = 4 - y_{\min}$		
60		

У результаті виконання самостійної роботи учні набрали 79 балів, тобто середнє арифметичне оцінок ≈ 6 .

Аналізуючи результати учнів по двох самостійних, можна зробити висновок, що логарифмічна функція дається учням важче. Більше того, така тенденція стосується кожного з учнів, про це свідчить таблиця нижче, де показано, що кожен з учнів показав кращі результати по темі «Показникова функція».

Учень	Показникова функція	Логарифмічна функція
1. Бешота Микола	5 б.	4 б.
2. Богуняк Анна	8 б.	7 б.
3. Бойчак Віта	6 б.	5 б.
4. Гушул Ангеліна	11 б.	10 б.
5. Кордик Анастасія	11 б.	6 б.
6. Кус Віктор	11 б.	9 б.
7. Локотош Микола	6 б.	4 б.
8. Молдавчук Михайло	4 б.	3 б.
9. Ретізник Юрій	11 б.	7 б.
10. Титор Руслан	6 б.	6 б.
11. Чунтул Владислав	6 б.	5 б.
12. Шорбан Юрій	8 б.	6 б.
13. Штефаньо Ангеліна	11 б.	7 б.

Висновки до розділу III

Об'єктом оцінювання навчальних досягнень учнів є знання, навички та вміння.

Під оцінкою успішності розуміють так звану систему деяких показників, що є відображенням об'єктивних знань учня.

З метою перевірки цих знань, мною було проведено дослідження, яке полягало в перевірці знань учнів по двох темах, які я вивчала з ними протягом проходження практики. Для цієї перевірки я розробила по два варіанти завдань з кожної з наступних тем: «Показникова функція» та «Логарифмічна функція». Результатом перевірки були оцінки отримані учнями після написання самостійних робіт. Як виявилось, учні погано освоїли тему «Логарифмічна функція», це пов'язано з браком часу для відпрацювання необхідного матеріалу.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання дипломної роботи мною було виконано наступні завдання:

- опрацьовано та проаналізовано наукову і методичну літературу;
- проведено аналіз по темі дослідження, використовуючи діючі підручники різних авторів;
- розроблено два варіанти самостійних робіт по заданих функціях для учнів 11 класу;
- проведено аналіз засвоєних знань та розвитку математичних компетентностей учнів на основі проведених та перевірених самостійних робіт.

В результаті аналізу мною було виявлено, що кожен з учнів засвоїв тему «Показникова функція» краще за «Логарифмічну функцію». Це означає, що ця тема є більш складнішою для засвоєння учнями і цій темі потрібно приділяти більше уваги, відповідно потрібно більше годин в навчальній програмі для розгляду даної теми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання/ Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. - Х.: Вид-во "Ранок 2011. - 384 с.
2. Український центр оцінювання якості освіти "Рекомендації щодо формування математичної компетентності учнів 43 с.
3. Бевз Г. П., Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти/ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. - К.: Видавничий дім "Освіта 2019. - 272 с.: іл.
4. Бевз Г. П., Алгебра (Алгебра і початки аналізу): підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти: академ. рівень, проф. рівень/ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимірова. - К.: Видавничий дім "Освіта 2011. - 400 с.: іл.
5. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти/ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: Гімназія, 2019. - 208 с.: іл.
6. Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень/ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: Гімназія, 2011. - 431 с.: іл.

ДОДАТОК А

Ученик 11 класу
Повторяє Алгебри

Самостійна робота
Показникова функція

1 варіант

- 1 а. +
- 2 в. +
- 3 б. +
- 4 а. +
- 5 в. +
- 6 а. +

7 $y = 1,4^x$

Властивості

- 1) $D(y) = R$
- 2) $E(y) = (0; +\infty)$
- 3) O_x -линійна функція неперервна
 $Oy: x=0, y=1, (0; 1)$
- 4) Функція зростаюча

6б.
1б.
3б.

Ученик 11 класу
Повторяє Вісн

Самостійна робота
Показникова функція

2 варіант

- 1 а. +
- 2 в. +
- 3 б. +
- 4 а. +
- 5 в. +
- 6 а. +

7 $y = 0,7^x$

8 $y = (\frac{1}{2})^x$, якщо $x \in [-1; 4]$

6б.

Учня 11-А класу
Бешти Миколи

Самостійна робота
Показникова функція

1 варіант

1 а. +
2 б. -
3 а. +
4 а. +
5 з. +
6 а. +
7 14%

58

Учня 11-А класу
Гунтця Владислава

Самостійна робота
Показникова функція

II в.

1 а. +
2 б. +
3 а. +
4 а. +
5 з. +
6 а. +

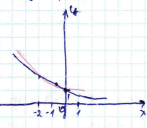
68

Учень 11-й класу
Тішці Ангеліні

Самостійна робота
Показникова функція, 2 варіант.

1 а. +	4 а. +	6.5
2 в. +	5 в. +	
3 д. +	6 а. +	

7 $y = 0,7^x$



Властивості:

- 1) $D(y): \mathbb{R}$
- 2) $E(y): (0; +\infty)$
- 3) O_x - немає т. перетину
 $O_y: x=0; y=1; (0; 1)$
- 4) Функція спадна

2,5 б.

8 $y = (\frac{1}{2})^x, x \in [-1; 4]$

функція спадна: $y(-1) > y(4)$

$y(-1) = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$ - найб. зн.

$y(4) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ - найм. зн.

2,5 б.

11 б.

Учень 10-й класу
Міфедок Анастасія

Самостійна робота
Показникова функція

1 варіант

1. а. +	4. а. +	6.5
2. в. +	5. з. +	
3. д. +	6. а. +	

4. $y = 1,4^x$

Властивості:

1. $D(y): \mathbb{R}$
2. $E(y): (0; +\infty)$
3. O_x - немає перетину
 $O_y: x=0; y=1; (0; 1)$
4. Функція зростаюча

8. $y = (\frac{1}{5})^x, x \in [-2; 2]$, спадна

2,5 б.

$y(-2) > y(2)$

$y(-2) = (\frac{1}{5})^{-2} = 25$ - $y_{\max}$

$y(2) = (\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25}$ - $y_{\min}$

11 б.



Зима 11-й класс
Людмила Николаевна

Самостоятельная работа
Показательная функция

18.

1. $a =$	3. $b =$	5. $c =$	6.8
2. $b =$	4. $a =$	6. $a =$	
4. $y = a^{x^2}$			



Вариант 1:

$y(x) = 2$

$y'(x) = 2 \ln 2 \cdot 2^x$

3) C_1 — константа интегрирования

Сл: $x < 0, y > 1, (0, 1)$

4) Функция строго

2. $y = (\frac{1}{2})^x, x \in [-1; 4]$

Функция строго

$y(-1) = y(4)$

$y(-1) = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$, наибольшее значение

$y(4) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$, наименьшее значение

11.6

Зима 11-й класс
Людмила Николаевна

Самостоятельная работа
Показательная функция

II вариант

1. $a =$	4. $a =$	6.8
2. $b =$	5. $c =$	
3. $b =$	6. $a =$	

7. $y = 0.2^x$

8. $y = (\frac{1}{2})^x$, если $x \in [-1; 4]$

6.6

учня 11-А класу
Мельничук Максим
Самостійна робота
Гомеогенна функція

I варіант

1. б. +
2. б. -
3. б. +
4. б. +
5. а. -
6. б. +

48.

Учня 11-Б класу
Ремизника Ірина
Самостійна робота
Гомеогенна функція

I варіант

1. а. + 3. б. + 5. з. +
2. б. + 4. а. + 6. а. +

7. $y = 4x^2$



Властивості: функція зростає
 $D(y): \mathbb{R}^1$, $E(y): [0; +\infty)$
 $Oy: x=0, y=1, (0;1)$
 Ox : кинетична енергія

8. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^3, x \in [-2; 3]$

$y(-2) > y(3)$ - функція спадає
 $y(-2) = \left(\frac{-2}{2}\right)^3 = -1$ - мінімум
 $y(3) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ - максимум

68
258
258
118.

Землянік 11-й класу
Уладзіслаў Дзімітрук

Самастойная робата
Паказальнік функцыі

І варыянт

1. а. +	4. а. +	6.5.
2. б. +	5. г. +	
3. в. +	6. а. +	

7. $y = 1,4^x$

Власцівасці: 1) $b(y) = k$; 2) $E(y) = (0; +\infty)$

3) O_y - найменшы пераходны пункт
 $O_y: x=0, y=1$

4) Функцыя з'яўляецца

8. $y = (\frac{1}{2})^x, x \in [-2; 3]$

Функцыя спадае: $y(x) > y(z)$

$y(-2) = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$ - найбольшае значэнне

$y(3) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ - найменшае значэнне

11.5.



Землянік 11-й класу
Уладзіслаў Дзімітрук

Самастойная робата
Паказальнік функцыі

І варыянт

1. а. +	4. а. +	6.5.
2. б. +	5. г. +	
3. в. +	6. а. +	

7. $y = 1,4^x$

8. $y = (\frac{1}{2})^x, x \in [-2; 3]$

Функцыя спадае

9.5.5.

7.5.



УЧЕБ. П. К.
ШКОЛА РИКА

Самостоятельная работа
Порожневой Функции

1	бел.
1	а +
2	б +
3	а +
4	а +
5	а +
6	а +

65.

ДОДАТОК Б

Учень: 11 А класу
Тобуток Анні

Самостійна робота
Логарифмічна функція

1 варіант

1 в. +
2 в. +
3 а. +
4 а. +
5 в. +
6 а. +

7 $y = \log_3 x$
властивості:
1) $D(y): (0; +\infty)$
2) $E(y): \mathbb{R}$
3) функція зростаюча

65
10
75

Учень: 11 Б класу
Тобіков Віта

Самостійна робота
Логарифмічна функція

2 варіант

1 в. +
2 а. -
3 а. +
4 а. +
5 а. +
6 а. +

7 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, якщо $x \in [\frac{1}{9}; 3]$.

58

Учня 11-А класу
Геметти Микола
Самостійна робота
Логарифмічна функція

1 б.р.
1 б. +
2 б. +
3 б. -
4 а. +
5 з. +
6 б. -
7. $y = 10 \log_{\frac{1}{4}} x$, якщо $x \in [\frac{1}{4}, 16]$

4 б.

учня 11-А класу
Геметти Владислава
Самостійна робота
Логарифмічна функція

II б.
1 а. +
2 б. +
3 б. -
4 а. +
5 з. +
6 а. +

5 б.

Ученики 11-А класса
Гуцул Ангелина

Самостоятельная работа
Логарифмическая функция, 2 вариант

1 в. +	4 а. +	
2 в. +	5 в. +	6 в.
3 а. +	6 а. +	

7. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ Свойства:

- 1) $D(y): (0; +\infty)$
- 2) $E(y): \mathbb{R}$
- 3) функция строго

8. $y = \log_{\frac{1}{2}} x, x \in [\frac{1}{2}; 3]$

функция строго

- а) $y(\frac{1}{2}) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ - наиб. зн.
- б) $y(3) = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -1$ - наим. зн.

10 в.

Ученики 11-А класса
Колесник Анастасия

Самостоятельная работа
Логарифмическая функция

1 вариант

1 в. +	4 а. +	
2 а. -	5 в. +	3 в.
3 а. +	6 а. +	

7. $y = \log_2 x$

7

8. $y = \log_2 x, x \in [\frac{1}{2}; 16]$

функция строго

- а) $y(\frac{1}{2}) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ - $y_{\min}$
- б) $y(16) = \log_2 16 = 4$ - $y_{\max}$

6 в.

Грета 11-й класс
Луга гимназия

Самостоятельная работа
Логарифмическая функция

ЗР.

1. b -	2. a -	3. c -	68.
4. d -	5. a -	6. a -	
7.			

8. $y = \log_3 x$, $x \in [3; 3]$
 Найти значение
 $y(3) = \log_3 3 = 1$ - найд.
 $y(3) = \log_3 3 = 1$ - найд.

2,58.

96.

Грета 11-й класс
Луга гимназия

Самостоятельная работа
Логарифмическая функция

II вариант

1. a -	4. a -
2. b +	5. z +
3. a -	6. b -

7. $y = \log_2 x$
 8. $y = \log_2 x$, если $x \in [2; 3]$

48.

група 11-а Клас
Математика
Самостійна робота
Алгебраїчні функції

1. Варіант

1. b , +
2. a , -
3. b , -
4. b , -
5. c , +
6. a , +

30.

група 11-а Клас
Математика
Самостійна робота
Алгебраїчні функції

1. Варіант

1. b , - 3. a , + 5. a , -
2. b , - 4. a , - 6. a , +
7. $y = \log_3 x$

Властивості: функція зростаюча
 $D(f): (0; +\infty)$, $E(f): \mathbb{R}$

8. ?

30.

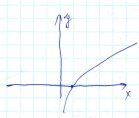
40.

Ученик 11-Б класу
Школа № 10

Самостійна робота
Логарифмічна функція

І варіант

1. б. +	4. а. +
2. в. +	5. з. +
3. а. +	6. а. +
4. $y = \log_3 x$	



68

68

48

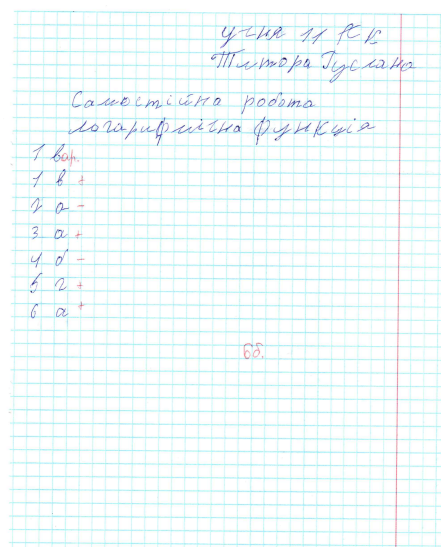
Учень 11-А класу
Школа № 10

Самостійна робота
Логарифмічна функція

ІІ варіант

1. б. +	4. а. +
2. в. +	5. в. +
3. а. +	6. а. +

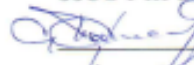
68



ДОДАТОК В

Директор

ЗЗСО I-III ступенів с. Розтоки

 С. С. Попович
«14» квітня 2023 р.

АКТ

впровадження (використання) результатів
виконаної науково-дослідної роботи
Романюк Алли Михайлівни

За матеріалами науково-дослідної роботи Романюк Алли Михайлівни «Аналіз засвоєних знань учнів 11 класу з теми «Показникова та логарифмічна функції» виконаної у період з 06.03.2023 до 14.04.2023 в рамках виконання науково-дослідної теми кафедри математики та інформатики і методики навчання «Розвиток математичних компетентностей старшокласників при вивченні теми «Показникова та логарифмічна функції» розроблено два варіанти самостійних робіт для учнів 11 класу, на основі результатів яких і проводиться аналіз засвоєних знань учнів. Темі самостійних робіт наступні: «Показникова функція» та «Логарифмічна функція».

Комісія у складі:

голова комісії: С. С. Попович, директор ЗЗСО I-III ступенів с. Розтоки,
члени комісії: Г. А. Цубера, заступник директора з навчальної роботи,
М. В. Шміляк, вчитель математики

встановили використання в процесі освітньої діяльності закладу матеріалів науково-дослідної роботи при проведенні аналізу та контролю знань учнів 11 класу з теми «Показникова та логарифмічна функції»

«14» квітня 2023р.

Голова комісії:  С. С. Попович

Члени комісії:  Г. А. Цубера

 М. В. Шміляк

